
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 40 - 01.06.2023

Cenni alla teoria classica dell'elettrone

Reazione alla radiazione

Forza di Abraham-Lorentz

**Violazione della causalità e limiti
dell'elettrodinamica classica**

Anno Accademico 2022/2023

Massa elettromagnetica

- La formulazione di Maxwell dell'elettrodinamica costituisce ancora oggi uno dei maggiori risultati della fisica
 - Nell'ultimo decennio del XIX secolo i brillanti risultati della teoria indussero i fisici a pensare che l'elettromagnetismo potesse spiegare tutto
 - In particolare si arrivò a pensare che il concetto di massa proprio della meccanica potesse in realtà avere origine elettromagnetica
 - Vale la pena osservare che queste riflessioni avvenivano prima ancora della pubblicazione dell'articolo di Einstein sull'elettrodinamica dei corpi in movimento (1905)
- Pionieri degli studi sulla struttura dell'elettrone sono stati Lorentz e Abraham, ancora prima della scoperta dell'elettrone da parte di Thomson avvenuta nel 1897
 - Già prima della scoperta dell'elettrone lo stesso Thomson calcolò la massa elettromagnetica dell'elettrone
- Per parlare di massa elettromagnetica dell'elettrone occorre formulare un modello
 - Utilizzeremo il modello di Lorentz
 - L'elettrone, a riposo, è una sfera di raggio r_e e di carica totale $q_e = -e$
 - La carica è una densità superficiale $\sigma = -e/4\pi r_e^2$ sulla superficie della sfera

Massa elettromagnetica

- Calcoliamo innanzitutto l'energia associata al campo elettrostatico dell'elettrone a riposo
- Un calcolo semplice fatto agli inizi del corso
 - All'interno della sfera il campo è nullo
 - All'esterno della sfera, per $r > r_e$ si ha
- L'energia del campo è

$$\mathbf{E} = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r^2}$$

$$U_0 = \frac{\epsilon_0}{2} \int \mathbf{E}^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{r_e}^{\infty} \left(\frac{q_e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_e}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr$$

$$U_0 = \frac{1}{2} \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_e}$$

- Abbiamo già osservato che il risultato diverge per $r_e \rightarrow 0$
 - Sembra indispensabile che l'elettrone classico non sia puntiforme
- Abbiamo calcolato l'energia del campo
 - Prima della relatività ristretta non era evidente che questa potesse essere considerata un contributo alla massa a riposo

Quantità di moto dell'elettrone

- A questo punto Thomson, Lorentz, Abrahm osservano che un elettrone in movimento genera anche un campo magnetico
- Non era disponibile la relatività ristretta ma dalle equazioni di Maxwell si erano ricavati i campi di cariche in movimento
- Ad esempio i campi di una carica in moto rettilineo uniforme (vedi [208](#))

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e}{r^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \hat{\mathbf{e}}_r \quad \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e}{r^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{e}}_r$$

- Al campo dell'elettrone è associata una densità di quantità di moto $\mathbf{g}$

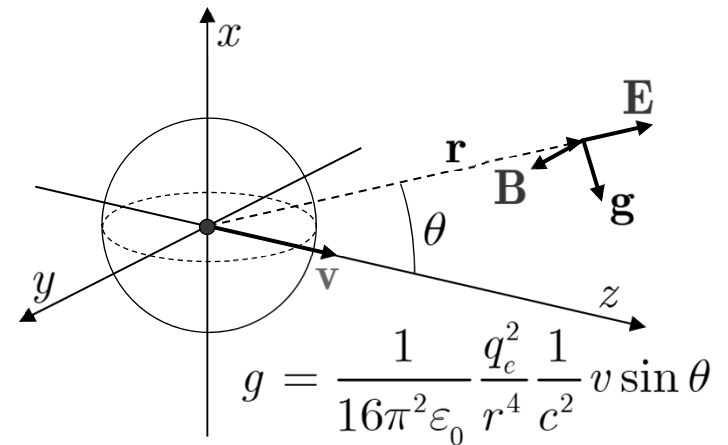
$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

- Assumiamo che la velocità sia non relativistica
- Trascuriamo i termini in v^2 (β^2)

