Testi consigliati

- Aitchison I., Hey A.
  Gauge Theories in Particle Physics,Vol. 1 - A Practical Introduction
  3rd ed. - IOP Publishing 2003
  4th ed. – CRC Press 2012

- Halzen F.,A.Martin A.
  Quarks and Leptons. Introductory Course in Modern Particle Physics
  John Wiley & Sons 1984

- Horejsi J.
  Fundamentals of Electroweak Theory
  Charles University, Prague 2002

- Hitoshi Murayama
  Lecture Notes (files pdf)

- Diapositive e registrazioni audio del corso
  http://www.mi.infn.it/~ragusa/2025-2026/elettrodeboli
- http://www.mi.infn.it/~ragusa/2025-2026/elettrodeboli/registrazioni

Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 1

29.09.2025

Equazione di Klein-Gordon
Invarianza relativistica
Paradosso di Klein

anno accademico 2025-2026

Equazione di Klein-Gordon

- L'equazione non relativistica di Schrödinger non è adeguata a descrivere i risultati degli esperimenti quando l'energia cinetica è molto maggiore della massa a riposo delle particelle
  - Ricordiamo l'equazione di Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t)$$

  - Può essere ricavata partendo dalla relazione

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

  - Per ottenerla si fanno le seguenti sostituzioni operatoriali

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad \mathbf{p} \to -i\hbar\nabla$$

- Per giungere ad un'equazione relativistica si può seguire lo stesso metodo utilizzando grandezze e relazioni relativistiche $(c = 1)$
  - Il 4-vettore energia impulso $p^\nu = (\ E, \mathbf{p}\ )$
  - La relazione energia – impulso

$$\boxed{p^2 = p^\nu p_\nu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2}$$

Soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon

- Per semplicità da ora in poi poniamo $\hbar = c = 1$
- Sostituendo gli operatori nella relazione energia impulso otteniamo l'equazione di Klein-Gordon

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - \nabla^2\phi + m^2\phi = 0}$$

- Una soluzione di questa equazione è $\boxed{\phi = Ne^{-ip\cdot x}}$
  - $p = (E, \mathrm{p})$ e $x = (t, \mathrm{r})$ sono 4-vettori; p è un parametro
  - Sostituendo otteniamo $\quad -p_0^2\phi + \mathbf{p}^2\phi + m^2\phi = 0$
  - Perché l'equazione sia soddisfatta p deve soddisfare la condizione

$$p_0^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$$

- Identifichiamo pertanto p con il 4-impulso della particella e quindi $p_o = E$
  - La soluzione è caratterizzata da 3 parametri indipendenti: p_x, p_y, p_z
  - Notiamo inoltre che $\quad E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \equiv \pm E_{\mathbf{p}}$ $\quad$ $\boxed{E_{\mathrm{p}} \text{ sempre positivo}}$
  - Ci sono pertanto due soluzioni

$$\phi_+ = Ne^{-iE_{\mathbf{p}}t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$ soluzione con energia positiva

$$\phi_- = Ne^{+iE_{\mathbf{p}}t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$ soluzione con energia negativa

Soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon

- **Come nel caso dell'equazione di Schrödinger le soluzioni trovate sono autofunzioni dell'equazione che hanno uno spettro continuo**
  - **Non sono normalizzabili**
  - **Le soluzioni per problemi fisici si ottengono costruendo pacchetti d'onda**

$$\phi\left(\mathbf{r},t\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3\mathbf{k}}{\left(2\pi\right)^3 \sqrt{2E_\mathbf{k}}} \left[a\left(\mathbf{k}\right) e^{-iE_\mathbf{k}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + b\left(\mathbf{k}\right) e^{+iE_\mathbf{k}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right]$$

  - **Sfruttando la simmetria dell'integrazione in $\mathbf{k}$ si può cambiare il segno della parte spaziale dell'esponenziale del secondo termine dell'integrale**
    - **Ricordiamo che $b(\mathbf{k})$ è una funzione arbitraria (anche $a(\mathbf{k})$)**
    - **Chiamiamo ancora $b(\mathbf{k})$ la funzione $b(-\mathbf{k})$**

$$\phi\left(\mathbf{r},t\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3\mathbf{k}}{\left(2\pi\right)^3 \sqrt{2E_\mathbf{k}}} \left[a\left(\mathbf{k}\right) e^{-iE_\mathbf{k}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + b\left(\mathbf{k}\right) e^{+iE_\mathbf{k}t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right]$$

