

Testi consigliati

- Aitchison I., Hey A.
Gauge Theories in Particle Physics, Vol. 1 - A Practical Introduction
3rd ed. - IOP Publishing 2003
4th ed. - CRC Press 2012
- Halzen F., A. Martin A.
Quarks and Leptons. Introductory Course in Modern Particle Physics
John Wiley & Sons 1984
- Horejsi J.
Fundamentals of Electroweak Theory
Charles University, Prague 2002
- Hitoshi Murayama
Lecture Notes (files pdf)
- Diapositive e registrazioni audio del corso
<http://www.mi.infn.it/~ragusa/2025-2026/elettrodeboli>
- <http://www.mi.infn.it/~ragusa/2025-2026/elettrodeboli/registrazioni>

Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 1

29.09.2025

Equazione di Klein-Gordon
Invarianza relativistica
Paradosso di Klein

anno accademico 2025-2026

Equazione di Klein-Gordon

- L'equazione non relativistica di Schrödinger non è adeguata a descrivere i risultati degli esperimenti quando l'energia cinetica è molto maggiore della massa a riposo delle particelle

- Ricordiamo l'equazione di Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t)$$

- Può essere ricavata partendo dalla relazione

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

- Per ottenerla si fanno le seguenti sostituzioni operatoriali

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$$

- Per giungere ad un'equazione relativistica si può seguire lo stesso metodo utilizzando grandezze e relazioni relativistiche ($c = 1$)

- Il 4-vettore energia impulso $p^\nu = (E, \mathbf{p})$

- La relazione energia - impulso

$$p^2 = p^\nu p_\nu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$$

Soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon

- Per semplicità da ora in poi poniamo $\hbar = c = 1$
- Sostituendo gli operatori nella relazione energia impulso otteniamo l'equazione di Klein-Gordon

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \nabla^2 \phi + m^2 \phi = 0$$

- Una soluzione di questa equazione è $\phi = Ne^{-ip \cdot x}$
 - $p = (E, \mathbf{p})$ e $x = (t, \mathbf{r})$ sono 4-vettori; p è un parametro
 - Sostituendo otteniamo $-p_0^2 \phi + \mathbf{p}^2 \phi + m^2 \phi = 0$
 - Perché l'equazione sia soddisfatta p deve soddisfare la condizione
$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$$
- Identifichiamo pertanto p con il 4-impulso della particella e quindi $p_0 = E$
 - La soluzione è caratterizzata da 3 parametri indipendenti: p_x, p_y, p_z
 - Notiamo inoltre che $E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \equiv \pm E_p$ E_p sempre positivo
 - Ci sono pertanto due soluzioni

$$\phi_+ = Ne^{-iE_p t + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \quad \text{soluzione con energia positiva}$$

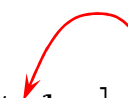
$$\phi_- = Ne^{+iE_p t + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \quad \text{soluzione con energia negativa}$$

Soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon

- Come nel caso dell'equazione di Schrödinger le soluzioni trovate sono autofunzioni dell'equazione che hanno uno spettro continuo
 - Non sono normalizzabili
 - Le soluzioni per problemi fisici si ottengono costruendo pacchetti d'onda

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[a(\mathbf{k}) e^{-iE_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + b(\mathbf{k}) e^{+iE_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right]$$

- Sfruttando la simmetria dell'integrazione in $\mathbf{k}$ si può cambiare il segno della parte spaziale dell'esponentiale del secondo termine dell'integrale
 - Ricordiamo che $b(\mathbf{k})$ è una funzione arbitraria (anche $a(\mathbf{k})$)
 - Chiamiamo ancora $b(\mathbf{k})$ la funzione $b(-\mathbf{k})$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[a(\mathbf{k}) e^{-iE_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + b(\mathbf{k}) e^{+iE_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right]$$


- Introduciamo il prodotto scalare quadridimensionale $k \cdot x = E_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[a(\mathbf{k}) e^{-ik \cdot x} + b(\mathbf{k}) e^{+ik \cdot x} \right]$$

