Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 39 – 30.05.2023

Funzioni di Green per l'equazione di Poisson e per l'equazione dell'onda
Potenziali ritardati
Sistemi di unità di misura

Anno Accademico 2022/2023

Equazione di Poisson: funzione di Green ***

- Sappiamo che il potenziale elettrostatico obbedisce all'equazione di Poisson

$$\nabla^2\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_o}\rho\left(\mathbf{r}\right)$$

- La funzione di Green dell'equazione di Poisson è definita dall'equazione

$$\nabla^2 G\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right) = -\delta^3\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)$$

  - Una soluzione particolare dell'equazione è data da

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')dv'$$

  - Infatti

$$\nabla^2_{\mathbf{r}}\phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0}\nabla^2_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')dv' = -\int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_0}\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dv' = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$$

  - La soluzione del problema si trova sommando una soluzione ϕ_c dell'equazione di Laplace scelta in modo tale che $\Phi(\mathrm{r}) = \phi(\mathrm{r}) + \phi_c(\mathrm{r})$ soddisfi le condizioni al contorno

$$\nabla^2\phi_c(\mathbf{r}) = 0 \qquad \Phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}) + \phi_c(\mathbf{r}) \qquad \nabla^2\Phi = -\frac{1}{\varepsilon_o}\rho\left(\mathbf{r}\right)$$

Equazione di Poisson: funzione di Green ***

- Ritorniamo alla definizione della funzione di Green

$$\nabla^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

  - Notiamo che il secondo membro è funzione solo di $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$
  - Anche $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ deve dipendere solo dalla differenza $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \equiv G(\mathbf{r})$$

- La soluzione si trova facilmente con la trasformata di Fourier

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \widetilde{G}(\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d^3\mathbf{q} \qquad \delta^3(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d^3\mathbf{q}$$

  - L'equazione diventa

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int -\mathbf{q}^2\widetilde{G}(\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d^3\mathbf{q} = -\delta^3(\mathbf{r}) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d^3\mathbf{q}$$

- Uguagliando gli integrandi otteniamo

$$\mathbf{q}^2\widetilde{G}(\mathbf{q}) = 1 \qquad \widetilde{G}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\mathbf{q}^2} \qquad \boxed{G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{\mathbf{q}^2}e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d^3\mathbf{q}}$$

Equazione di Poisson: funzione di Green ***

- Nel seguito poniamo $|\mathbf{q}| = q$ e $|\mathbf{r}| = r$
  - Passiamo alle coordinate sferiche
    - Integriamo sull'angolo solido

$$\boxed{G(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{\mathbf{q}^2} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{q}}$$

$$G(r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{1}{q^2} e^{iqr\cos\theta} 2\pi d\cos\theta q^2 dq = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dq \int_{-1}^{+1} e^{iqr\cos\theta} d\cos\theta$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dq \left[\frac{e^{iqr\cos\theta}}{iqr}\right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dq \frac{e^{+iqr} - e^{-iqr}}{iqr}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dq \frac{2i\sin qr}{iqr} = \frac{2}{(2\pi)^2 r}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}}$$

$$G(r) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r} \qquad \boxed{G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}$$

- La soluzione particolare dell'equazione di Poisson è pertanto

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{\rho(\mathbf{r}')}{\varepsilon_o} d\mathbf{r}' \qquad \Phi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

Potenziale ritardato: funzione di Green ***

- Abbiamo ricavato (vedi diapositiva 515) le equazioni dei potenziali elettrodinamici in forma covariante

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \Box A^\nu = \mu_0 J^\nu$$

  - In notazione più esplicita, per le componenti A^μ

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^\mu}{\partial t^2} - \nabla^2 A^\mu = \mu_0 j^\mu \qquad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A^\mu = -\mu_0 j^\mu$$

- Definiamo la funzione di Green (ricordiamo che $x_0 = ct$)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \nabla^2\right) G(x - x') = \delta^4(x - x') \qquad A^\mu\left(x\right) = \mu_0 \int G\left(x - x'\right) j^\mu\left(x'\right) d^4x'$$

