
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 39 – 30.05.2023

Funzioni di Green per l'equazione
di Poisson e per l'equazione dell'onda
Potenziali ritardati
Sistemi di unità di misura

Anno Accademico 2022/2023

Equazione di Poisson: funzione di Green ***

- Sappiamo che il potenziale elettrostatico obbedisce all'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$

- La funzione di Green dell'equazione di Poisson è definita dall'equazione

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

- Una soluzione particolare dell'equazione è data da

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv'$$

- Infatti

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0} \nabla_{\mathbf{r}}^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv' = - \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$$

- La soluzione del problema si trova sommando una soluzione ϕ_c dell'equazione di Laplace scelta in modo tale che $\Phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) + \phi_c(\mathbf{r})$ soddisfi le condizioni al contorno

$$\nabla^2 \phi_c(\mathbf{r}) = 0 \qquad \Phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) + \phi_c(\mathbf{r}) \qquad \nabla^2 \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r})$$

Equazione di Poisson: funzione di Green ***

- Ritorniamo alla definizione della funzione di Green

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

- Notiamo che il secondo membro è funzione solo di $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$
- Anche $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ deve dipendere solo dalla differenza $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \equiv G(\mathbf{r})$$

- La soluzione si trova facilmente con la trasformata di Fourier

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{G}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{q} \quad \delta^3(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{q}$$

- L'equazione diventa

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int -\mathbf{q}^2 \tilde{G}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{q} = -\delta^3(\mathbf{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{q}$$

- Uguagliando gli integrandi otteniamo

$$\mathbf{q}^2 \tilde{G}(\mathbf{q}) = 1 \quad \tilde{G}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\mathbf{q}^2}$$

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{\mathbf{q}^2} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{q}$$

Equazione di Poisson: funzione di Green ***

- Nel seguito poniamo $|\mathbf{q}| = q$ e $|\mathbf{r}| = r$
- Passiamo alle coordinate sferiche
- Integriamo sull'angolo solido

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{q^2} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{q}$$

$$\begin{aligned} G(r) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{q^2} e^{iqr \cos \theta} 2\pi d \cos \theta q^2 dq = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dq \int_{-1}^{+1} e^{iqr \cos \theta} d \cos \theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dq \left[\frac{e^{iqr \cos \theta}}{iqr} \right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dq \frac{e^{+iqr} - e^{-iqr}}{iqr} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dq \frac{2i \sin qr}{iqr} = \frac{2}{(2\pi)^2 r} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$G(r) = \frac{1}{4\pi r}$$

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

- La soluzione particolare dell'equazione di Poisson è pertanto

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0} d\mathbf{r}' \qquad \Phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

Potenziale ritardato: funzione di Green ***

- Abbiamo ricavato (vedi diapositiva [515](#)) le equazioni dei potenziali elettrodinamici in forma covariante

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \square A^\nu = \mu_0 J^\nu$$

- In notazione più esplicita, per le componenti A^μ

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A^\mu}{\partial t^2} - \nabla^2 A^\mu = \mu_0 j^\mu \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A^\mu = -\mu_0 j^\mu$$

- Definiamo la funzione di Green (ricordiamo che $x_0 = ct$)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \nabla^2 \right) G(x - x') = \delta^4(x - x') \quad A^\mu(x) = \mu_0 \int G(x - x') j^\mu(x') d^4x'$$

- Ricordiamo che si tratta di una soluzione particolare
- La soluzione generale si trova sommando una soluzione $A_0^\mu(x)$ dell'equazione omogenea in modo che siano rispettate le condizioni al contorno

$$\square A_0^\mu(x) = 0 \quad A^\mu(x) = A_0^\mu(x) + \mu_0 \int G(x - x') j^\mu(x') d^4x'$$

- Spesso si impone una condizione asintotica

$$A^\mu(x) = A_{\text{in}}^\mu(x) + \mu_0 \int G(x - x') j^\mu(x') d^4x' \quad \lim_{x_0 \rightarrow \pm\infty} A^\mu(x) = A_{\text{in}}^\mu(x)$$