Corrente di probabilità (Schrödinger)

- Consideriamo l'equazione di Schrödinger e la sua complessa coniugata

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2m}\nabla^2\psi = 0 \quad -i\frac{\partial\psi^*}{\partial t} + \frac{1}{2m}\nabla^2\psi^* = 0$$

- Moltiplichiamo a sinistra rispettivamente per ψ^* e ψ

$$i\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2m}\psi^*\nabla^2\psi = 0 \quad -i\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} + \frac{1}{2m}\psi\nabla^2\psi^* = 0$$

- Sottraiamo le due equazioni

$$i\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2m}\psi^*\nabla^2\psi + i\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} - \frac{1}{2m}\psi\nabla^2\psi^* = 0$$

- Elaborando

$$i\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi) + \frac{1}{2m}\nabla(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) = 0 \quad \frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 + \frac{-i}{2m}\nabla(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) = 0$$

- Definendo

$$\rho = |\psi|^2 \quad \mathbf{J} = \frac{-i}{2m}[\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*]$$

- Otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

equazione di continuità
per la probabilità

Corrente di probabilità (Schrödinger)

- Nel caso particolare delle soluzioni

$$\psi = N e^{-i \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \right)}$$

- Otteniamo

$$\rho = |N|^2$$

$$\mathbf{J} = \frac{-i}{2m} |N|^2 [i\mathbf{p} + i\mathbf{p}] = |N|^2 \frac{\mathbf{p}}{m}$$

$$\mathbf{J} = \rho \frac{\mathbf{p}}{m} = \rho \mathbf{v}$$

Corrente di probabilità (Klein-Gordon)

- Dobbiamo adesso verificare se le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon consentono lo stesso tipo di interpretazione che si era sviluppato per le soluzioni dell'equazione di Schrödinger

- Procedendo in modo del tutto analogo a quanto fatto per l'equazione di Schrödinger

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \nabla^2 \phi + m^2 \phi = 0 \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi^* - \nabla^2 \phi^* + m^2 \phi^* = 0$$

- Moltiplichiamo a sinistra per ϕ^* e ϕ

$$\phi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \phi^* \nabla^2 \phi + m^2 \phi^* \phi = 0 \qquad \phi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi^* - \phi \nabla^2 \phi^* + m^2 \phi^* \phi = 0$$

- Sottraiamo

$$\phi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi - \phi^* \nabla^2 \phi - \phi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi^* + \phi \nabla^2 \phi^* = 0$$

- Si giunge a

- Definizione di densità di probabilità
- Definizione di densità di corrente di probabilità
- Equazione di Continuità

$$\rho = i \left(\phi^* \frac{\partial}{\partial t} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial t} \phi^* \right)$$

$$\mathbf{J} = -i \left(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^* \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

Corrente di probabilità (Klein-Gordon)

- Ancora una volta, specializziamo alle soluzioni di onda piana

$$\phi = Ne^{-ip \cdot x}$$

- Calcoliamo la densità di probabilità

$$\rho = i \left(\phi^* \frac{\partial}{\partial t} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial t} \phi^* \right)$$

- Questa definizione porta alla prima inconsistenza dell'equazione di Klein-Gordon

- Per le soluzioni a energia positiva (ricordiamo che $E_p > 0$ sempre)

$$\phi_+ = Ne^{-iE_p t + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad \rho = |N|^2 i(-iE_p - iE_p) = 2|N|^2 E_p > 0$$

- Per le soluzioni a energia negativa

$$\phi_- = Ne^{+iE_p t + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad \rho = |N|^2 i(iE_p + iE_p) = -2|N|^2 E_p < 0$$

- Pertanto le soluzioni a energia negativa portano ad una probabilità negativa
 - Priva di alcun senso fisico
 - Le soluzioni non hanno quindi un'interpretazione fisica
- Notiamo che matematicamente la probabilità negativa è una conseguenza del fatto che l'equazione di Klein-Gordon è di secondo grado nel tempo
- Torneremo in seguito su questo problema, al momento irrisolto