    - **Introduciamo il prodotto scalare quadridimensionale** $k \cdot x = E_\mathbf{k}t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$

$$\phi\left(\mathbf{r},t\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3\mathbf{k}}{\left(2\pi\right)^3 \sqrt{2E_\mathbf{k}}} \left[a\left(\mathbf{k}\right) e^{-ik\cdot x} + b\left(\mathbf{k}\right) e^{+ik\cdot x} \right]$$

Corrente di probabilità (Schrödinger)

- Consideriamo l'equazione di Schrödinger e la sua complessa coniugata

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t}+\frac{1}{2m}\nabla^2\psi=0 \qquad -i\frac{\partial \psi^*}{\partial t}+\frac{1}{2m}\nabla^2\psi^*=0$$

- Moltiplichiamo a sinistra rispettivamente per ψ^* e ψ

$$i\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t}+\frac{1}{2m}\psi^*\nabla^2\psi=0 \qquad -i\psi\frac{\partial \psi^*}{\partial t}+\frac{1}{2m}\psi\nabla^2\psi^*=0$$

- Sottraiamo le due equazioni

$$i\psi^*\frac{\partial \psi}{\partial t}+\frac{1}{2m}\psi^*\nabla^2\psi+i\psi\frac{\partial \psi^*}{\partial t}-\frac{1}{2m}\psi\nabla^2\psi^*=0$$

- Elaborando

$$i\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*\psi)+\frac{1}{2m}\nabla\Big(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*\Big)=0 \qquad \frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2+\frac{-i}{2m}\nabla\Big(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*\Big)=0$$

- Definendo

$$\boxed{\rho=|\psi|^2 \qquad \mathbf{J}=\frac{-i}{2m}\big[\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi-\psi\boldsymbol{\nabla}\psi^*\big]}$$

- Otteniamo

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho+\nabla\cdot\mathbf{J}=0}$$

equazione di continuità per la probabilità

Corrente di probabilità (Schrödinger)

- **Nel caso particolare delle soluzioni**

$$\psi = Ne^{-i\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right)}$$

- **Otteniamo**

$$\rho = |N|^2$$

$$\mathbf{J} = \frac{-i}{2m}|N|^2\left[i\mathbf{p} + i\mathbf{p}\right] = |N|^2\,\frac{\mathbf{p}}{m}$$

$$\mathbf{J} = \rho\frac{\mathbf{p}}{m} = \rho\mathbf{v}$$

Corrente di probabilità (Klein-Gordon)

- Dobbiamo adesso verificare se le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon consentono lo stesso tipo di interpretazione che si era sviluppato per le soluzioni dell'equazione di Schrödinger
  - Procedendo in modo del tutto analogo a quanto fatto per l'equazione di Schrödinger

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - \nabla^2\phi + m^2\phi = 0 \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi^* - \nabla^2\phi^* + m^2\phi^* = 0$$

  - Moltiplichiamo a sinistra per ϕ^* e ϕ

$$\phi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - \phi^*\nabla^2\phi + m^2\phi^*\phi = 0 \qquad \phi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi^* - \phi\nabla^2\phi^* + m^2\phi^*\phi = 0$$

  - Sottraiamo

$$\phi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi - \phi^*\nabla^2\phi - \phi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi^* + \phi\nabla^2\phi^* = 0$$

- Si giunge a
  - Definizione di densità di probabilità
  - Definizione di densità di corrente di probabilità
  - Equazione di Continuità

$$\rho = i\left(\phi^* \frac{\partial}{\partial t}\phi - \phi\frac{\partial}{\partial t}\phi^*\right)$$

$$\mathbf{J} = -i\left(\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\cdot\mathbf{J} = 0}$$

Corrente di probabilità (Klein-Gordon)

- Ancora una volta, specializziamo alle soluzioni di onda piana $\boxed{\phi = Ne^{-ip\cdot x}}$
  - Calcoliamo la densità di probabilità

$$\rho = i\left(\phi^* \frac{\partial}{\partial t}\phi - \phi \frac{\partial}{\partial t}\phi^*\right)$$

- Questa definizione porta alla prima inconsistenza dell'equazione di Klein-Gordon
  - Per le soluzioni a energia positiva (ricordiamo che $E_\mathbf{p} > 0$ sempre)

$$\phi_+ = Ne^{-iE_\mathbf{p}t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \qquad \rho = |N|^2\, i\left(-iE_\mathbf{p} - iE_\mathbf{p}\right) = 2|N|^2\, E_\mathbf{p} > 0$$

  - Per le soluzioni a energia negativa

$$\phi_- = Ne^{+iE_\mathbf{p}t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \qquad \rho = |N|^2\, i\left(iE_\mathbf{p} + iE_\mathbf{p}\right) = -2|N|^2\, E_\mathbf{p} < 0$$