- Il campo $\mathbf{g}$ è

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0} \frac{q_e^2}{r^4} \frac{1}{c^2} \hat{\mathbf{e}}_r \times (\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{e}}_r)$$

- $\mathbf{g}$ giace nel piano individuato dall'asse z e dal vettore $\mathbf{r}$
- Il vettore $\mathbf{g}$ forma un angolo $\pi/2 - \theta$ con l'asse z



Quantità di moto dell'elettrone

- Calcoliamo la quantità di moto del campo
- Consideriamo l'elemento di volume in figura

$$dV = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr$$

- Le componenti di $\mathbf{g}$ perpendicolari all'asse z si elidono
- Rimane la componente z di $\mathbf{g}$

$$g_z = g \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = g \sin \theta = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{q_e^2}{r^4} \frac{1}{c^2} v \sin^2 \theta$$

- Otteniamo

$$\mathbf{p} = \mathbf{v} \int \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{q_e^2}{r^4} \frac{1}{c^2} \sin^2 \theta 2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr = \frac{q_e^2}{8\pi \epsilon_0} \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \int_{r_e}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta$$

$$\mathbf{p} = \frac{q_e^2}{8\pi \epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{v}}{r_e} \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = \frac{q_e^2}{8\pi \epsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{\mathbf{v}}{r_e} \frac{4}{3}$$

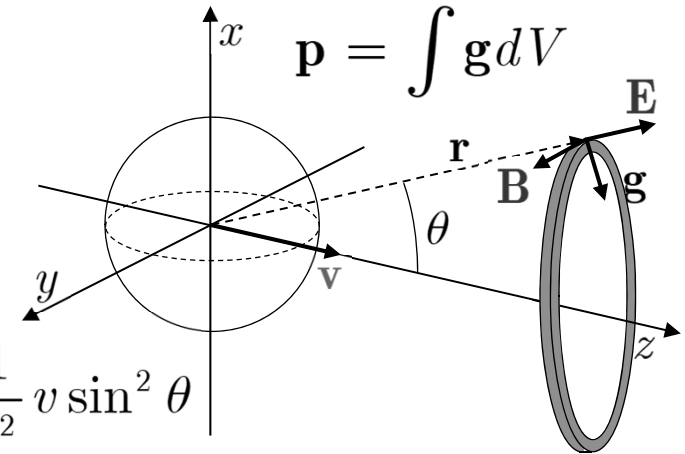
$$\boxed{\mathbf{p} = \frac{q_e^2}{6\pi \epsilon_0 r_e c^2} \mathbf{v}}$$

- Osserviamo che il campo dell'elettrone ha una quantità di moto lungo $\mathbf{v}$

- In meccanica la quantità di moto è $m\mathbf{v}$

- $U_0 = \frac{1}{2} \frac{q_e^2}{4\pi \epsilon_0 r_e}$ Possiamo definire una massa elettromagnetica

$$\boxed{m_{\text{em}} = \frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2} \quad \mathbf{p} = m_{\text{em}} \mathbf{v}}$$



Energia cinetica dell'elettrone

- Calcoliamo l'energia associata al campo di un elettrone in moto rettilineo uniforme
- Utilizziamo i campi della carica in moto

L'energia di una carica ferma era U_0

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e}{r^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \hat{\mathbf{e}}_r \quad \mathbf{B} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e}{r^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{e}}_r$$

- Approssimiamo E^2 e B^2 all'ordine β^2 (l'energia è proporzionale a v^2)

$$E^2 \approx \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{q_e^2}{r^4} [1 + (1 - 3\cos^2 \theta)\beta^2] \quad B^2 \approx \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{q_e^2}{r^4} \frac{1}{c^4} v^2 \sin^2 \theta$$

- Si verifica che l'integrale del termine in β^2 di E^2 dà contributo nullo

$$\begin{aligned} U &= \int \left(\frac{\epsilon_0}{2} \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{q_e^2}{r^4} + \frac{1}{2\mu_0} \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{q_e^2}{r^4} \frac{1}{c^4} v^2 \sin^2 \theta \right) dV \\ &= U_0 + \int \frac{1}{2\mu_0} \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{q_e^2}{r^4} \frac{1}{c^4} v^2 \sin^2 \theta dV \\ &= U_0 + \frac{1}{2} \frac{q_e^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0} \frac{v^2}{c^2} \int \frac{1}{r^4} \sin^2 \theta dV \end{aligned}$$