  - Ricordiamo che si tratta di una soluzione particolare
  - La soluzione generale si trova sommando una soluzione $A_0^\mu(x)$ dell'equazione omogenea in modo che siano rispettate le condizioni al contorno

$$\Box A_0^\mu(x) = 0 \qquad A^\mu(x) = A_0^\mu(x) + \mu_0 \int G(x - x') j^\mu(x') d^4x'$$

- Spesso si impone una condizione asintotica

$$A^\mu(x) = A^\mu_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(x) + \mu_0 \int G(x - x') j^\mu(x') d^4x' \qquad \lim_{x_0 \to \pm\infty} A^\mu(x) = A^\mu_{\substack{\mathrm{out}\\ \mathrm{in}}}(x)$$

  - Pertanto

$$\lim_{x_0 \to \pm\infty} \int G(x - x') j^\mu(x') d^4x' \to 0$$

Funzioni di Green: Campo Elettromagnetico***

- Inoltre è necessario definire le condizione al contorno per $G(x-x')$
  - Una soluzione dell'equazione non omogenea è

$$A^\mu(x) = \mu_0 \int G(x-x') j^\mu(x') d^4x'$$

  - Normalmente si richiede la causalità
    - La richiesta di causalità impone che contribuiscano solo i valori di $j^\mu(x')$ per tempi x'^0 precedenti al tempo x^0 in cui è valutato $A^\mu(x)$
    - Occorre pertanto che sia $G(x-x') = 0$ per $x^0 - x'^0 < 0$
- Tuttavia le condizioni asintotiche precedenti possono richiedere altre condizioni

$$\lim_{x_0 \to +\infty} \int G(x-x') j^\mu(x') d^4x' \to 0 \quad \Longrightarrow \quad G(x-x') = 0 \qquad x_0 - x_0' > 0$$

  - La condizione asintotica per $x_0 \to -\infty$ coincide con la condizione di causalità
  - Le funzioni di Green (diverse) che si ottengono nei due casi hanno un nome
    - La funzione di Green ritardata

$$G_{\mathrm{ret}}(x-x') = 0 \qquad x_0 - x_0' < 0$$

    - La funzione di Green anticipata

$$G_{\mathrm{adv}}(x-x') = 0 \qquad x_0 - x_0' > 0$$

- Nonostante la seconda possa apparire priva di senso fisico sono entrambe molto importanti e usate

Funzioni di Green: Campo Elettromagnetico***

- Calcoliamo la funzione di Green dell'equazione dell'onda non omogenea
  - Poniamo $q^0 = \omega \qquad q^2 = \omega^2 - \mathbf{q}^2 \qquad |\mathbf{q}| = k \qquad c = 1$
  - Utilizzando le trasformate di Fourier, analogamente a quanto fatto per l'equazione di Poisson si trova

$$G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \widetilde{G}(q) e^{iq\cdot x} d^4q \qquad \delta^4(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{iq\cdot x} d^4q$$

  - Inserendo nell'equazione

$$\Box G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int q^2 \widetilde{G}(q) e^{iq\cdot x} d^4q = \delta^4(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{iq\cdot x} d^4q$$

  - Uguagliando gli integrandi

$$-q^2\widetilde{G}(q) = 1 \Longrightarrow \widetilde{G}(q) = -\frac{1}{q^2} = -\frac{1}{\omega^2 - \mathbf{q}^2} = -\frac{1}{\omega^2 - k^2}$$

  - La presenza del segno meno nel denominatore avrà importanti conseguenze
- Nel dominio della variabile x

$$G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{1}{q^2} e^{iq\cdot x} d^4q$$

Funzioni di Green: Campo Elettromagnetico***

- Anticipiamo il risultato finale

$$G\left(x - x'\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|}\delta\left[c\left(t - t' - \frac{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|}{c}\right)\right]$$