Invarianza relativistica dell'equazione di Klein-Gordon

- Un importante requisito delle equazioni relativistiche è la loro invarianza relativistica
 - Formalmente le equazioni relativistiche devono avere la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali
- Consideriamo l'equazione di Klein-Gordon ($\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$)

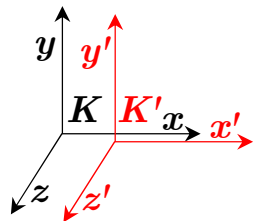
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi = 0$$

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0$$

- Consideriamo un passaggio da un sistema inerziale K ad un sistema K' tramite una trasformazione di Lorentz Λ
 - Come si trasformano gli operatori di derivazione ∂_μ e ∂^μ ?
 - Come si trasforma la funzione $\phi(x)$?
 - La massa m è invariante (è uno scalare in una trasformazione di Lorentz)
- Approfondiamo innanzitutto le proprietà delle trasformazioni di Lorentz

Trasformazioni di Lorentz

- In una trasformazione di Lorentz (ad esempio un boost lungo l'asse x) le componenti del 4-vettore tempo-posizione si trasformano secondo la legge



$$\begin{aligned} ct' &= \gamma ct - \gamma\beta x & y' &= y \\ x' &= -\gamma\beta ct + \gamma x & z' &= z \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

- In forma matriciale e introducendo $x^\mu = (ct, \mathbf{r})$
- Conviene esprimere il prodotto matriciale in forma tensoriale

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

sottointesa la somma dell'indice contratto ν

- Notare le posizioni degli indici μ e ν e i segni degli elementi della matrice che corrisponde a questa disposizione degli indici
- Altre forme della matrice

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = g_\mu{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu$$

$$\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} \Lambda^\alpha{}_\nu$$

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ -\Lambda^1_0 & -\Lambda^1_1 & -\Lambda^1_2 & -\Lambda^1_3 \\ -\Lambda^2_0 & -\Lambda^2_1 & -\Lambda^2_2 & -\Lambda^2_3 \\ -\Lambda^3_0 & -\Lambda^3_1 & -\Lambda^3_2 & -\Lambda^3_3 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^{\mu\nu} = g^{\alpha\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha$$

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & -\Lambda^0_1 & -\Lambda^0_2 & -\Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & -\Lambda^1_1 & -\Lambda^1_2 & -\Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & -\Lambda^2_1 & -\Lambda^2_2 & -\Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & -\Lambda^3_1 & -\Lambda^3_2 & -\Lambda^3_3 \end{pmatrix}$$

$$g_{\mu\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_\mu{}^\nu = g_{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \Lambda^\alpha{}_\beta$$

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & -\Lambda^0_1 & -\Lambda^0_2 & -\Lambda^0_3 \\ -\Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ -\Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ -\Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix}$$

$$g^{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Trasformazioni di Lorentz

- La proprietà che caratterizza una trasformazione di Lorentz è l'invarianza del prodotto scalare

$$x' \cdot y' = x'^{\mu} y'_{\mu} = x \cdot y = x^{\mu} y_{\mu}$$

- Introducendo le coordinate nel sistema K'

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad y'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} y^{\nu}$$

- Si ottiene

$$x'^{\mu} y'_{\mu} = g_{\mu\nu} x'^{\mu} y'^{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} x^{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} y^{\beta} = (g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta}) x^{\alpha} y^{\beta} = g_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta}$$

- In conclusione

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$$

in forma matriciale

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$$

$$\Lambda^T G \Lambda = G$$

- Moltiplicando ambo i membri per $g^{\beta\sigma}$ e sommando su β si ottiene

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} g^{\beta\sigma} = g_{\alpha\beta} g^{\beta\sigma} = \delta_{\alpha}^{\sigma}$$

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\beta} g^{\beta\sigma} = \delta_{\alpha}^{\sigma}$$

