
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 38 - 25.05.2023

**Caratteristiche energia radiata
dipolo elettrico oscillante
Formulazione covariante
dell'elettrodinamica**

Anno Accademico 2022/2023

Energia radiata dal dipolo oscillante

- Calcoliamo il vettore di Poynting

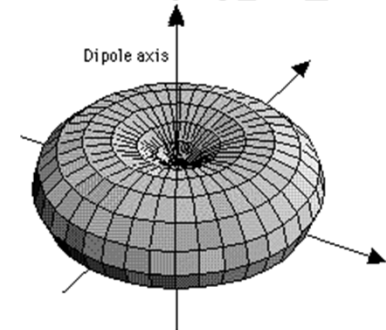
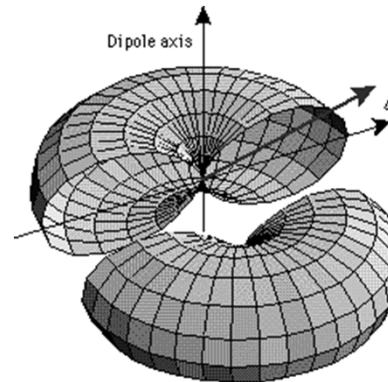
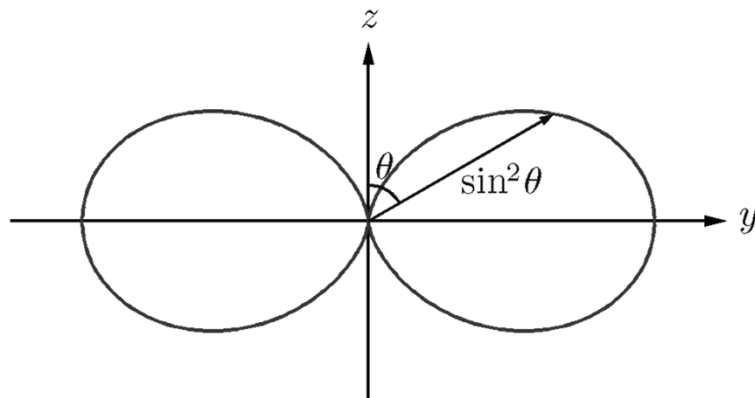
$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{rad}}(r, \theta, t) &= -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} \hat{\mathbf{e}}_\theta \cos \omega(t - r/c) \\ \mathbf{B}_{\text{rad}}(r, \theta, t) &= -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \frac{\sin \theta}{r} \hat{\mathbf{e}}_\phi \cos \omega(t - r/c) \end{aligned} \quad \left| \quad \mathbf{S}_{\text{rad}} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_{\text{rad}} \times \mathbf{B}_{\text{rad}} = \frac{\mu_0}{c} \left(\frac{p_0}{4\pi} \right)^2 \omega^4 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \cos^2 \omega(t - r/c) \hat{\mathbf{e}}_r \right.$$

- L'intensità dell'onda si ottiene mediando su un ciclo

$$\langle \mathbf{S}_{\text{rad}} \rangle = \frac{\mu_0}{c} \frac{p_0^2}{32\pi^2} \omega^4 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r$$

- L'intensità dipende dall'angolo polare
- A distanza L fissata dall'origine l'intensità ha l'andamento $\langle S \rangle = A \sin^2 \theta$
- La lunghezza del vettore è proporzionale a $\langle S \rangle$

$$A = \frac{\mu_0}{c} \frac{p_0^2}{32\pi^2 L^2} \omega^4$$



Energia radiata dal dipolo oscillante

- La potenza radiata attraverso una superficie sferica di raggio r si trova calcolando il flusso del vettore di Poynting

$$\langle P \rangle = \oint_A \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a}$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\mu_0}{c} \frac{p_0^2}{32\pi^2} \omega^4 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r \quad d\mathbf{a} = \hat{\mathbf{e}}_r da \quad da = r^2 d\phi \sin \theta d\theta$$

$$\langle P \rangle = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{\mu_0}{c} \frac{p_0^2}{32\pi^2} \omega^4 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0}{c} \frac{p_0^2}{16\pi} \omega^4 \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta$$

$$\int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = \int_{-1}^{+1} (1 - x^2) dx = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