- Pertanto

$$\lim_{x_0 \rightarrow \pm\infty} \int G(x - x') j^\mu(x') d^4x' \rightarrow 0$$

Funzioni di Green: Campo Elettromagnetico ***

- Inoltre è necessario definire le condizione al contorno per $G(x - x')$
 - Una soluzione dell'equazione non omogenea è

$$A^\mu(x) = \mu_0 \int G(x - x') j^\mu(x') d^4 x'$$

- Normalmente si richiede la causalità
 - La richiesta di causalità impone che contribuiscano solo i valori di $j^\mu(x')$ per tempi x'^0 precedenti al tempo x^0 in cui è valutato $A^\mu(x)$
 - Occorre pertanto che sia $G(x - x') = 0$ per $x^0 - x'^0 < 0$
- Tuttavia le condizioni asintotiche precedenti possono richiedere altre condizioni

$$\lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \int G(x - x') j^\mu(x') d^4 x' \rightarrow 0 \quad \longrightarrow \quad G(x - x') = 0 \quad x_0 - x'_0 > 0$$

- La condizione asintotica per $x_0 \rightarrow -\infty$ coincide con la condizione di causalità
- Le funzioni di Green (diverse) che si ottengono nei due casi hanno un nome
 - La funzione di Green ritardata

$$G_{\text{ret}}(x - x') = 0 \quad x_0 - x'_0 < 0$$

- La funzione di Green anticipata

$$G_{\text{adv}}(x - x') = 0 \quad x_0 - x'_0 > 0$$

- Nonostante la seconda possa apparire priva di senso fisico sono entrambe molto importanti e usate

Funzioni di Green: Campo Elettromagnetico ***

- Calcoliamo la funzione di Green dell'equazione dell'onda non omogenea
 - Poniamo $q^0 = \omega$ $q^2 = \omega^2 - \mathbf{q}^2$ $|\mathbf{q}| = k$ $c = 1$
 - Utilizzando le trasformate di Fourier, analogamente a quanto fatto per l'equazione di Poisson si trova

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \tilde{G}(q) e^{iq \cdot x} d^4 q \quad \delta^4(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{iq \cdot x} d^4 q$$

- Inserendo nell'equazione

$$\square G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int q^2 \tilde{G}(q) e^{iq \cdot x} d^4 q = \delta^4(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{iq \cdot x} d^4 q$$

- Uguagliando gli integrandi

$$-q^2 \tilde{G}(q) = 1 \quad \longrightarrow \quad \tilde{G}(q) = -\frac{1}{q^2} = -\frac{1}{\omega^2 - \mathbf{q}^2} = -\frac{1}{\omega^2 - k^2}$$

- La presenza del segno meno nel denominatore avrà importanti conseguenze
- Nel dominio della variabile x

$$G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{q^2} e^{iq \cdot x} d^4 q$$

Funzioni di Green: Campo Elettromagnetico ***

- Anticipiamo il risultato finale

$$G(x - x') = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta \left[c \left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \right]$$

- Osserviamo che la parte spaziale coincide con quella trovata per l'equazione di Poisson
- La parte temporale implica invece che il campo al tempo t è determinato dalla corrente al tempo precedente

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$$

- Svolgiamo il calcolo (ricordiamo che abbiamo posto $c = 1$)

$$G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{q^2} e^{iq \cdot x} d^4 q = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-iq \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{q} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega^2 - k^2} e^{i\omega t} d\omega$$

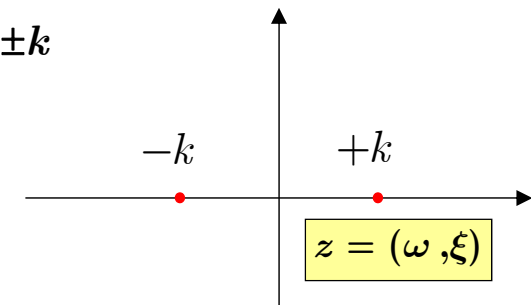
- Iniziamo con l'integrazione della componente temporale $d\omega$