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\sigma}_{\mu} = \delta_{\alpha}^{\sigma}$$

$$(\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\mu} = \Lambda^{\sigma}_{\mu}$$

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^{\sigma}_{\mu} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & -\Lambda^0_1 & -\Lambda^0_2 & -\Lambda^0_3 \\ -\Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ -\Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ -\Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix}$$

- Esercizio: verificare che
- $$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Osservazione: l'inversa si ottiene con la sostituzione $\beta \rightarrow -\beta$



Operatore di derivazione

- Verifichiamo le proprietà di trasformazione del **4-vettore** $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$

- Si ha ovviamente
$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}$$

- Ricaviamo l'espressione di x in funzione di x'

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \Lambda_\mu^\alpha x'^\mu = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \Lambda_\mu^\alpha x'^\mu = \delta^\alpha_\nu x^\nu = x^\alpha$$

$$x^\alpha = \Lambda_\mu^\alpha x'^\mu$$

- Pertanto

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu^\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

- Le componenti $\partial/\partial x^\mu$ si trasformano come x_μ vale a dire in modo covariante

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

- Analogamente abbiamo le componenti contravarianti

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \Lambda^\mu_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

Operatore di d'Alembert

- Introduciamo l'operatore di D'Alembert (o d'Alembertiano)

$$\square \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu \partial_\mu$$

- È un operatore scalare
 - È il prodotto scalare di un 4-vettore con se stesso
 - Ha la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento
- In forma esplicita ($c = 1$)

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

- Per finire scriviamo la corrente di probabilità dell'equazione di Klein-Gordon in forma covariante

$$j^\mu = i \left[\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \phi \right]$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

Rapidità

- Un modo alternativo di rappresentare la trasformazione di Lorentz si ottiene introducendo la rapidità ξ

- Infatti osservando la seguente proprietà di γ e $\gamma\beta$

$$\gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = \gamma^2(1 - \beta^2) = 1$$

- Possiamo porre

$$\gamma\beta = \sinh \xi \quad \gamma = \cosh \xi \quad \beta = \tanh \xi$$

- Utilizzando la rapidità la trasformazione di Lorentz può essere espressa

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi & 0 & 0 \\ -\sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

- Che può essere vista come una rotazione con un angolo immaginario

$$\sinh \xi = -i \sin(i\xi) \quad \cosh \xi = \cos(i\xi)$$



Invarianza relativistica dell'equazione di Klein-Gordon

- A questo punto abbiamo tutti gli ingredienti per discutere l'invarianza relativistica dell'equazione di Klein-Gordon
 - La funzione $\phi(x)$ soddisfa l'equazione di Klein-Gordon nel sistema inerziale K

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi(x) = 0$$

- Alla funzione $\phi(x)$ corrisponderà una funzione $\phi'(x')$ nel sistema K'
- Se richiediamo che l'equazione di Klein-Gordon sia invariante per trasformazioni di Lorentz dovrà valere

$$(\partial'^\mu \partial'_\mu + m^2) \phi'(x') = 0$$

- Dal momento che $\partial^\mu \partial_\mu$ è invariante e che m è invariante è necessario che

$$\phi'(x') = \phi(x)$$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

- La condizione sopra riportata definisce la funzione scalare $\phi'(x')$
 - I punti x e x' rappresentano lo stesso punto nello spazio tempo visto in due differenti sistemi inerziali
 - La forma funzionale ϕ' può essere differente da ϕ
 - Esempio $\phi(x) = e^{-ikx}$ $\phi'(x') = e^{-ik'x'}$