- Pertanto le soluzioni a energia negativa portano ad una probabilità negativa
  - Priva di alcun senso fisico
  - Le soluzioni non hanno quindi un'interpretazione fisica
- Notiamo che matematicamente la probabilità negativa è una conseguenza del fatto che l'equazione di Klein-Gordon e di secondo grado nel tempo
- Torneremo in seguito su questo problema, al momento irrisolto

Invarianza relativistica dell'equazione di Klein-Gordon

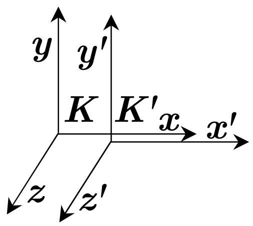
- **Un importante requisito delle equazioni relativistiche è la loro invarianza relativistica**
  - **Formalmente le equazioni relativistiche devono avere la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali**
- **Consideriamo l'equazione di Klein-Gordon** $(\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\phi = 0 \qquad \boxed{\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right)\phi = 0}$$

  - **Consideriamo un passaggio da un sistema inerziale K ad un sistema K' tramite una trasformazione di Lorentz Λ**
    - **Come si trasformano gli operatori di derivazione ∂_μ e ∂^μ ?**
    - **Come si trasforma la funzione $\phi(x)$?**
  - **La massa m è invariante (è uno scalare in una trasformazione di Lorentz)**
- **Approfondiamo innanzitutto le proprietà delle trasformazioni di Lorentz**

Trasformazioni di Lorentz

- **In una trasformazione di Lorentz (ad esempio un boost lungo l'asse x) le componenti del 4-vettore tempo-posizione si trasformano secondo la legge**



$$ct' = \gamma ct - \gamma\beta x \qquad y' = y$$
$$x' = -\gamma\beta ct + \gamma x \qquad z' = z$$

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

  - **In forma matriciale e introducendo $x^\mu = (ct, \mathbf{r})$**

- **Conviene esprimere il prodotto matriciale in forma tensoriale**

$$\boxed{x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu}$$

sottointesa la somma dell'indice contratto ν

  - **Notare le posizioni degli indici μ e ν e i segni degli elementi della matrice che corrisponde a questa disposizione degli indici**

$$\boxed{g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = g_\mu{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu}$$

  - **Altre forme della matrice**

$$\boxed{\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}\Lambda^\alpha{}_\nu} \qquad \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ -\Lambda^1{}_0 & -\Lambda^1{}_1 & -\Lambda^1{}_2 & -\Lambda^1{}_3 \\ -\Lambda^2{}_0 & -\Lambda^2{}_1 & -\Lambda^2{}_2 & -\Lambda^2{}_3 \\ -\Lambda^3{}_0 & -\Lambda^3{}_1 & -\Lambda^3{}_2 & -\Lambda^3{}_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Lambda^{\mu\nu} = g^{\alpha\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha} \qquad \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & -\Lambda^0{}_1 & -\Lambda^0{}_2 & -\Lambda^0{}_3 \\ \Lambda^1{}_0 & -\Lambda^1{}_1 & -\Lambda^1{}_2 & -\Lambda^1{}_3 \\ \Lambda^2{}_0 & -\Lambda^2{}_1 & -\Lambda^2{}_2 & -\Lambda^2{}_3 \\ \Lambda^3{}_0 & -\Lambda^3{}_1 & -\Lambda^3{}_2 & -\Lambda^3{}_3 \end{pmatrix}$$

$$g_{\mu\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Lambda_\mu{}^\nu = g_{\mu\alpha} g^{\nu\beta}\Lambda^\alpha{}_\beta} \qquad \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & -\Lambda^0{}_1 & -\Lambda^0{}_2 & -\Lambda^0{}_3 \\ -\Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \Lambda^1{}_2 & \Lambda^1{}_3 \\ -\Lambda^2{}_0 & \Lambda^2{}_1 & \Lambda^2{}_2 & \Lambda^2{}_3 \\ -\Lambda^3{}_0 & \Lambda^3{}_1 & \Lambda^3{}_2 & \Lambda^3{}_3 \end{pmatrix}$$

$$g^{\alpha\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Trasformazioni di Lorentz

- La proprietà che caratterizza una trasformazione di Lorentz è l'invarianza del prodotto scalare

$$x' \cdot y' = x'^{\mu} y'_{\mu} = x \cdot y = x^{\mu} y_{\mu}$$

  - Introducendo le coordinate nel sistema K'

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \qquad y'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} y^{\nu}$$

  - Si ottiene

$$x'^{\mu} y'_{\mu} = g_{\mu\nu} x'^{\mu} y'^{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} x^{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} y^{\beta} = \left(g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} \right) x^{\alpha} y^{\beta} = g_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta}$$