Energia cinetica dell'elettrone

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \frac{q_e^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0} \frac{v^2}{c^2} \int \frac{1}{r^4} \sin^2 \theta dV$$

- Utilizziamo la stessa espressione per l'elemento di volume

$$\int \frac{1}{r^4} \sin^2 \theta 2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr = \frac{2\pi}{r_e} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3} \frac{2\pi}{r_e}$$

- Inseriamo nella formula per U

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \frac{q_e^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0} \frac{v^2}{c^2} \frac{4}{3} \frac{2\pi}{r_e} = U_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \frac{q_e^2}{8\pi \varepsilon_0 r_e c^2} \right) v^2$$

- Introduciamo l'espressione già usata per m_{em}

$$m_{\text{em}} = \frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2} = \frac{4}{3} \frac{q_e^2}{8\pi \varepsilon_0 r_e c^2} \quad U = U_0 + \frac{1}{2} m_{\text{em}} v^2$$

- Osserviamo che l'energia del campo della carica in movimento è maggiore dell'energia della carica ferma
 - La differenza è interpretabile come l'energia cinetica

Teoria classica dell'elettrone

- I risultati fin qui esposti fecero nascere l'idea che la massa dell'elettrone fosse una conseguenza dell'elettromagnetismo
- Non si conoscevano particelle neutre
 - Il neutrone non era stato scoperto
- Tuttavia i fisici avevano presente che la particella avrebbe potuto avere anche una massa di origine non elettromagnetica

$$m_{\text{obs}} = m_0 + m_{\text{em}}$$

- Lorentz estese i calcoli abbandonando la restrizione di velocità piccole
 - Giunse al risultato che la quantità di moto dell'elettrone era

$$\mathbf{p} = m_{\text{em}} \gamma \mathbf{v}$$

- Da qui nacquero gli studi che portarono alle trasformazioni di Lorentz prima che Einstein introducesse la teoria della relatività ristretta
- In un primo tempo si pensò che la massa elettromagnetica variasse con la velocità ($m_{\text{em}} \gamma$) mentre la massa meccanica fosse costante
 - Furono condotti molti esperimenti in tal senso per scoprire quanta massa fosse di origine elettromagnetica e quanta no
 - I risultati naturalmente non misero in evidenza differenze

Teoria classica dell'elettrone

- Nel 1905 Einstein pubblicò il suo lavoro sulla relatività ristretta
 - Nel suo articolo Einstein stabilì punti importanti
 - La quantità di moto "meccanica" è $m\gamma v$ (contiene $m\gamma$)
 - La massa che figura nelle formule dell'energia e della quantità di moto deve essere uguale alla massa a riposo
- Nel caso dell'elettrone dovrebbe essere

$$m_{\text{em}} = \frac{U_0}{c^2} \quad \text{Ma il risultato trovato finora è} \quad m_{\text{em}} = \frac{4}{3} \frac{U_0}{c^2}$$

- Questo problema generò molta confusione per tanti anni
- Il problema si risolve con una definizione covariante degli integrali

$$U = \int \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) dV \quad \mathbf{p} = \int \mathbf{g} dV \quad \longrightarrow \quad P^\mu = \int T^{\mu\nu} d\sigma_\nu$$

- La grandezza $d\sigma_\nu$ è un elemento di iper-superficie in forma covariante
 - $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ significa forze in equilibrio $\rightarrow$ le due formulazioni coincidono
- Poincaré introduce una forza "coesiva"
 - Il guscio di carica è soggetto a una pressione che tende a farlo esplodere
 - È necessaria una pressione negativa che bilanci la pressione elettromagnetica
 - Il tensore degli stress di Poincaré
- Nel 1938 Dirac fa il calcolo covariante senza la forza coesiva