- Introduciamo la variabile complessa $z = (\omega, \xi)$

- Nel piano z il denominatore ha due poli $\omega_{\pm} = \pm |\mathbf{q}| = \pm k$

- L'integrale diverge: ha due poli sull'asse ω

- Per dare un significato all'integrale occorre interpretarlo come valore principale e definire come trattare le singolarità



Funzioni di Green: Campo Elettromagnetico ***

- Ci sono 2 poli. Utilizziamo il metodo dei residui

- Chiudiamo il cammino con una circonferenza

- Per $t < 0$ chiudiamo nel semipiano inferiore

$$e^{izt} = e^{itR \cos \theta} e^{i(iR \sin \theta)t} = e^{itR \cos \theta} e^{-tR \sin \theta} \rightarrow 0 \quad R \rightarrow \infty$$

- Abbiamo visto che per la causalità è necessario che $G(x - x') = 0$ per $t = x^0 - x'^0 < 0$

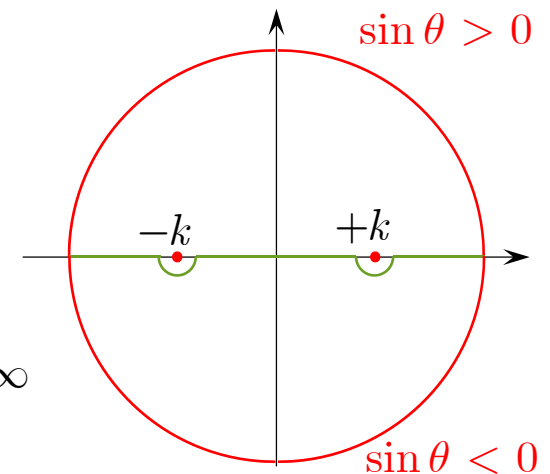
- Pertanto evitiamo le singolarità con un cammino che lasci i poli all'esterno affinché l'integrale sia nullo

- Per $t > 0$ chiudiamo nel semipiano superiore

$$e^{izt} = e^{itR \cos \theta} e^{i(iR \sin \theta)t} = e^{itR \cos \theta} e^{-tR \sin \theta} \rightarrow 0 \quad R \rightarrow \infty$$

- L'integrale è uguale alla somma dei residui

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - k^2} d\omega$$



$$z = R(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \dots = (\omega - k) \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - k^2} \Big|_{\omega=k} + (\omega + k) \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - k^2} \Big|_{\omega=-k} = \frac{e^{+ikt}}{2k} - \frac{e^{-ikt}}{2k}$$

- In conclusione

$$f(t) = 2\pi i \left[\frac{e^{+ikt}}{2k} - \frac{e^{-ikt}}{2k} \right] \Theta(t)$$

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Funzioni di Green: Campo Elettromagnetico ***

- Pertanto la funzione di Green è adesso data dall'integrale (ricordiamo $k = |\mathbf{q}|$)

$$G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{q} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega^2 - k^2} e^{i\omega t} d\omega = -\frac{2\pi i}{(2\pi)^4} \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{q} \left[\frac{e^{+ikt}}{2k} - \frac{e^{-ikt}}{2k} \right] \Theta(t)$$

- Anche in questo caso passiamo alle coordinate sferiche

$$d^3\mathbf{q} = 2\pi d \cos \theta k^2 dk$$

- Per semplicità omettiamo per il momento $\Theta(t)$

$$\begin{aligned} G(x) &= -\frac{2\pi i}{(2\pi)^4} \int e^{-ikr \cos \theta} \left[\frac{e^{+ikt}}{2k} - \frac{e^{-ikt}}{2k} \right] 2\pi d \cos \theta k^2 dk \\ &= -\frac{(2\pi)^2 i}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \frac{e^{+ikt} - e^{-ikt}}{2} k dk \int_{-1}^{+1} e^{-ikr \cos \theta} d \cos \theta \\ &= -\frac{(2\pi)^2 i}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \frac{e^{+ikt} - e^{-ikt}}{2} k dk \frac{e^{-ikr} - e^{+ikr}}{-ikr} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{(e^{+ikt} - e^{-ikt}) (e^{+ikr} - e^{-ikr})}{2} dk \end{aligned}$$