  - In conclusione $\boxed{g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta}}$

in forma matriciale

$$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} = g_{\alpha\beta} \qquad \Lambda^{T} G \Lambda = G$$

- Moltiplicando ambo i membri per $g^{\beta\sigma}$ e sommando su β si ottiene

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} g^{\beta\sigma} = g_{\alpha\beta} g^{\beta\sigma} = \delta_{\alpha}{}^{\sigma} \qquad \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} g^{\beta\sigma} = \delta_{\alpha}{}^{\sigma}$$

$$\Lambda \quad \Lambda^{-1} = I$$

$$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda_{\mu}{}^{\sigma} = \delta_{\alpha}{}^{\sigma}$$

$$\boxed{\left(\Lambda^{-1} \right)^{\sigma}{}_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\sigma}}$$

$$\Lambda^{\mu}{}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \Lambda^{0}{}_{0} & \Lambda^{0}{}_{1} & \Lambda^{0}{}_{2} & \Lambda^{0}{}_{3} \\ \Lambda^{1}{}_{0} & \Lambda^{1}{}_{1} & \Lambda^{1}{}_{2} & \Lambda^{1}{}_{3} \\ \Lambda^{2}{}_{0} & \Lambda^{2}{}_{1} & \Lambda^{2}{}_{2} & \Lambda^{2}{}_{3} \\ \Lambda^{3}{}_{0} & \Lambda^{3}{}_{1} & \Lambda^{3}{}_{2} & \Lambda^{3}{}_{3} \end{pmatrix} \qquad \Lambda_{\mu}{}^{\sigma} = \begin{pmatrix} \Lambda^{0}{}_{0} & -\Lambda^{0}{}_{1} & -\Lambda^{0}{}_{2} & -\Lambda^{0}{}_{3} \\ -\Lambda^{1}{}_{0} & \Lambda^{1}{}_{1} & \Lambda^{1}{}_{2} & \Lambda^{1}{}_{3} \\ -\Lambda^{2}{}_{0} & \Lambda^{2}{}_{1} & \Lambda^{2}{}_{2} & \Lambda^{2}{}_{3} \\ -\Lambda^{3}{}_{0} & \Lambda^{3}{}_{1} & \Lambda^{3}{}_{2} & \Lambda^{3}{}_{3} \end{pmatrix}$$

- Esercizio: verificare che $\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Osservazione: l'inversa si ottiene con la sostituzione $\beta \to -\beta$

Operatore di derivazione

- Verifichiamo le proprietà di trasformazione del 4-vettore $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$
  - Si ha ovviamente
$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}$$
  - Ricaviamo l'espressione di x in funzione di x'
$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \qquad \Lambda_\mu{}^\alpha x'^\mu = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \qquad \Lambda_\mu{}^\alpha x'^\mu = \delta^\alpha{}_\nu x^\nu = x^\alpha$$
$$\boxed{x^\alpha = \Lambda_\mu{}^\alpha x'^\mu}$$
  - Pertanto
$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\alpha \qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}}$$
- Le componenti $\partial/\partial x^\mu$ si trasformano come x_μ vale a dire in modo covariante
$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$
- Analogamente abbiamo le componenti contravarianti
$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) \qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}}$$

Operatore di d'Alembert

- Introduciamo l'operatore di D'Alembert (o d'Alembertiano)

$$\Box \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \equiv \partial^{\mu} \partial_{\mu}$$

  - È un operatore scalare
    - È il prodotto scalare di un 4-vettore con se stesso
    - Ha la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento
- In forma esplicita $(c = 1)$

$$\partial^{\mu} \partial_{\mu} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

- Per finire scriviamo la corrente di probabilità dell'equazione di Klein-Gordon in forma covariante

$$j^{\mu} = i\left[\phi^{*} \partial^{\mu} \phi - \left(\partial^{\mu} \phi^{*}\right) \phi\right] \qquad \partial_{\mu} j^{\mu} = 0$$

Rapidità

- Un modo alternativo di rappresentare la trasformazione di Lorentz si ottiene introducendo la rapidità ξ
  - Infattti osservando la seguente proprietà di γ e $\gamma\beta$

$$\gamma^2 - \gamma^2\beta^2 = \gamma^2\left(1-\beta^2\right) = 1$$

  - Possiamo porre

$$\boxed{\gamma\beta = \sinh\xi \quad \gamma = \cosh\xi \quad \beta = \tanh\xi}$$

- Utilizzando la rapidità la trasformazione di Lorentz può essere espressa

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\xi & -\sinh\xi & 0 & 0 \\ -\sinh\xi & \cosh\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