Teoria classica dell'elettrone

- Entrambe le soluzioni risolvono, in modo diverso, il problema
- Anche se il modello di Poincaré risolve il problema del fattore $4/3$ il modello non risponde più all'esigenza iniziale
 - L'esistenza di una forza non elettromagnetica che rende stabile l'elettrone implica che non sia possibile una teoria solo elettromagnetica
 - Oggi questo problema è considerato risolto[†]
 - Una definizione covariante (corretta) degli integrali che definiscono E e p elimina il fattore $4/3$
- Rimane un altro importante e fondamentale problema
- Il campo dell'elettrone esercita una forza sull'elettrone stesso?
 - In elettrostatica o per particelle in moto rettilineo uniforme abbiamo sempre assunto che non ci sia una auto-forza (self force)
 - Tuttavia l'esistenza della radiazione impone che questa forza ci sia !
- A causa della radiazione l'elettrone in moto perde energia
 - Significa che sull'elettrone viene esercitata una forza che fa lavoro e che riduce la sua energia
 - Questa forza non può essere applicata che dal campo dell'elettrone
 - La componente di radiazione del campo applica una auto-forza
 - Possiamo anche chiamarla reazione della radiazione
- [†]Rohrlich F. – The Dynamics of a Charged Sphere and the Electron – Am.J.Phys. 65, p. 11 (1997)

Teoria classica dell'eletttrone

- Il primo a trovare una espressione (approssimata) per la reazione della radiazione fu Lorentz
 - Lorentz affronto il problema di un moto accelerato ma periodico
 - Ad esempio in dipolo oscillante
- Ricordiamo la formula per la potenza irradiata da una particella accelerata
 - La formula di Larmor (vedi diapositiva **572**)

$$P = \frac{\mu_0 e^2 a^2}{6\pi c}$$

- Il lavoro (cambiato di segno) fatto dalla auto-forza sull'eletttrone deve essere uguale all'energia radiata

$$W = - \int \mathbf{F}_{\text{self}} \cdot d\mathbf{r} = \int P dt = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \int \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt$$

$$- \int \mathbf{F}_{\text{self}} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \int \left[\frac{d(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})}{dt} - \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right] dt$$

- Nell'ipotesi di un moto periodico l'integrale su un periodo del primo termine è nullo

$$\int \mathbf{F}_{\text{self}} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \int \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} dt$$

Teoria classica dell'eletttrone

$$\int \mathbf{F}_{\text{self}} \cdot \mathbf{v} dt = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \int \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} dt$$

- Possiamo uguagliare gli integrandi e otteniamo

$$\mathbf{F}_{\text{self}} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

$$\boxed{\mathbf{F}_{\text{self}} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \frac{d\mathbf{a}}{dt}}$$

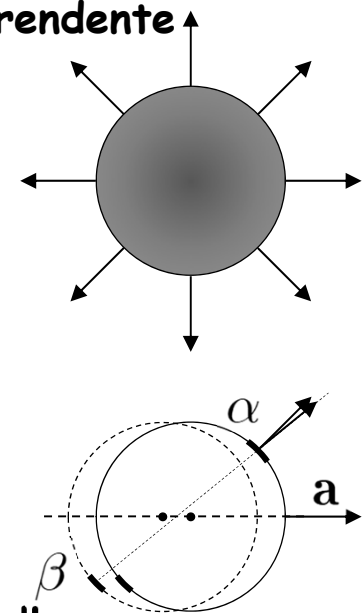
- È la famosa formula di Abraham-Lorentz per la reazione della radiazione
- L'equazione del moto di un elettrone diventa pertanto

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{self}} = m\mathbf{a} \qquad \mathbf{F}_{\text{ext}} + \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}$$

- Questa equazione ha numerosi problemi
 - È un'equazione del terzo ordine
 - Prevede moti accelerati anche per $\mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$
 - In casi particolare prevede accelerazioni prima che $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ venga applicata
 - Ad esempio per una forza a gradino
- Si tratta di soluzioni non fisiche
 - Ricordiamoci che si tratta di un'equazione approssimata