Funzioni di Green: Campo Elettromagnetico ***

$$\begin{aligned} G(x) &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{(e^{+ikt} - e^{-ikt})(e^{+ikr} - e^{-ikr})}{2} dk \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2r} \int_0^\infty \left[e^{ik(t+r)} - e^{ik(t-r)} - e^{-ik(t-r)} + e^{-ik(t+r)} \right] dk \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2r} \left[\int_0^\infty \left[e^{ik(t+r)} - e^{ik(t-r)} \right] dk + \int_0^\infty \left[e^{-ik(t+r)} - e^{-ik(t-r)} \right] dk \right] \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2r} \left[\int_0^\infty \left[e^{ik(t+r)} - e^{ik(t-r)} \right] dk + \int_{-\infty}^0 \left[e^{ik(t+r)} - e^{ik(t-r)} \right] dk \right] \\ &= -\frac{1}{(2\pi)} \frac{1}{2r} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(t+r)} dk - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(t-r)} dk \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi r} \left[\delta(t+r) - \delta(t-r) \right] \\ \bullet \text{ Reintroduciamo } \Theta(t) \quad G(x) &= -\frac{1}{4\pi r} \left[\delta(t+r) - \delta(t-r) \right] \Theta(t) \end{aligned}$$

Funzioni di Green: Campo Elettromagnetico ***

- Ricordiamo che
$$G(r, t) = -\frac{1}{4\pi r} [\delta(t + r) - \delta(t - r)] \Theta(t)$$
- $$r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad t \rightarrow x^0 - x'^0 = ct - ct'$$
- La funzione $\Theta(x)$ è nulla per $x < 0$ ovvero per $t - t' < 0$
- Possiamo quindi ignorare la prima funzione $\delta(t+r)$ il cui argomento non è mai nullo

- Reintroduciamo c
$$G_{\text{ret}}(r, t) = -\frac{1}{4\pi r} [-\delta(ct - r)]$$
- In conclusione, con $t \rightarrow t - t'$
$$G_{\text{ret}}(r, t - t') = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(ct - ct' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$$

- Abbiamo calcolato la funzione di Green ritardata

$$G_{\text{ret}}(r, t) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{1}{c} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)$$

- Notiamo che l'argomento della funzione $\delta()$ si annulla quando

$$t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \equiv t_r$$

Potenziali ritardati: soluzioni

- Possiamo adesso scrivere la soluzione per l'equazione del potenziale $\square A^\nu = \mu_0 J^\nu$

$$A^\mu(x) = \mu_0 \int G_{\text{ret}}(x - x') j^\mu(x') d^4 x'$$

- Introduciamo G_{ret}

$$G_{\text{ret}}(r, t) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{1}{c} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)$$

- Otteniamo

$$A^\mu(x) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) j^\mu(x') c dt'$$

- L'integrale su t' è immediato

- Nell'espressione di j^μ t' viene sostituito da t_r

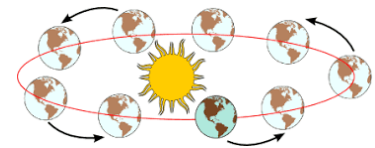
$$t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$$

- Il risultato è

$$A^\mu(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j^\mu(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}'$$