  - Che può essere vista come una rotazione con un angolo immaginario

$$\sinh\xi = -i\sin(i\xi) \qquad \cosh\xi = \cos(i\xi)$$

Invarianza relativistica dell'equazione di Klein-Gordon

- A questo punto abbiamo tutti gli ingredienti per discutere l'invarianza relativistica dell'equazione di Klein-Gordon
  - La funzione $\phi(x)$ soddisfa l'equazione di Klein-Gordon nel sistema inerziale K

$$\boxed{\left(\partial^\mu \partial_\mu + m^2\right)\phi(x) = 0}$$

  - Alla funzione $\phi(x)$ corrisponderà una funzione $\phi'(x')$ nel sistema K'
  - Se richiediamo che l'equazione di Klein-Gordon sia invariante per trasformazioni di Lorentz dovrà valere

$$\boxed{\left(\partial'^\mu \partial'_\mu + m^2\right)\phi'\left(x'\right) = 0}$$

- Dal momento che $\partial^\mu \partial_\mu$ è invariante e che m è invariante è necessario che

$$\boxed{\phi'\left(x'\right) = \phi(x)} \qquad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

- La condizione sopra riportata definisce la funzione scalare $\phi'(x')$
  - I punti x e x' rappresentano lo stesso punto nello spazio tempo visto in due differenti sistemi inerziali
  - La forma funzionale ϕ' può essere differente da ϕ
    - Esempio $\phi(x) = e^{-ikx} \quad \phi'(x') = e^{-ik'x'}$

Equazione di Klein-Gordon: interpretazione

- Abbiamo visto che le soluzioni con energia negativa portano ad una probabilità negativa che non ha senso fisico
  - Dirac riuscì a risolvere il problema del segno della probabilità
    - Lo vedremo fra poco

- Potremmo tentare di utilizzare l'equazione di Klein-Gordon utilizzando solo le soluzioni con energia positiva
  - Ci sono comunque inconsistenze
  - Ad esempio il Paradosso di Klein
    - Presente anche nell'equazione di Dirac

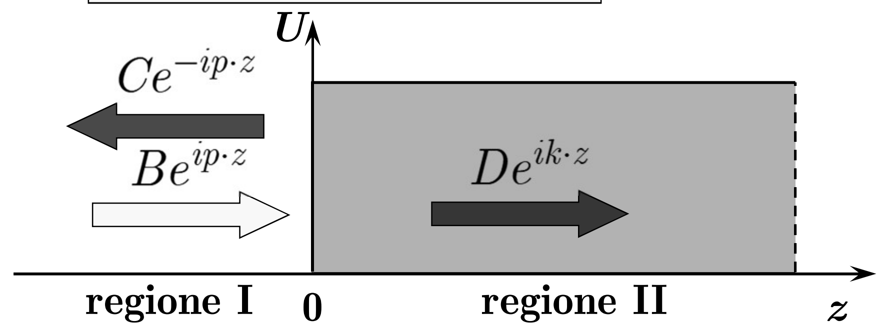
- Studiamo l'interazione di una particella con un campo elettrostatico
  - L'interazione elettromagnetica viene introdotta tramite la sostituzione

$$\boxed{\partial^\mu \to \partial^\mu + iqA^\mu}$$

- Per la componente temporale $E \to i\dfrac{\partial}{\partial t}$ $\qquad E_T = E - qA^0 \equiv E - U$
- Per la componente spaziale $\mathbf{p} \to -i\nabla$ $\qquad \mathbf{P} = \mathbf{p} - q\mathbf{A}$

Il paradosso di Klein†

- Poniamo $\boxed{\Psi_E(z,t) = \psi(z)e^{-iEt}}$ ⟸ solo soluzione con $E > 0$



- Consideriamo l'equazione di Klein-Gordon nel caso di un potenziale a barriera

$$A^\mu = \left(A^0, \mathbf{0}\right) \qquad qA^0 = U$$

$$\left(E - U\right)^2 \psi\left(z\right) = -\frac{d^2\psi\left(z\right)}{dz^2} + m^2\psi\left(z\right)$$

- La funzione d'onda consiste di due parti
  - a sinistra (I) un'onda incidente e una riflessa

$$\boxed{\psi_I(z) = Be^{ip\cdot z} + Ce^{-ip\cdot z}}$$

  - a destra (II) un'onda trasmessa

$$\boxed{\psi_{II}(z) = De^{ik\cdot z}}$$

- sostituendo nell'equazione $(U = 0)$

$$E^2 = p^2 + m^2$$

- sostituendo nell'equazione $(U \neq 0)$

$$\left(E - U\right)^2 = k^2 + m^2$$

- Pertanto a sinistra e a destra l'equazione è soddisfatta rispettivamente per

$$p = \pm\sqrt{E^2 - m^2}$$

- deve essere $p > 0$ (B viaggia da sx a dx)

$$k = \pm\sqrt{\left(E - U\right)^2 - m^2}$$

- il segno di k deve essere determinato

- †Landau R. – Quantum Mechanics II-A second course in quantum mechanics 2nd ed. pag. 213