Teoria classica dell'elettrone

- A priori, che l'auto-forza sia diversa da zero è un fatto sorprendente
 - Per un elettrone fermo l'auto-forza è nulla
 - La risultante delle forze che ogni parte esercita sulle altre è nulla
- Per una carica accelerata la situazione è molto diversa
 - La forza si calcola con un campo ritardato
 - Il campo ritardato è diretto verso la posizione ritardata dell'elettrone
 - Ad esempio, nella figura, la parte β esercita una forza sulla parte α che non è diretta verso il centro istantaneo
 - Il risultato è che la risultante è diversa da zero
 - Per una carica in moto rettilineo uniforme la risultante è nulla
- Lorentz trovò anche una soluzione senza l'ipotesi di moto periodico
 - Il suo punto di partenza fu la famosa formula per la forza



$$\mathbf{F}_{\text{self}} = \int \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) dV$$

- $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono i campi ritardati prodotti dall'elettrone
- L'integrale è esteso alla sfera che utilizziamo come modello dell'elettrone

Teoria classica dell'elettrone

- Il calcolo dell'integrale è piuttosto complicato
 - Vedi ad esempio
 - Rohrlich F. - Classical Charged Particles, 3rd ed. - World Scientific 2007
 - Yaghjian A. - Relativistic Dynamics of a Charged Sphere, 2nd ed. - Springer 2006
- Lorentz trovò una soluzione tramite una serie (Rohrlich, p. 14)

$$\mathbf{F}_{\text{self}} = -\frac{1}{6\pi\epsilon_0 c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n \mathbf{a}}{c^n dt^n} \int \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^n d\mathbf{r} d\mathbf{r}'$$

- Isoliamo i primi due termini

$$\mathbf{F}_{\text{self}} = -\frac{U_0}{c^2} \mathbf{a} + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{a}} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n \mathbf{a}}{c^n dt^n} O(r_e^{n-1}) \quad U_0 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_e}$$

- L'espressione trovata per $\mathbf{F}_{\text{self}}$ dipende dalla struttura dell'elettrone
 - Escluso il termine proporzionale alla derivata di $\mathbf{a}$ tutti gli altri dipendono dalla forma specifica della distribuzione di carica ρ
- Inoltre contiene derivate dell'accelerazione a tutti gli ordini
 - È incompatibile con la meccanica che prevede un problema di secondo ordine
 - Determinato da due sole condizioni iniziali

Teoria classica dell'eletttrone

- Introduciamo esplicitamente la massa *elettromagnetica*

$$m_{\text{em}} = \frac{U_0}{c^2} \quad U_0 = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_e}$$

- Introduciamo nella formula di $\mathbf{F}_{\text{self}}$

$$\mathbf{F}_{\text{self}} = -m_{\text{em}} \mathbf{a} + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{a}} - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n \mathbf{a}}{dt^n} O(r_e^{n-1})$$

- Il problema della presenza di derivate a tutti gli ordini risulta essere attenuato per un elettrone puntiforme $r_e \rightarrow 0$
 - In tal caso tutte le derivate di $\mathbf{a}$ di ordine superiore al primo scompaiono
 - Purtroppo il termine di ordine zero diverge $m_{\text{em}} \rightarrow \infty$
- Dirac suggerì una interpretazione che oggi è accettata universalmente
 - Con l'idea di far tendere r_e a zero scriviamo l'equazione del moto

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{self}} = m_0 \mathbf{a} \quad \mathbf{F}_{\text{ext}} - m_{\text{em}} \mathbf{a} + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{a}} + O(r_e^{n-1}) = m_0 \mathbf{a}$$

- Portiamo il termine con m_{em} a secondo membro

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{a}} + O(r_e^{n-1}) = (m_0 + m_{\text{em}}) \mathbf{a}$$

Teoria classica dell'elettrone

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{a}} + O(r_e^{n-1}) = (m_0 + m_{\text{em}}) \mathbf{a}$$

- L'osservazione di Dirac è che la teoria elettromagnetica non predice la massa delle particelle
 - La situazione è così ancora oggi
 - Abbiamo inventato il meccanismo di Higgs per dare massa alle particelle
 - Ancora oggi la definizione delle masse rimane fenomenologica
 - Deve essere misurata con un esperimento
- Nella formula data l'unica espressione che ha senso è la somma $m_{\text{em}} + m_0$
 - Nessuna delle due può essere determinata dalla teoria
- Dirac suppose che entrambe fossero infinite, di segno diverso e che la loro differenza avesse un limite definito m_e
 - Il limite m_e è misurato con un esperimento
- Pertanto nel limite $r_e \rightarrow 0$ l'equazione diventa (Lorentz)