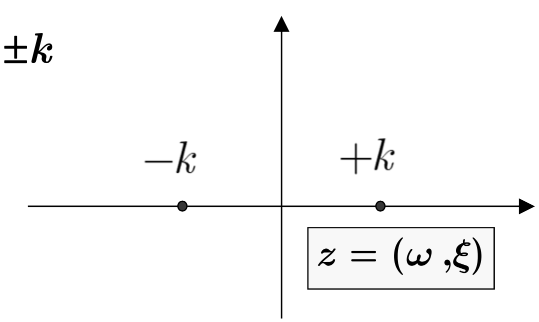
  - Osserviamo che la parte spaziale coincide con quella trovata per l'equazione di Poisson
  - La parte temporale implica invece che il campo al tempo t è determinato dalla corrente al tempo precedente t'

$$t' = t - \frac{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|}{c}$$

- Svolgiamo il calcolo (ricordiamo che abbiamo posto $c = 1$)

$$G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int \frac{1}{q^2}e^{iq\cdot x}d^4q \quad = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d^3\mathbf{q}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega^2 - k^2}e^{i\omega t}d\omega$$

- Iniziamo con l'integrazione della componente temporale $d\omega$
  - Introduciamo la variabile complessa $z = (\omega, \xi)$
    - Nel piano z il denominatore ha due poli $\omega_\pm = \pm|\mathrm{q}| = \pm k$
  - L'integrale diverge: ha due poli sull'asse ω
    - Per dare un significato all'integrale occorre interpretarlo come valore principale e definire come trattare le singolarità



Funzioni di Green: Campo Elettromagnetico***

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - k^2} d\omega$$

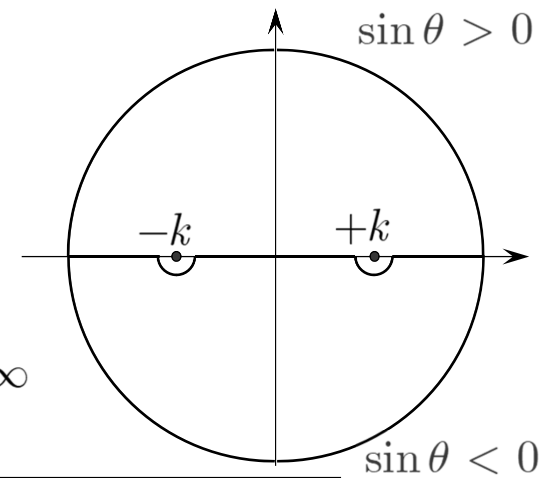
- Ci sono 2 poli. Utilizziamo il metodo dei residui
  - Chiudiamo il cammino con una circonferenza
    - Per $t < 0$ chiudiamo nel semipiano inferiore

$$e^{izt} = e^{itR\cos\theta} e^{i\left(iR\sin\theta\right)t} = e^{itR\cos\theta} e^{-tR\sin\theta} \to 0 \qquad R \to \infty$$

  - Abbiamo visto che per la causalità è necessario che $G(x - x') = 0$ per $t = x^0 - x'^0 < 0$
    - Pertanto evitiamo le singolarità con un cammino che lasci i poli all'esterno affinché l'integrale sia nullo
  - Per $t > 0$ chiudiamo nel semipiano superiore

$$e^{izt} = e^{itR\cos\theta} e^{i\left(iR\sin\theta\right)t} = e^{itR\cos\theta} e^{-tR\sin\theta} \to 0 \qquad R \to \infty$$

    - L'integrale è uguale alla somma dei residui



$$\boxed{z = R(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \ldots = (\omega - k)\frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - k^2}\bigg|_{\omega = k} + (\omega + k)\frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - k^2}\bigg|_{\omega = -k} = \frac{e^{+ikt}}{2k} - \frac{e^{-ikt}}{2k}$$

- In conclusione

$$\boxed{f(t) = 2\pi i\left[\frac{e^{+ikt}}{2k} - \frac{e^{-ikt}}{2k}\right]\Theta(t)} \qquad \Theta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Funzioni di Green: Campo Elettromagnetico***