Il paradosso di Klein

- **Imponendo la continuità di ψ e di $d\psi/dz$ a $z=0$ si ottiene**

$$\begin{cases} B + C = D \\ ipB - ipC = ikD \end{cases}$$

  - **Risolvendo in funzione di B**

$$C = \frac{p-k}{p+k}B \qquad D = \frac{2p}{p+k}B$$

- **Riepilogando**

$$\boxed{\Psi_E(z,t) = \psi(z)e^{-iEt}}$$

$$\boxed{\psi_I(z) = Be^{ip\cdot z} + Ce^{-ip\cdot z}} \qquad E^2 = p^2 + m^2$$

$$\boxed{\psi_{II}(z) = De^{ik\cdot z}} \qquad \left(E-U\right)^2 = k^2 + m^2$$

- **Le soluzioni normalizzabili si ottengono formando dei pacchetti d'onda**

$$\Phi(z,t) = \int g(\xi)\Psi_E(z,t)\,d\xi = \int g(\xi)\psi(z)e^{-iE(\xi)t}d\xi$$

regione I $\rightarrow \xi = p$
regione II $\rightarrow \xi = k$

  - **Come è noto, nel caso di pacchetti con una definizione del momento molto netta ($g(\xi)$ molto stretta) il pacchetto viaggia senza deformarsi con velocità di gruppo**

$$\boxed{v_g = \frac{\partial E}{\partial \xi}}$$

Il paradosso di Klein

- Calcoliamo adesso le correnti e le densità
  - La corrente è data da

$$j = \frac{1}{2im}\left(\Psi^* \frac{\partial}{\partial z}\Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial z}\Psi^* \right)$$

NB: La normalizzazione di j è quella di R. Landau e differisce da quella di Aitchison & Hey

  - Nelle due regioni otteniamo

$$\boxed{j_I = \frac{p}{m}\left(|B|^2 - |C|^2\right)}$$

$$\boxed{j_{II} = \begin{cases} \frac{k}{m}|D|^2 & k \ reale \\ 0 & k \ immaginario \end{cases}}$$

  - Analogamente la densità è data da

$$\rho = \frac{1}{2m}\left[\Psi^* \left(i\frac{\partial}{\partial t} - U \right)\Psi - \Psi\left(i\frac{\partial}{\partial t} + U \right)\Psi^* \right]$$

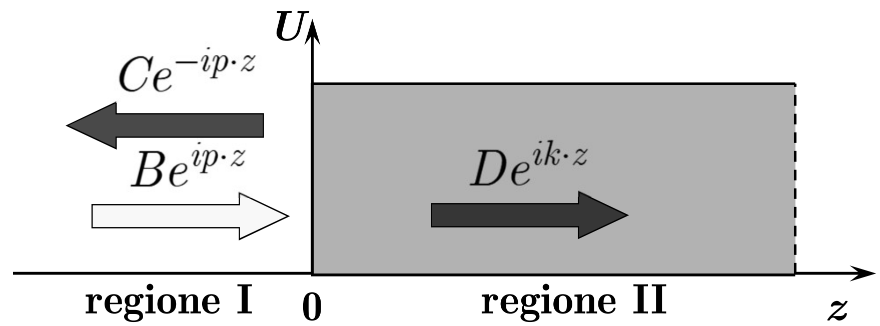
$$\rho = \frac{1}{2m}\left[\Psi^* \left(E - U \right)\Psi - \Psi\left(-E + U \right)\Psi^* \right] \qquad \rho = \frac{E-U}{m}\left|\Psi\right|^2 = \frac{E-U}{m}\left|\psi\right|^2$$

  - Nelle due regioni abbiamo

$$\boxed{\rho_I = \frac{E}{m}\left|\psi_I\right|^2} \qquad \boxed{\rho_{II} = \frac{E-U}{m}\left|\psi_{II}\right|^2}$$