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{a}} = m_e \mathbf{a} \qquad \mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{a}}$$

- Questa procedura/interpretazione prende il nome di rinormalizzazione della massa

Teoria classica dell'elettrome

- I calcoli presentati hanno solo lo scopo di introdurre il problema
 - Una trattazione esauriente e rigorosa è molto complicata
 - Un testo moderno che tratta i problemi illustrati è
 - Lechner K. - Classical Electrodynamics. A Modern Perspective - Springer 2018
- Il cuore del problema è che le equazioni classiche divergono per una particella puntiforme

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \quad \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0 \quad J^\nu(x) = e \int \frac{dy^\nu}{d\tau} \delta^4(x - y(\tau)) d\tau$$

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = e F^{\mu\nu} u_\nu$$

- Infatti il campo $F^{\mu\nu}$ diverge sempre nella posizione di una carica puntiforme
- La rinormalizzazione utilizza il fatto che la parte divergente è il campo di velocità mentre il campo di accelerazione è finito
- Non si sa bene come separare i due contributi
- I problemi vengono risolti, con la rinormalizzazione, nell'elettrodinamica quantistica

La reazione di radiazione

- Il calcolo precedente ha prodotto un'espressione per la reazione di radiazione

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{a}}$$

- Questa formula ha diversi problemi
 - Fa diventare la legge del moto un'equazione differenziale di terzo grado
 - Sono necessarie tre condizioni iniziali
 - Presenta dei paradossi
- Paradosso 1
 - Una particella carica può essere accelerata in assenza di forze esterne

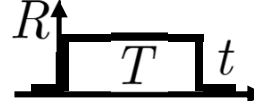
$$\mathbf{F}_{\text{ext}} + \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \dot{\mathbf{a}} = m_e \mathbf{a} \quad \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0 \quad \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 m_e c^3} \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{a}$$

- Introduciamo la costante τ $\tau = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 m_e c^3}$
- La soluzione è immediata

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\mathbf{a}}{\tau} \rightarrow \mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(0) e^{\frac{t}{\tau}}$$
 - L'accelerazione è diversa da zero e diverge a meno di imporre $\mathbf{a}(0) = 0$
 - Alternativamente si può richiedere che $\mathbf{a}(\infty) = 0$

La reazione di radiazione

- Anche se si fa la richiesta precedente rimangono anomalie
- Paradosso 2
 - Esaminiamo il caso in cui la forza esterna è diversa da zero

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{F}_0 R(t)$$


- Matematicamente la soluzione dell'equazione è semplice
 - Si veda ad esempio il problema 11.19 del libro di Griffiths
 - Si dimostra che l'accelerazione è continua
 - Proiettando nella direzione di $\mathbf{F}_0$ la soluzione è
- La soluzione è diversa da zero per $t < 0$

- Pre-accelerazione
- La soluzione diverge per $t \rightarrow \infty$
- La terza costante B può essere utilizzata per eliminare uno solo di questi due paradossi

$$B = -\frac{F_0}{m_e} \quad B = -\frac{F_0}{m_e} e^{-T/\tau}$$

$$a(t) = \begin{cases} \left[\frac{F_0}{m_e} + B \right] e^{t/\tau} & t \leq 0 \\ \frac{F_0}{m_e} + B e^{t/\tau} & 0 < t \leq T \\ \left[\frac{F_0}{m_e} e^{-T/\tau} + B \right] e^{t/\tau} & t \geq T \end{cases}$$