- **Pertanto la funzione di Green è adesso data dall'integrale (ricordiamo $k = |\mathrm{q}|$)**

$$G(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d^3\mathbf{q}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\omega^2 - k^2}e^{i\omega t}d\omega = -\frac{2\pi i}{(2\pi)^4}\int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d^3\mathbf{q}\left[\frac{e^{+ikt}}{2k} - \frac{e^{-ikt}}{2k}\right]\Theta(t)$$

- **Anche in questo caso passiamo alle coordinate sferiche** $\boxed{d^3\mathbf{q} = 2\pi d\cos\theta k^2 dk}$
- **Per semplicità omettiamo per il momento $\Theta(t)$**

$$G\left(x\right) = -\frac{2\pi i}{(2\pi)^4}\int e^{-ikr\cos\theta}\left[\frac{e^{+ikt}}{2k} - \frac{e^{-ikt}}{2k}\right]2\pi d\cos\theta k^2 dk$$

$$= -\frac{(2\pi)^2 i}{(2\pi)^4}\int_0^\infty \frac{e^{+ikt} - e^{-ikt}}{2}kdk\int_{-1}^{+1}e^{-ikr\cos\theta}d\cos\theta$$

$$= -\frac{(2\pi)^2 i}{(2\pi)^4}\int_0^\infty \frac{e^{+ikt} - e^{-ikt}}{2}kdk\,\frac{e^{-ikr} - e^{+ikr}}{-ikr}$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{r}\int_0^\infty \frac{\left(e^{+ikt} - e^{-ikt}\right)\left(e^{+ikr} - e^{-ikr}\right)}{2}dk$$

Funzioni di Green: Campo Elettromagnetico***

$$G\left(x\right) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{r}\int_0^\infty \frac{\left(e^{+ikt} - e^{-ikt}\right)\left(e^{+ikr} - e^{-ikr}\right)}{2}dk$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{2r}\int_0^\infty \left[e^{ik\left(t+r\right)} - e^{ik\left(t-r\right)} - e^{-ik\left(t-r\right)} + e^{-ik\left(t+r\right)}\right]dk$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{2r}\left[\int_0^\infty \left[e^{ik\left(t+r\right)} - e^{ik\left(t-r\right)}\right]dk + \int_0^\infty \left[e^{-ik\left(t+r\right)} - e^{-ik\left(t-r\right)}\right]dk\right]$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{2r}\left[\int_0^\infty \left[e^{ik\left(t+r\right)} - e^{ik\left(t-r\right)}\right]dk + \int_{-\infty}^0 \left[e^{ik\left(t+r\right)} - e^{ik\left(t-r\right)}\right]dk\right]$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)}\frac{1}{2r}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\left(t+r\right)}dk - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\left(t-r\right)}dk\right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi r}\left[\delta\left(t+r\right) - \delta\left(t-r\right)\right]$$

- **Reintroduciamo $\Theta(t)$** $\quad G(x) = -\frac{1}{4\pi r}\left[\delta\left(t+r\right) - \delta\left(t-r\right)\right]\Theta(t)$

Funzioni di Green: Campo Elettromagnetico***

- Ricordiamo che $$G(r,t) = -\frac{1}{4\pi r}\Big[\delta(t+r) - \delta(t-r)\Big]\Theta(t)$$

$$r = \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right| \qquad t \to x^0 - x'^0 = ct - ct'$$

  - La funzione $\Theta(x)$ è nulla per $x < 0$ ovvero per $t - t' < 0$
  - Possiamo quindi ignorare la prima funzione $\delta(t+r)$ il cui argomento non è mai nullo
- Reintroduciamo c $$G_{\text{ret}}(r,t) = -\frac{1}{4\pi r}\Big[-\delta(ct-r)\Big]$$
  - In conclusione, con $t \to t - t'$

$$G_{\text{ret}}\left(r, t-t'\right) = \frac{1}{4\pi\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\delta\left(ct - ct' - \left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\right)$$