Equazione di Klein-Gordon: interpretazione

- Abbiamo visto che le soluzioni con energia negativa portano ad una probabilità negativa che non ha senso fisico
 - Dirac riuscì a risolvere il problema del segno della probabilità
 - Lo vedremo fra poco
- Potremmo tentare di utilizzare l'equazione di Klein-Gordon utilizzando solo le soluzioni con energia positiva
 - Ci sono comunque inconsistenze
 - Ad esempio il Paradosso di Klein
 - Presente anche nell'equazione di Dirac
- Studiamo l'interazione di una particella con un campo elettrostatico
 - L'interazione elettromagnetica viene introdotta tramite la sostituzione

$$\partial^\mu \rightarrow \partial^\mu + iqA^\mu$$

- Per la componente temporale $E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t}$ $E_T = E - qA^0 \equiv E - U$
- Per la componente spaziale $\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla$ $\mathbf{P} = \mathbf{p} - q\mathbf{A}$

Il paradosso di Klein†

- Poniamo

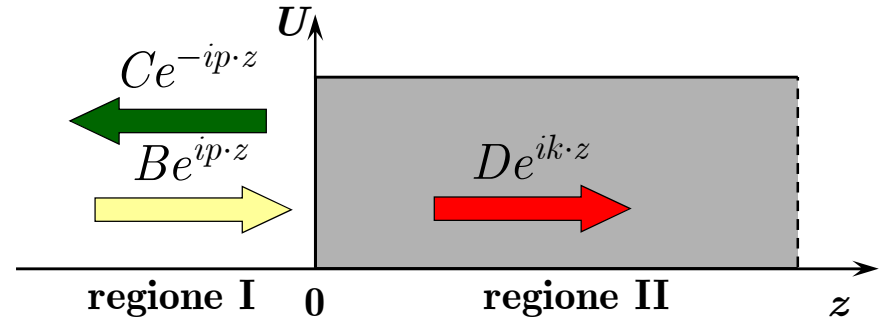
$$\Psi_E(z, t) = \psi(z) e^{-iEt}$$

solo soluzione con $E > 0$

- Consideriamo l'equazione di Klein-Gordon nel caso di un potenziale a barriera

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{0}) \quad qA^0 = U$$

$$(E - U)^2 \psi(z) = -\frac{d^2 \psi(z)}{dz^2} + m^2 \psi(z)$$



- La funzione d'onda consiste di due parti

- a sinistra (I) un'onda incidente e una riflessa • sostituendo nell'equazione ($U = 0$)

$$\psi_I(z) = Be^{ip \cdot z} + Ce^{-ip \cdot z}$$

$$E^2 = p^2 + m^2$$

- a destra (II) un'onda trasmessa

$$\psi_{II}(z) = De^{ik \cdot z}$$

- sostituendo nell'equazione ($U \neq 0$)

$$(E - U)^2 = k^2 + m^2$$

- Pertanto a sinistra e a destra l'equazione è soddisfatta rispettivamente per

$$p = \pm \sqrt{E^2 - m^2}$$

- deve essere $p > 0$ (B viaggia da sx a dx)

$$k = \pm \sqrt{(E - U)^2 - m^2}$$

- il segno di k deve essere determinato

- †Landau R. - Quantum Mechanics II-A second course in quantum mechanics 2nd ed. pag. 213



Il paradosso di Klein

- Imponendo la continuità di ψ e di $d\psi/dz$ a $z = 0$ si ottiene

- Risolvendo in funzione di B

$$C = \frac{p-k}{p+k} B \quad D = \frac{2p}{p+k} B$$

$$\begin{cases} B + C = D \\ ipB - ipC = ikD \end{cases}$$

- Riepilogando

$$\Psi_E(z, t) = \psi(z) e^{-iEt}$$

$$\psi_I(z) = B e^{ip \cdot z} + C e^{-ip \cdot z}$$

$$E^2 = p^2 + m^2$$

$$\psi_{II}(z) = D e^{ik \cdot z}$$

$$(E - U)^2 = k^2 + m^2$$

- Le soluzioni normalizzabili si ottengono formando dei pacchetti d'onda

$$\Phi(z, t) = \int g(\xi) \Psi_E(z, t) d\xi = \int g(\xi) \psi(z) e^{-iE(\xi)t} d\xi$$

regione I $\rightarrow \xi = p$

regione II $\rightarrow \xi = k$

- Come è noto, nel caso di pacchetti con una definizione del momento molto netta ($g(\xi)$ molto stretta) il pacchetto viaggia senza deformarsi con velocità di gruppo

$$v_g = \frac{\partial E}{\partial \xi}$$

Il paradosso di Klein

- Calcoliamo adesso le correnti e le densità

- La corrente è data da

$$j = \frac{1}{2im} \left(\Psi^* \frac{\partial}{\partial z} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial z} \Psi^* \right)$$