- Ovviamente non possiamo curarli entrambi

La reazione di radiazione

- Scegliamo di eliminare la divergenza all'infinito

$$B = -\frac{F_0}{m_e} e^{-T/\tau}$$

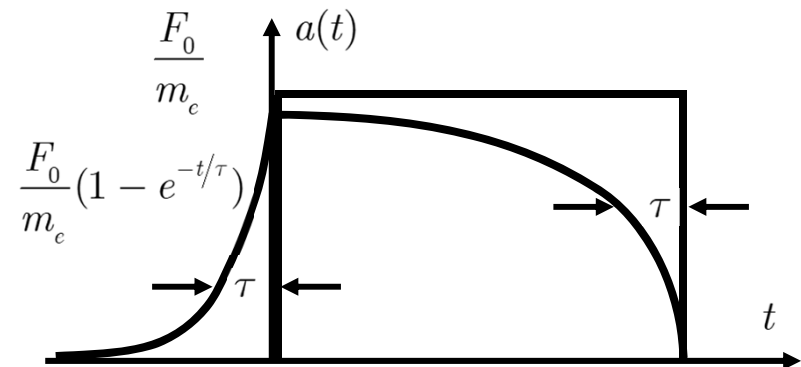
- La soluzione diventa
- Graficamente
 - La curva blu è l'accelerazione di una particella senza carica che non emette radiazione
- Osservazioni
 - Il tempo τ è molto piccolo

$$\tau = 6 \cdot 10^{-24} \text{ s}$$

$$c\tau = 1.8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

- Il tempo in cui si estende la pre-accelerazione è dell'ordine di τ
- Per $T \gg \tau$ la forma dell'accelerazione è quella del rettangolo $R(t)$

$$a(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{m_e} \left[1 - e^{-T/\tau} \right] e^{t/\tau} & t \leq 0 \\ \frac{F_0}{m_e} \left[1 - e^{(t-T)/\tau} \right] & 0 < t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$



Limiti dell'elettrodinamica classica

- Ad oggi non è stata trovata una formula per la forza della reazione della radiazione che risolva il problema che abbiamo illustrato
- Non siamo in grado di calcolare perturbativamente la forza di reazione alla radiazione
- D'altro canto la discussione precedente ha messo in evidenza che questa contraddizione si raggiunge per tempi dell'ordine di $6 \cdot 10^{-24}$ s
- La meccanica quantistica integrata con la relatività (Quantum Field Theory) prevede che ci sia una relazione di indeterminazione anche per $E - t$

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta E \sim \frac{\hbar}{2\tau} = \frac{6.58 \cdot 10^{-16}}{2 \cdot 6 \cdot 10^{-24}} = 0.55 \cdot 10^8 \text{ eV} \approx 100 m_e$$

- Il significato di questa relazione è che su quella scala temporale possono avvenire violazioni della conservazione dell'energia dell'ordine indicato
 - Si parla di fotoni e di conversione di fotoni in particelle ($E = mc^2$)
 - Il vuoto non è più vuoto (vacuum polarization)
- In pratica, alla scala temporale in cui l'elettrodinamica classica mostra problemi siamo ormai in regime fortemente quantistico

L'elettrodinamica Classica diventa Elettrodinamica Quantistica (QED)

Una teoria di campo quantistica

Conclusione

- Abbiamo studiato i fenomeni dell'elettromagnetismo partendo dalle evidenze sperimentali del secolo XIX
- Abbiamo formalizzato la teoria seguendo Maxwell e costruendo l'elettrodinamica, una teoria di campo (classica)
 - Abbiamo introdotto e studiato il concetto di campo, centrale nella fisica moderna
- L'interazione del campo con la materia (particelle cariche) è determinata da leggi sperimentali (Forza di Lorentz)
 - La tecnologia che ci circonda è permeata dall'elettromagnetismo
- L'elettrodinamica non ha bisogno della relatività per essere formulata
 - I potenziali ritardati sono la soluzione delle equazioni differenziali
 - Permettono di calcolare i campi di particelle in movimento
 - Da questi studi sono state formulate le trasformazioni di Lorentz
 - Dalle riflessioni sull'elettrodinamica dei corpi in movimento è nata la Relatività ristretta
- Le equazioni di campo prevedono le onde elettromagnetiche
 - La luce è un fenomeno elettromagnetico
- Le soluzioni delle equazioni di campo non omogenee portano allo studio della radiazione
 - L'elettrodinamica è uno dei più grandi risultati dell'intelletto umano