- Abbiamo calcolato la funzione di Green ritardata

$$\boxed{G_{\text{ret}}\left(r,t\right) = \frac{1}{4\pi\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\frac{1}{c}\delta\left(t - t' - \frac{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}{c}\right)}$$

- Notiamo che l'argomento della funzione $\delta()$ si annulla quando

$$t' = t - \frac{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}{c} \equiv t_{\text{r}}$$

Potenziali ritardati: soluzioni

- Possiamo adesso scrivere la soluzione per l'equazione del potenziale $\Box A^\nu = \mu_0 J^\nu$

$$A^\mu\left(x\right) = \mu_0 \int G_{\mathrm{ret}}\left(x - x'\right) j^\mu\left(x'\right) d^4 x'$$

  - Introduciamo G_{ret}

$$G_{\mathrm{ret}}\left(r, t\right) = \frac{1}{4\pi\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|}\frac{1}{c}\delta\left(t - t' - \frac{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|}{c}\right)$$

  - Otteniamo

$$A^\mu\left(x\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{c}\int \frac{1}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|} d^3\mathbf{r}' \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - t' - \frac{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|}{c}\right) j^\mu\left(x'\right) c\,dt'$$

  - L'integrale su t' è immediato
    - Nell'espressione di j^μ t' viene sostituito da t_{r}

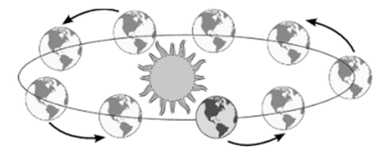
$$t_{\mathrm{r}} = t - \frac{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|}{c}$$

  - Il risultato è

$$A^\mu\left(x\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{j^\mu\left(\mathbf{r}', t_{\mathrm{r}}\right)}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|} d^3\mathbf{r}'$$

Il Sistema Internazionale SI

- Per definire le grandezze fondamentali (spazio, tempo, massa) c'è stata una evoluzione delle metodologie
- Il problema è gestito da organizzazioni internazionali fra le quali la più nota è la *Conférence générale des poids et mesures*
  - Storicamente
    - L'unità di misura del tempo è il secondo
      - Il secondo era definito sulla base della lunghezza dell'anno terrestre



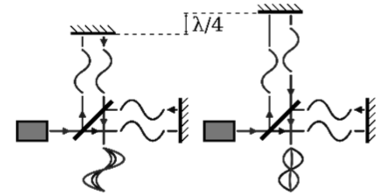
    - L'unità di misura delle lunghezze è il metro
      - Il metro era definito per confronto con il metro campione, un manufatto conservato a Sèvres

    - L'unità di misura della massa è il chilogrammo
      - Il chilogrammo era definito per confronto con la massa campione, un manufatto conservato a Sèvres

- In tempi più recenti si è passati a definire le unità di misura in funzione di fenomeni più facilmente controllabili o di costanti fondamentali
- Secondo
  - Unità di misura del tempo
  - Nel 1967 la 13^{a} *Conférence générale des poids et mesures* lo ha definito come la durata di $9\ 192\ 631\ 770$ periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra due livelli dell'atomo di Cesio-133

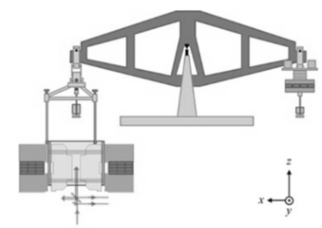
Il Sistema Internazionale SI

- **Velocità della luce**
  - **È una costante universale**
  - **Il suo valore è per definizione (quindi esatto)** $c = 299\ 792\ 458\ \mathrm{m/s}$
- **Metro**
  - **Unità di misura dello spazio**
  - **Nel** 1983 **la** 17ª *Conférence générale des poids et mesures* **lo ha definito in funzione della velocità della luce come distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo pari a** $\Delta t = 1/299\ 792\ 458\ \mathrm{s}$