NB: La normalizzazione di j è quella di R. Landau e differisce da quella di Aitchison & Hey

- Nelle due regioni otteniamo

$$j_I = \frac{p}{m} (|B|^2 - |C|^2)$$

$$j_{II} = \begin{cases} \frac{k}{m} |D|^2 & k \text{ reale} \\ 0 & k \text{ immaginario} \end{cases}$$

- Analogamente la densità è data da

$$\rho = \frac{1}{2m} \left[\Psi^* \left(i \frac{\partial}{\partial t} - U \right) \Psi - \Psi \left(i \frac{\partial}{\partial t} + U \right) \Psi^* \right]$$

$$\rho = \frac{1}{2m} \left[\Psi^* (E - U) \Psi - \Psi (-E + U) \Psi^* \right] \quad \rho = \frac{E - U}{m} |\Psi|^2 = \frac{E - U}{m} |\psi|^2$$

- Nelle due regioni abbiamo

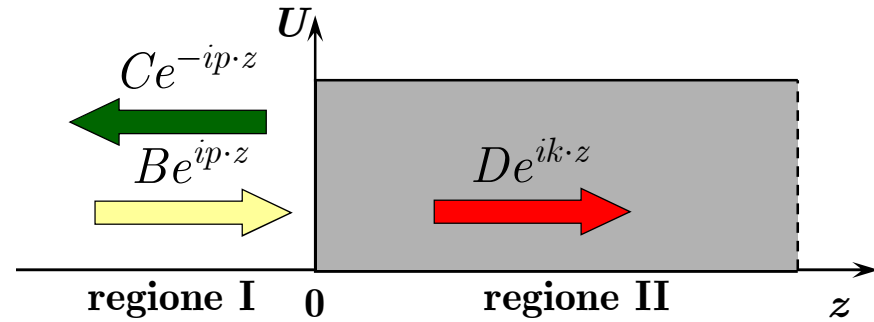
$$\rho_I = \frac{E}{m} |\psi_I|^2$$

$$\rho_{II} = \frac{E - U}{m} |\psi_{II}|^2$$



Il paradosso di Klein

- Siamo ora in grado di discutere il fenomeno della collisione di una particella con la barriera U
 - B è l'ampiezza dell'onda incidente
 - C è l'ampiezza dell'onda riflessa
 - D è l'ampiezza dell'onda trasmessa



$$j_I = \frac{p}{m}(|B|^2 - |C|^2) \equiv j_i - j_r$$

$$j_i = \frac{p}{m}|B|^2 \quad j_r = \frac{p}{m}|C|^2$$

$$j_{II} = j_t = \frac{k}{m}|D|^2$$

- Dalla diapositiva [19](#) abbiamo

$$C = \frac{p-k}{p+k}B \quad D = \frac{2p}{p+k}B$$

- Calcoliamo i coefficienti di riflessione e di trasmissione

$$\mathcal{R} = \frac{j_r}{j_i} = \left| \frac{C}{B} \right|^2 = \left| \frac{p-k}{p+k} \right|^2 \quad \mathcal{T} = \frac{j_t}{j_i} = \frac{k}{p} \left| \frac{D}{B} \right|^2 = \frac{k}{p} \left| \frac{2p}{p+k} \right|^2 \quad \text{per } k \text{ reale}$$