Il paradosso di Klein

- Siamo ora in grado di discutere il fenomeno della collisione di una particella con la barriera U
  - B è l'ampiezza dell'onda incidente
  - C è l'ampiezza dell'onda riflessa
  - D è l'ampiezza dell'onda trasmessa



$$j_I = \frac{p}{m}\left(|B|^2 - |C|^2\right) \equiv j_i - j_r \qquad j_i = \frac{p}{m}|B|^2 \qquad j_r = \frac{p}{m}|C|^2$$

$$j_{II} = j_t = \frac{k}{m}|D|^2$$

- Dalla diapositiva 19 abbiamo

$$C = \frac{p-k}{p+k}B \qquad D = \frac{2p}{p+k}B$$

- Calcoliamo i coefficienti di riflessione e di trasmissione

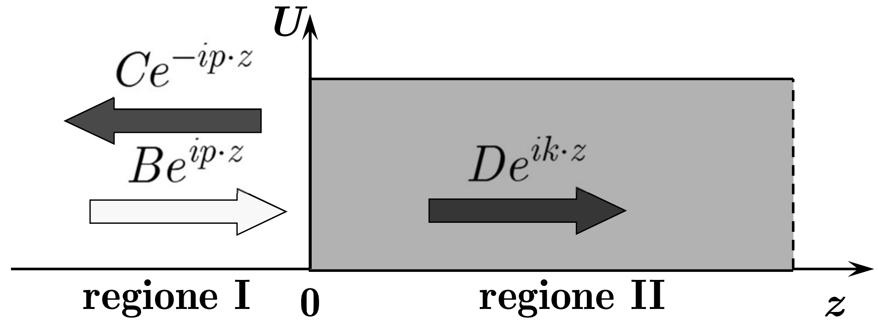
$$\mathcal{R} = \frac{j_r}{j_i} = \left|\frac{C}{B}\right|^2 = \left|\frac{p-k}{p+k}\right|^2 \qquad \mathcal{T} = \frac{j_t}{j_i} = \frac{k}{p}\left|\frac{D}{B}\right|^2 = \frac{k}{p}\left|\frac{2p}{p+k}\right|^2$$

per k reale
zero altrimenti

  - Queste formule sono sempre valide
  - Interpretiamole al variare di U

Il paradosso di Klein

- Vediamo quindi cosa succede per una fissata energia E della particella al variare dell'altezza dell'energia U
- Ricordiamo che



$$p = + \sqrt{E^2 - m^2}$$

$$k = \pm \sqrt{(E-U)^2 - m^2}$$

segno da determinare

- per U piccolo $(0 < U < E - m)$ k è reale
  - Si ha propagazione di un'onda nella regione II
  - Pertanto k deve essere positivo
    - La velocità di gruppo è positiva
    - La densità nella regione II è positiva

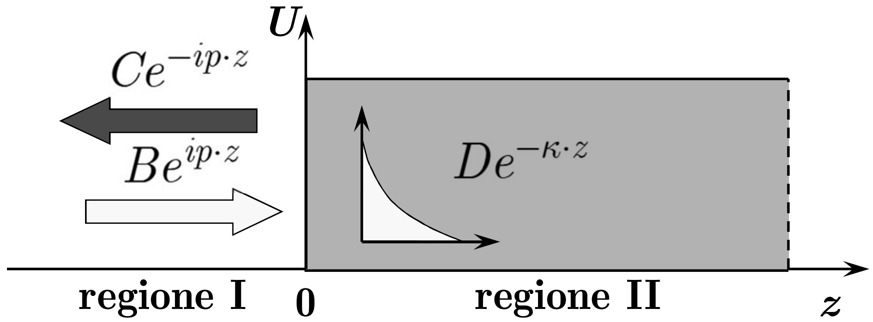
$$v_g = \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{k}{E-U}$$

$$\rho_{II} = \frac{E-U}{m}\left|\psi_{II}\right|^2$$

  - Si ha un urto del tutto analogo a quanto avveniva nella M. Q. non relativistica

$$\mathcal{R} = \frac{j_r}{j_i} = \left|\frac{p-k}{p+k}\right|^2 \qquad \mathcal{T} = \frac{j_t}{j_i} = \frac{k}{p}\left|\frac{2p}{p+k}\right|^2$$

Il paradosso di Klein



$$k = \pm\sqrt{\left(E-U\right)^2 - m^2}$$

- **Aumentando** $U\ (E-m < U < E+m)$ $\boxed{k = i\kappa \text{ diventa immaginario}}$
  - **Non si ha propagazione di onda nella regione** II
  - **La densità decresce esponenzialmente**
    - **La densità può diventare negativa ma è comunque piccola**