- **Costante di Planck**
  - **È una costante universale**
  - **Il suo valore è per definizione (quindi esatto)** $h = 6.626\ 070\ 15{\times}10^{\ 34}\ \mathrm{J{\cdot}s}$
- **Chilogrammo**
  - **Unità di misura della massa**
  - **Nel** 2018 **la** 26ª *Conférence générale des poids et mesures* **lo ha definito come la massa equivalente all'energia di un fotone di frequenza** $\nu = 1.356\ 392\ 489\ 652{\times}10^{50}$

Bilancia di Kibble



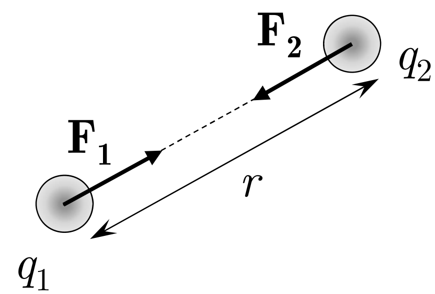
- **Nel sistema** MKS **le unità sono** metro, chilogrammo, secondo
- **Nel sistema** CGS **le unità sono** centimetro, grammo, secondo

Forza elettrica e forza magnetica

- Forza elettrica

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \qquad F_e = \left|\mathbf{F}_1\right| = \left|\mathbf{F}_2\right|$$

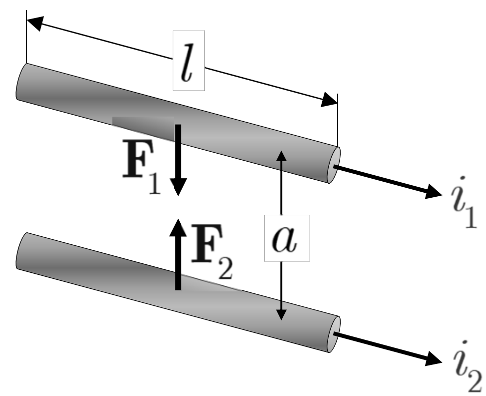
$$F_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} = q_2 E \qquad E = k_e \frac{q_1}{r^2}$$



  - Fissare la costante k_e determina
    - Le dimensioni della carica elettrica e del campo elettrico
    - Le unità di misura della carica elettrica e del campo elettrico
- Forza magnetica

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \qquad F_m = \left|\mathbf{F}_1\right| = \left|\mathbf{F}_2\right|$$

$$F_m = 2k_m \frac{i_1 i_2}{d} l \qquad B = 2k_m \alpha \frac{i_1}{d}$$



  - Fissare la costante k_m determina
    - Le dimensioni della corrente elettrica
    - Le unità di misura della corrente elettrica
  - Ruolo della costante α
    - Permette di definire indipendentemente scala e unità di B rispetto a E
    - Ci ritorneremo fra poco

Le unità di misura elettromagnetiche

- Carica elettrica e corrente elettrica non sono indipendenti

$$i = \frac{dq}{dt}$$

  - Poiché le cariche e le correnti sono collegate, le dimensioni del rapporto fra le due costanti k_e e k_m risulta determinato

$$F_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad F_m = 2k_m \frac{i_1 i_2}{d} l \qquad \Rightarrow \qquad \left[\frac{k_e}{k_m}\right] = \left[\frac{r^2}{q^2}\right]\left[i_1 i_2\right] = L^2 T^{-2}$$

  - È il quadrato di una velocità
- In realtà la natura fissa anche il valore numerico del rapporto
  - Assumiamo un valore unitario per i_1 e i_2
  - Otteniamo $q_1 = i_1 \cdot \Delta t$ e $q_2 = i_2 \cdot \Delta t$ con $\Delta t = 1\ \mathrm{s}$
  - Il risultato sperimentale è che il rapporto fra le due forze è uguale al quadrato della velocità della luce

$$\frac{k_e}{k_m} = c^2$$

- A questo punto fissare una delle due costanti k determina
  - Il valore dell'altra costante k
  - Le scale di unità con cui misurare le sorgenti e le loro dimensioni
- Nel Sistema Internazionale SI si fissa il valore di k_m