zero altrimenti

- Queste formule sono sempre valide
- Interpretiamole al variare di U

Il paradosso di Klein

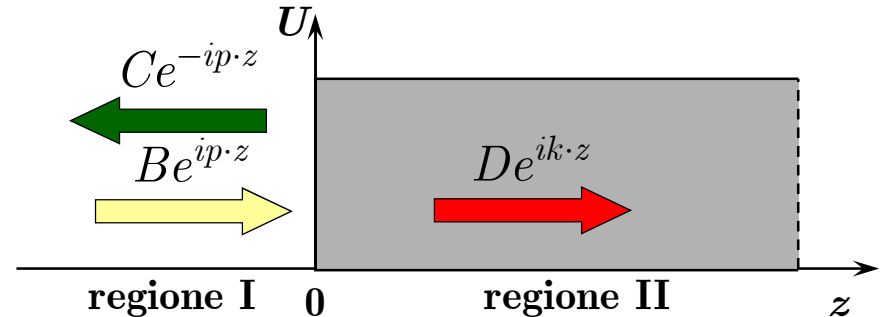
- Vediamo quindi cosa succede per una fissata energia E della particella al variare dell'altezza dell'energia U
- Ricordiamo che

$$p = \textcircled{+} \sqrt{E^2 - m^2}$$

$$k = \textcircled{\pm} \sqrt{(E - U)^2 - m^2}$$

segno da determinare

- per U piccolo ($0 < U < E - m$) k è reale
 - Si ha propagazione di un'onda nella regione II
 - Pertanto k deve essere positivo
 - La velocità di gruppo è positiva
 - La densità nella regione II è positiva
- Si ha un urto del tutto analogo a quanto avveniva nella M. Q. non relativistica

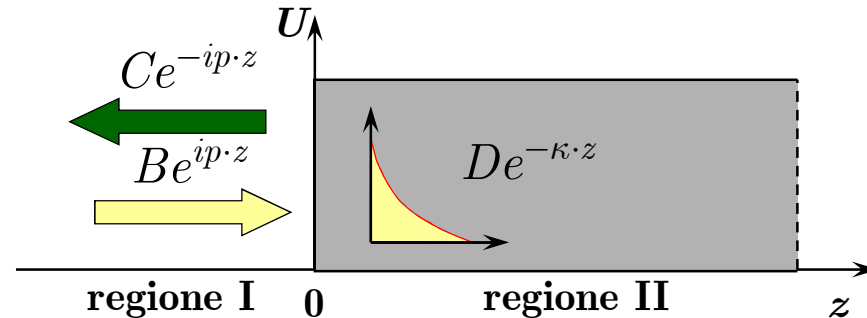


$$v_g = \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{k}{E - U}$$

$$\rho_{II} = \frac{E - U}{m} |\psi_{II}|^2$$

$$\mathcal{R} = \frac{j_r}{j_i} = \left| \frac{p - k}{p + k} \right|^2 \quad \mathcal{T} = \frac{j_t}{j_i} = \frac{k}{p} \left| \frac{2p}{p + k} \right|^2$$

Il paradosso di Klein



$$k = \pm \sqrt{(E - U)^2 - m^2}$$

- **Aumentando** U ($E - m < U < E + m$) $k = i\kappa$ **diventa immaginario**

- Non si ha propagazione di onda nella regione II
- La densità decresce esponenzialmente
 - La densità può diventare negativa ma è comunque piccola
- È ancora simile alla M. Q. non relativistica