Il Sistema Internazionale SI

- Per definire le grandezze fondamentali (spazio, tempo, massa) c'è stata una evoluzione delle metodologie
- Il problema è gestito da organizzazioni internazionali fra le quali la più nota è la *Conférence générale des poids et mesures*
- **Storicamente**
 - L'unità di misura del tempo è il secondo
 - Il secondo era definito sulla base della lunghezza dell'anno terrestre
 - L'unità di misura delle lunghezze è il metro
 - Il metro era definito per confronto con il metro campione, un manufatto conservato a Sèvres
 - L'unità di misura della massa è il chilogrammo
 - Il chilogrammo era definito per confronto con la massa campione, un manufatto conservato a Sèvres
- In tempi più recenti si è passati a definire le unità di misura in funzione di fenomeni più facilmente controllabili o di costanti fondamentali
- **Secondo**
 - **Unità di misura del tempo**
 - **Nel 1967 la 13^a Conférence générale des poids et mesures lo ha definito come la durata di 9 192 631 770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra due livelli dell'atomo di Cesio-133**



Il Sistema Internazionale SI

- Velocità della luce

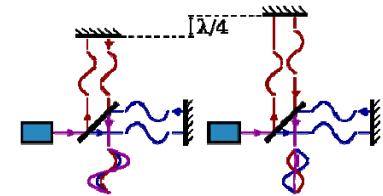
- È una costante universale
- Il suo valore è per definizione (quindi esatto)

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

- Metro

- Unità di misura dello spazio
- Nel 1983 la 17^a *Conférence générale des poids et mesures* lo ha definito in funzione della velocità della luce come distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo pari a

$$\Delta t = 1/299\,792\,458 \text{ s}$$



- Costante di Planck

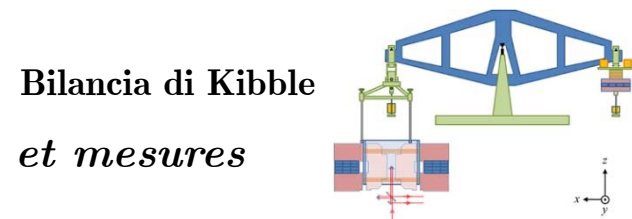
- È una costante universale
- Il suo valore è per definizione (quindi esatto)

$$h = 6.626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

- Chilogrammo

- Unità di misura della massa
- Nel 2018 la 26^a *Conférence générale des poids et mesures* lo ha definito come la massa equivalente all'energia di un fotone di frequenza

$$\nu = 1.356\,392\,489\,652 \times 10^{50}$$



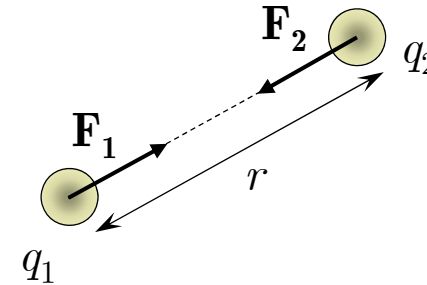
- Nel sistema MKS le unità sono metro, chilogrammo, secondo
- Nel sistema CGS le unità sono centimetro, grammo, secondo

Forza elettrica e forza magnetica

• Forza elettrica

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad F_e = |\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2|$$

$$F_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} = q_2 E \quad E = k_e \frac{q_1}{r^2}$$



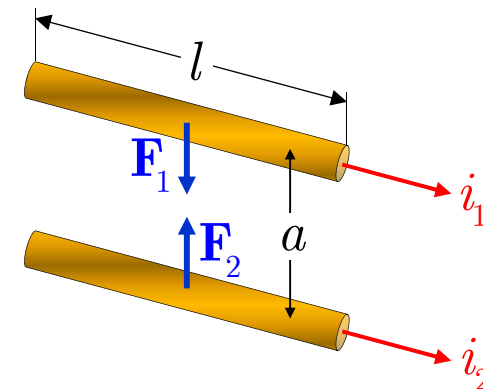
• Fissare la costante k_e determina

- Le dimensioni della carica elettrica e del campo elettrico
- Le unità di misura della carica elettrica e del campo elettrico