$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$$

Le unità di misura elettromagnetiche

- In linea di principio le tre costanti k_e, k_m e α sono sufficienti
  - La legge di Faraday ha bisogno di una costante in dipendenza delle dimensioni scelte per il campo E e per il campo B
  - In pratica, per determinare i valori delle costanti, è utile introdurre una ulteriore costante (ridondante)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Scriviamo le equazioni Maxwell con le definizioni fin qui adottate

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k_e \rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi\alpha k_m \mathbf{J} + \frac{k_m \alpha}{k_e}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Abbiamo visto che da queste equazioni si può ricavare l'equazione di propagazione delle onde elettromagnetiche
  - Con le definizione adottate si ottiene

Come dicevamo k_3 è ridondate

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{k_m}{k_e} k_3 \alpha \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \qquad \frac{k_m}{k_e} = \frac{1}{c^2} \qquad k_3 \alpha = 1 \qquad k_3 = \frac{1}{\alpha} \qquad \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

Sistemi a confronto

- Un'ultima scelta è dove avere il fattore 4π
  - Nelle equazioni di Maxwell: sistema non razionalizzato
  - Nelle equazioni della forza: sistema razionalizzato
- Come abbiamo detto nel sistema SI si fissa $k_m = 10^{-7}\ \mathrm{MLT^{-2}I^{-2}}$

Sistema	k_c	k_m	α	k_3
SI	$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-7}c^2$	$\dfrac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$	1	1

- Nel sistema SI $\quad [k_c] = \mathrm{ML^3T^{-4}I^{-2}} \qquad [k_m] = \mathrm{MLT^{-2}I^{-2}}$

Sistemi a confronto

- Un'ultima scelta è dove avere il fattore 4π
  - Nelle equazioni di Maxwell: sistema non razionalizzato
  - Nelle equazioni della forza: sistema razionalizzato
- Come abbiamo detto nel sistema SI si fissa $k_m = \mathbf{10^{-7}\ MLT^{-2}I^{-2}}$

Sistema	k_c	k_m	α	k_3
SI	$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-7}c^2$	$\dfrac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$	1	1
Gaussiano	1	c^{-2}	c	c^{-1}
Heaviside Lorentz	$\dfrac{1}{4\pi}$	$\dfrac{1}{4\pi}c^{-2}$	c	c^{-1}
Elettrostatico (esu)	1	c^{-2}	1	1
Elettrostatico (emu)	c^2	1	1	1

- Nel sistema SI $\left[k_c\right] = \mathrm{ML^3T^{-4}I^{-2}}$ $\left[k_m\right] = \mathrm{MLT^{-2}I^{-2}}$

Sistemi a confronto

- **Equazioni di Maxwell e forza di Lorentz**

Sistema	$\mathbf{D}, \mathbf{H}$	Equazioni di Maxwell				Lorentz
SI	$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \dfrac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$	$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$	$q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$
Gaussiano	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$	$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$	$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$	$q\mathbf{E} + q\dfrac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$
Heaviside Lorentz	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}$ $\mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \dfrac{1}{c}\mathbf{J} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$	$q\mathbf{E} + q\dfrac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}$

Sistemi a confronto

Table 2 Definitions of ϵ_0, μ_0, **D**, **H**, Macroscopic Maxwell Equations, and Lorentz Force Equation in Various Systems of Units

Where necessary the dimensions of quantities are given in parentheses. The symbol c stands for the velocity of light in vacuum with dimensions (lt^{-1}).