$$\boxed{\rho_{II} \sim e^{-|k|z}}$$

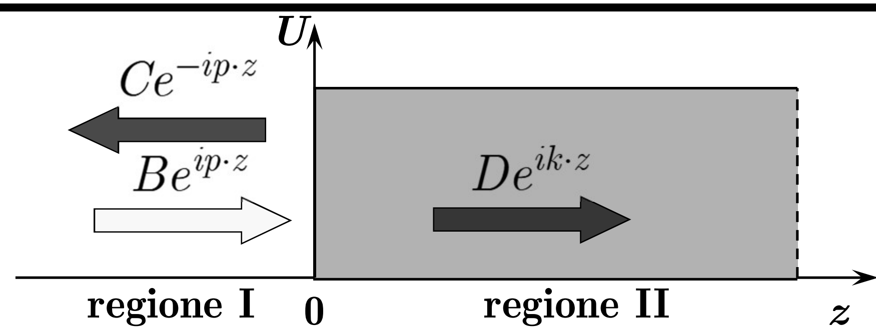
$$\boxed{\rho_{II} = \frac{E-U}{m}\left|\psi_{II}\right|^2}$$

  - **È ancora simile alla M. Q. non relativistica**

$$\mathcal{R} = \frac{j_r}{j_i} = \left|\frac{p-k}{p+k}\right|^2 = \left|\frac{p-i\kappa}{p+i\kappa}\right|^2 = 1 \qquad \mathcal{T} = \frac{j_t}{j_i} = 0$$

    - **Riflessione totale**

Il paradosso di Klein



$$k = \pm\sqrt{\left(E-U\right)^2 - m^2}$$

Trasmette un numero negativo di particelle

- Aumentando ancora U $(U > E + m)$ $\boxed{k \text{ è di nuovo reale}}$
  - Si ha di nuovo propagazione di un'onda nella regione II
    - Proibita in M.Q. non relativistica
  - La densità è negativa
  - La velocità di gruppo è

$$\boxed{\rho_{II} = \frac{E-U}{m}\left|\psi_{II}\right|^2}$$

$$\left(E-U\right)^2 = k^2 + m^2$$

$$\boxed{v_g = \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{k}{E-U}}$$

- Per mantenere l'interpretazione di un'onda che viaggia verso destra occorre scegliere $k < 0$

Riflette più di quanto incide

$$\mathcal{R} = \frac{j_r}{j_i} = \left|\frac{p-k}{p+k}\right|^2 = \left(\frac{p+|k|}{p-|k|}\right)^2 > 1 \qquad \mathcal{T} = \frac{j_t}{j_i} = \frac{k}{p}\left|\frac{2p}{p+k}\right|^2 = -\frac{4p|k|}{\left(p-|k|\right)^2} < 0$$

Meccanica Quantistica e Relatività†

- Il principio di indeterminazione di Heisenberg impone una relazione fra l'incertezza nella misura simultanea:
  - Della posizione q di una particella
  - Della sua quantità di moto p

$$\boxed{\Delta q \Delta p \geq \hbar/2}$$

- Ciascuna delle due variabili può essere misurata separatamente con precisione arbitraria purché il tempo della misura sia abbastanza lungo

- Il Principio di Relatività (ristretta) richiede che il tempo e l'energia siano entrambi la quarta componente di un quadrivettore
  - Quadrivettore posizione $\quad x^\mu = (ct, x, y, z)$
  - Quadrivettore energia/impulso $\quad p^\mu = \left(E, p_x, p_y, p_z\right)$
- La covarianza relativistica impone che tempo ed energia siano trattati analogamente alle componenti spaziali dei rispettivi 4-vettori
- Si introduce pertanto un ulteriore principio di indeterminazione

$$\boxed{\Delta E \Delta t \geq \hbar/2}$$

- †Landau, Lifshitz, Berestetskii, Pitaevskii – Quantum Electrodynamics: Introduction (§ 1.)

Meccanica Quantistica e Relatività

- Il significato di questa relazione è che
  - L'energia di un sistema può non essere esattamente definita se misurata o considerata per intervalli di tempo troppo brevi
  - Misure fatte in tempi molto brevi possono portare ad una indeterminazione dell'energia del sistema
- L'equivalenza fra massa ed energia introdotta da Einstein

$$\boxed{E = mc^2}$$

  implica che l'indeterminazione dell'energia possa manifestarsi con l'apparizione di nuove particelle, sebbene per periodi di tempo brevi (stati virtuali)
  - Inoltre l'energia stessa delle particelle può trasformarsi in nuove particelle
  - La teoria non ha più un numero costante di particelle
- Il paradosso di Klein ha inoltre mostrato che il tentativo di "localizzare" una particella con una barriera di potenziale porta all'apparizione di contraddizioni
  - Non è possibile tentare di localizzare una particella con precisione arbitraria
  - Il significato di una funzione delle coordinate va rivisto
- Per finire lo spazio e il tempo devono essere trattati allo stesso modo
  - Anche $\mathrm{r} = (x, y, z)$, come t, diventano parametri e non variabili dinamiche