• Forza magnetica

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad F_m = |\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2|$$

$$F_m = 2k_m \frac{i_1 i_2}{d} l \quad B = 2k_m \alpha \frac{i_1}{d}$$



• Fissare la costante k_m determina

- Le dimensioni della corrente elettrica
- Le unità di misura della corrente elettrica

• Ruolo della costante α

- Permette di definire indipendentemente scala e unità di B rispetto a E
- Ci ritorneremo fra poco

Le unità di misura elettromagnetiche

- Carica elettrica e corrente elettrica non sono indipendenti

$$i = \frac{dq}{dt}$$

- Poiché le cariche e le correnti sono collegate, le dimensioni del rapporto fra le due costanti k_e e k_m risulta determinato

$$F_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad F_m = 2k_m \frac{i_1 i_2}{d} l \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{k_e}{k_m} \right] = \left[\frac{r^2}{q^2} \right] [i_1 i_2] = L^2 T^{-2}$$

- È il quadrato di una velocità
- In realtà la natura fissa anche il valore numerico del rapporto

- Assumiamo un valore unitario per i_1 e i_2

- Otteniamo $q_1 = i_1 \cdot \Delta t$ e $q_2 = i_2 \cdot \Delta t$ con $\Delta t = 1 \text{ s}$

- Il risultato sperimentale è che il rapporto fra le due forze è uguale al quadrato della velocità della luce

$$\frac{k_e}{k_m} = c^2$$

- A questo punto fissare una delle due costanti k determina

- Il valore dell'altra costante k

- Le scale di unità con cui misurare le sorgenti e le loro dimensioni

- Nel Sistema Internazionale SI si fissa il valore di k_m $k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$

Le unità di misura elettromagnetiche

- In linea di principio le tre costanti k_e , k_m e α sono sufficienti
 - La legge di Faraday ha bisogno di una costante in dipendenza delle dimensioni scelte per il campo $\mathbf{E}$ e per il campo $\mathbf{B}$
 - In pratica, per determinare i valori delle costanti, è utile introdurre una ulteriore costante (ridondante)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Scriviamo le equazioni Maxwell con le definizioni fin qui adottate

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k_e \rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \alpha k_m \mathbf{J} + \frac{k_m \alpha}{k_e} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Abbiamo visto che da queste equazioni si può ricavare l'equazione di propagazione delle onde elettromagnetiche

- Con le definizioni adottate si ottiene

Come dicevamo k_3 è ridondante

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{k_m}{k_e} k_3 \alpha \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \qquad \frac{k_m}{k_e} = \frac{1}{c^2} \qquad k_3 \alpha = 1 \qquad k_3 = \frac{1}{\alpha} \qquad \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Sistemi a confronto

- Un'ultima scelta è dove avere il fattore 4π
 - Nelle equazioni di Maxwell: sistema non razionalizzato
 - Nelle equazioni della forza: sistema razionalizzato
- Come abbiamo detto nel sistema SI si fissa $k_m = 10^{-7} \text{ MLT}^{-2}\text{I}^{-2}$

Sistema	k_e	k_m	α	k_3
SI	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2$	$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$	1	1

- Nel sistema SI $[k_e] = \text{ML}^3\text{T}^{-4}\text{I}^{-2}$ $[k_m] = \text{MLT}^{-2}\text{I}^{-2}$

Sistemi a confronto

- Un'ultima scelta è dove avere il fattore 4π
 - Nelle equazioni di Maxwell: sistema non razionalizzato
 - Nelle equazioni della forza: sistema razionalizzato
- Come abbiamo detto nel sistema SI si fissa $k_m = 10^{-7} \text{ MLT}^{-2}\text{I}^{-2}$

Sistema	k_e	k_m	α	k_3
SI	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2$	$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$	1	1
Gaussiano	1	c^{-2}	c	c^{-1}
Heaviside	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi} c^{-2}$	c	c^{-1}
Lorentz	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi} c^{-2}$	c	c^{-1}
Elettrostatico (esu)	1	c^{-2}	1	1
Elettrostatico (emu)	c^2	1	1	1