System	ϵ_0	μ_0	D, H	Macroscopic Maxwell Equations				Lorentz Force per Unit Charge
Electrostatic (esu)	1	c^{-2} (t^2l^{-2})	$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H}=c^2\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M}$	$\nabla\cdot\mathbf{D}=4\pi\rho$	$\nabla\times\mathbf{H}=4\pi\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$	$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}$
Electromagnetic (emu)	c^{-2} (t^2l^{-2})	1	$\mathbf{D}=\frac{1}{c^2}\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H}=\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M}$	$\nabla\cdot\mathbf{D}=4\pi\rho$	$\nabla\times\mathbf{H}=4\pi\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$	$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}$
Gaussian	1	1	$\mathbf{D}=\mathbf{E}+4\pi\mathbf{P}$ $\mathbf{H}=\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M}$	$\nabla\cdot\mathbf{D}=4\pi\rho$	$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$	$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}$
Heaviside–Lorentz	1	1	$\mathbf{D}=\mathbf{E}+\mathbf{P}$ $\mathbf{H}=\mathbf{B}-\mathbf{M}$	$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$	$\nabla\times\mathbf{H}=\frac{1}{c}\left(\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)$	$\nabla\times\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$	$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\mathbf{E}+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}$
SI	$\frac{10^7}{4\pi c^2}$ $(I^2t^4m^{-1}l^{-3})$	$4\pi\times10^{-7}$ $(mlI^{-2}t^{-2})$	$\mathbf{D}=\epsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$ $\mathbf{H}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}-\mathbf{M}$	$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$	$\nabla\times\mathbf{H}=\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$	$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}$

Convertire da SI a sistema Gauss

- Considerare l'equazione SI
  - Sostituire le grandezze elettriche con l'espressione della tabella
  - Trasformare le potenze di $\varepsilon_0\mu_0$ nelle corrispondenti potenze di c

Quantity	Gaussian	SI
Velocity of light	c	$(\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$
Electric field (potential, voltage)	$\mathbf{E}(\Phi, V)/\sqrt{4\pi\epsilon_0}$	$\mathbf{E}(\Phi, V)$
Displacement	$\sqrt{\epsilon_0/4\pi}\,\mathbf{D}$	$\mathbf{D}$
Charge density (charge, current density, current, polarization)	$\sqrt{4\pi\epsilon_0}\,\rho(q, \mathbf{J}, I, \mathbf{P})$	$\rho(q, \mathbf{J}, I, \mathbf{P})$
Magnetic induction	$\sqrt{\mu_0/4\pi}\,\mathbf{B}$	$\mathbf{B}$
Magnetic field	$\mathbf{H}/\sqrt{4\pi\mu_0}$	$\mathbf{H}$
Magnetization	$\sqrt{4\pi/\mu_0}\,\mathbf{M}$	$\mathbf{M}$
Conductivity	$4\pi\epsilon_0\sigma$	σ
Dielectric constant	$\epsilon_0\epsilon$	ϵ
Magnetic permeability	$\mu_0\mu$	μ
Resistance (impedance)	$R(Z)/4\pi\epsilon_0$	$R(Z)$
Inductance	$L/4\pi\epsilon_0$	L
Capacitance	$4\pi\epsilon_0 C$	C

Convertire da SI a sistema Gauss

- Esempi
  - Forza fra due fili

$$F = \mu_0 \frac{i_1 i_2}{2\pi a} l$$

$$i \rightarrow \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\, i$$

$$F = \mu_0 \frac{i_1 i_2}{2\pi a} l \quad \rightarrow \quad F = \mu_0 \frac{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\, i_1 \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\, i_2}{2\pi a} l = \frac{1}{c^2}\frac{2 i_1 i_2}{a} l$$

  - Campo magnetico del filo infinito

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{\hat{\mathbf{e}}_\phi}{r}$$

$$B \rightarrow \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} \qquad i \rightarrow \sqrt{4\pi\varepsilon_0}\, i$$

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\, i \frac{\hat{\mathbf{e}}_\phi}{r} \quad \rightarrow \quad \mathbf{B} = \frac{2}{c} i \frac{\hat{\mathbf{e}}_\phi}{r}$$