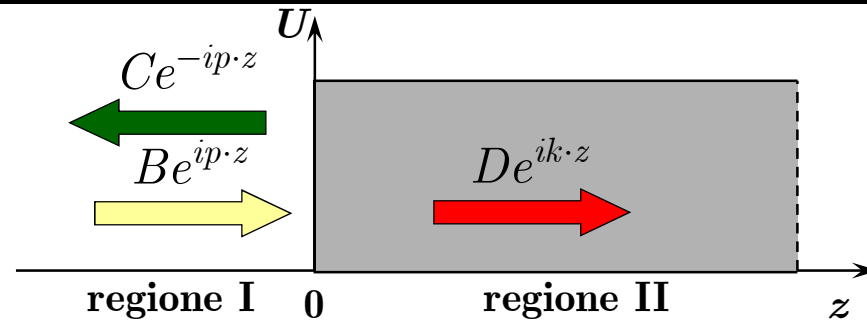
$$\rho_{II} \sim e^{-|k|z}$$

$$\rho_{II} = \frac{E - U}{m} |\psi_{II}|^2$$

$$\mathcal{R} = \frac{j_r}{j_i} = \left| \frac{p - k}{p + k} \right|^2 = \left| \frac{p - i\kappa}{p + i\kappa} \right|^2 = 1 \quad \mathcal{T} = \frac{j_t}{j_i} = 0$$

- **Riflessione totale**

Il paradosso di Klein



$$k = \pm \sqrt{(E - U)^2 - m^2}$$

- **Aumentando ancora U ($U > E + m$)** k è di nuovo reale
- Si ha di nuovo propagazione di un'onda nella regione II
 - Proibita in M.Q. non relativistica
- La densità è negativa
- La velocità di gruppo è

$$(E - U)^2 = k^2 + m^2$$
- Per mantenere l'interpretazione di un'onda che viaggia verso destra occorre scegliere $k < 0$

Trasmette un numero negativo di particelle

$$\rho_{II} = \frac{E - U}{m} |\psi_{II}|^2$$

$$v_g = \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{k}{E - U}$$

Riflette più di quanto incide

$$\mathcal{R} = \frac{j_r}{j_i} = \left| \frac{p - k}{p + k} \right|^2 = \left(\frac{p + |k|}{p - |k|} \right)^2 > 1$$

$$\mathcal{T} = \frac{j_t}{j_i} = \frac{k}{p} \left| \frac{2p}{p + k} \right|^2 = - \frac{4p|k|}{(p - |k|)^2} < 0$$

Meccanica Quantistica e Relatività[†]

- Il principio di indeterminazione di Heisenberg impone una relazione fra l'incertezza nella misura simultanea:

- Della posizione q di una particella
- Della sua quantità di moto p

$$\Delta q \Delta p \geq \hbar/2$$

- Ciascuna delle due variabili può essere misurata separatamente con precisione arbitraria purché il tempo della misura sia abbastanza lungo

- Il Principio di Relatività (ristretta) richiede che il tempo e l'energia siano entrambi la quarta componente di un quadrivettore

- **Quadrivettore** posizione $x^\mu = (ct, x, y, z)$
- **Quadrivettore** energia/impulso $p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z)$

- La covarianza relativistica impone che tempo ed energia siano trattati analogamente alle componenti spaziali dei rispettivi 4-vettori
- Si introduce pertanto un ulteriore principio di indeterminazione

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$$

- [†]Landau, Lifshitz, Berestetskii, Pitaevskii - Quantum Electrodynamics: Introduction (§ 1.)

Meccanica Quantistica e Relatività

- Il significato di questa relazione è che
 - L'energia di un sistema può non essere esattamente definita se misurata o considerata per intervalli di tempo troppo brevi
 - Misure fatte in tempi molto brevi possono portare ad una indeterminazione dell'energia del sistema
- L'equivalenza fra massa ed energia introdotta da Einstein

$$E = mc^2$$

implica che l'indeterminazione dell'energia possa manifestarsi con l'apparizione di nuove particelle, sebbene per periodi di tempo brevi (stati virtuali)

- Inoltre l'energia stessa delle particelle può trasformarsi in nuove particelle
- La teoria non ha più un numero costante di particelle
- Il paradosso di Klein ha inoltre mostrato che il tentativo di "localizzare" una particella con una barriera di potenziale porta all'apparizione di contraddizioni
 - Non è possibile tentare di localizzare una particella con precisione arbitraria
 - Il significato di una funzione delle coordinate va rivisto
- Per finire lo spazio e il tempo devono essere trattati allo stesso modo
 - Anche $\mathbf{r} = (x, y, z)$, come t , diventano parametri e non variabili dinamiche