- Nel sistema SI $[k_e] = \text{ML}^3\text{T}^{-4}\text{I}^{-2}$ $[k_m] = \text{MLT}^{-2}\text{I}^{-2}$

Sistemi a confronto

• Equazioni di Maxwell e forza di Lorentz

Sistema	D, H	Equazioni di Maxwell				Lorentz
SI	$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$
Gaussiano	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$q\mathbf{E} + q \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$
Heaviside Lorentz	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$q\mathbf{E} + q \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$

Sistemi a confronto

Table 2 Definitions of ϵ_0 , μ_0 , $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, Macroscopic Maxwell Equations, and Lorentz Force Equation in Various Systems of Units

Where necessary the dimensions of quantities are given in parentheses. The symbol c stands for the velocity of light in vacuum with dimensions (lt^{-1}).

System	ϵ_0	μ_0	$\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$	Macroscopic Maxwell Equations	Lorentz Force per Unit Charge
Electrostatic (esu)	1	c^{-2} (t^2l^{-2})	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = c^2\mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$
Electromagnetic (emu)	c^{-2} (t^2l^{-2})	1	$\mathbf{D} = \frac{1}{c^2}\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$
Gaussian	1	1	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$
Heaviside-Lorentz	1	1	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$
SI	$\frac{10^7}{4\pi c^2}$ ($I^2t^4m^{-1}l^{-3}$)	$4\pi \times 10^{-7}$ ($mlI^{-2}t^{-2}$)	$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

Convertire da SI a sistema Gauss

- Considerare l'equazione SI
 - Sostituire le grandezze elettriche con l'espressione della tabella
 - Trasformare le potenze di $\epsilon_0\mu_0$ nelle corrispondenti potenze di c

Quantity	Gaussian	SI
Velocity of light	c	$(\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$
Electric field (potential, voltage)	$\mathbf{E}(\Phi, V)/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$	$\mathbf{E}(\Phi, V)$
Displacement	$\sqrt{\epsilon_0/4\pi} \mathbf{D}$	$\mathbf{D}$
Charge density (charge, current density, current, polarization)	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} \rho(q, \mathbf{J}, I, \mathbf{P})$	$\rho(q, \mathbf{J}, I, \mathbf{P})$
Magnetic induction	$\sqrt{\mu_0/4\pi} \mathbf{B}$	$\mathbf{B}$
Magnetic field	$\mathbf{H}/\sqrt{4\pi\mu_0}$	$\mathbf{H}$
Magnetization	$\sqrt{4\pi/\mu_0} \mathbf{M}$	$\mathbf{M}$
Conductivity	$4\pi\epsilon_0\sigma$	σ
Dielectric constant	$\epsilon_0\epsilon$	ϵ
Magnetic permeability	$\mu_0\mu$	μ
Resistance (impedance)	$R(Z)/4\pi\epsilon_0$	$R(Z)$
Inductance	$L/4\pi\epsilon_0$	L
Capacitance	$4\pi\epsilon_0 C$	C

Convertire da SI a sistema Gauss

- Esempi

- Forza fra due fili

$$F = \mu_0 \frac{i_1 i_2}{2\pi a} l$$

$$i \rightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0} i$$

$$F = \mu_0 \frac{i_1 i_2}{2\pi a} l \rightarrow F = \mu_0 \frac{\sqrt{4\pi\epsilon_0} i_1 \sqrt{4\pi\epsilon_0} i_2}{2\pi a} l = \frac{1}{c^2} \frac{2 i_1 i_2}{a} l$$

- Campo magnetico del filo infinito

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{\hat{\mathbf{e}}_\phi}{r}$$

$$B \rightarrow \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} \quad i \rightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0} i$$

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \sqrt{4\pi\epsilon_0} i \frac{\hat{\mathbf{e}}_\phi}{r} \rightarrow \mathbf{B} = \frac{2}{c} i \frac{\hat{\mathbf{e}}_\phi}{r}$$