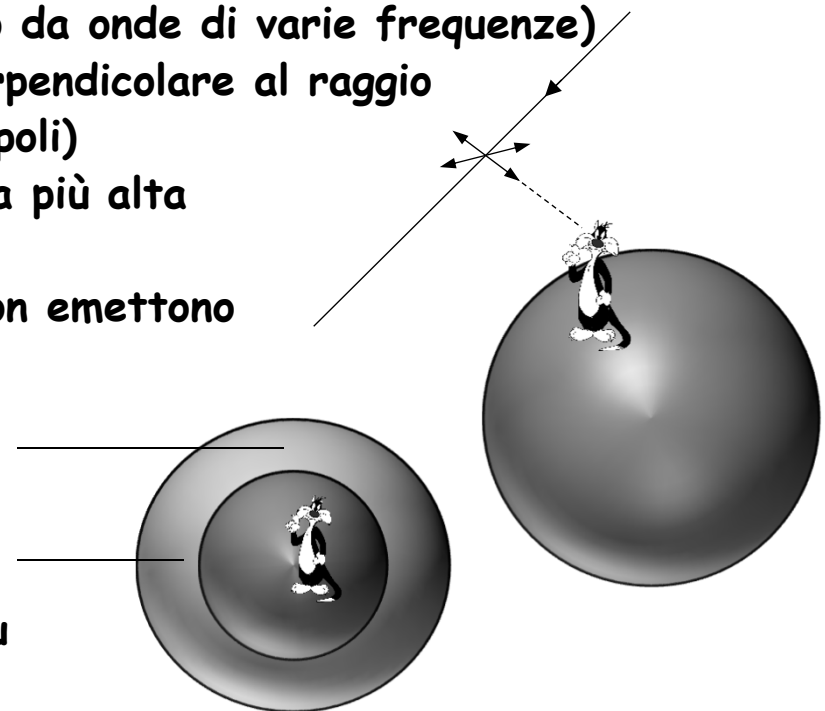
- In definitiva

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{\mu_0}{c} \frac{p_0^2}{12\pi} \omega^4}$$

Cielo blu, sole al tramonto rosso

- La formula appena trovata ci permette una comprensione qualitativa dei seguenti fatti
 - In una giornata di sole il cielo è blu
 - Al tramonto il sole è rosso
 - Per una spiegazione più rigorosa occorre studiare la diffusione della di un'onda elettromagnetica (scattering)
 - Anche la probabilità di diffusione dipende da ω^4
- Consideriamo un raggio luminoso (composto da onde di varie frequenze)
 - Il campo elettrico oscilla in un piano perpendicolare al raggio
 - Gli elettroni atomi dell'aria oscillano (dipoli)
 - Sono diffusi di più i raggi di frequenza più alta
 - Un osservatore vede luce diffusa blu
 - Le oscillazioni lungo la linea di visione non emettono nella direzione dell'osservatore
 - L'osservatore vede luce polarizzata
- Al tramonto la luce trasmessa percorre un tratto di atmosfera più spesso
 - La luce trasmessa viene diffusa di più e perde gran parte della componente blu
 - Diventa rossa

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0}{c} \frac{p_0^2}{12\pi} \omega^4$$



Filtri polarizzatori in fotografia



Formulazione covariante dell'elettrodinamica

- Riscriveremo adesso le leggi dell'elettrodinamica utilizzando una formulazione covariante
- Per approfondimenti si può consultare il testo
 - Nolting W. - Theoretical Physics 4 - Special Theory of Relativity - Springer 2017
- **Attenzione**
 - Abbiamo già notato che il testo di Griffiths utilizza una convenzione dei segni lievemente differente da quella usata in queste lezioni

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x \cdot y = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$$

- Il tensore $F^{\mu\nu}$ definito nella diapositiva [210](#) ha i segni opposti a quelli utilizzati da Griffiths
 - In questa parte del corso continuiamo a utilizzare la stessa convenzione
- La convenzione oggi più utilizzata è quella vista nelle diapositive seguenti

Operatore di derivazione

- Consideriamo le quattro operazioni di derivazione

$$\frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z}$$

- Possiamo riscriverle in funzione delle componenti x^μ ($x^0 = ct$)

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \quad \frac{\partial}{\partial x^1} \quad \frac{\partial}{\partial x^2} \quad \frac{\partial}{\partial x^3}$$

- Le 4 derivate si trasformano come le componenti di un 4-vettore covariante
- Per dimostrarlo consideriamo innanzitutto un sistema inerziale S' in moto rispetto al sistema inerziale S in cui le coordinate sono x^μ
- Ricaviamo l'espressione di x in funzione di x'

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad \Lambda_\mu{}^\alpha x'^\mu = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad \Lambda_\mu{}^\alpha x'^\mu = \delta^\alpha{}_\nu x^\nu = x^\alpha$$

- Pertanto

$$x^\alpha = \Lambda_\mu{}^\alpha x'^\mu$$

Operatore di derivazione

$$x^\alpha = \Lambda_\mu^\alpha x'^\mu$$

- Calcoliamo la forma dell'operatore derivazione nel sistema inerziale S'

- Si ha ovviamente

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}$$

- La derivata di x^α si calcola immediatamente

- Otteniamo pertanto

Si trasforma in
modo covariante

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu^\alpha$$

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

contravariante

- Introduciamo una notazione più semplice

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

- Analogamente definiamo le componenti contravarianti

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \Lambda^\mu_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

Operatore di d'Alembert

- Introduciamo l'operatore di D'Alembert (o d'Alembertiano)

$$\square \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \partial^\mu \partial_\mu$$

- È un operatore scalare
 - È il prodotto scalare di un 4-vettore con se stesso
 - Ha la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento
- In forma esplicita

$$\partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

Equazione di continuità

- Abbiamo visto che la carica elettrica è un'invariante relativistico (154 e seg.)
 - Abbiamo anche visto che la densità di carica ρ non è un invariante
 - Anche la densità di corrente non è definita in modo covariante

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

- Consideriamo un sistema di riferimento S in cui abbiamo una densità di carica elettrica ρ a riposo
 - La carica contenuta in un volume dV è

$$dq = \rho dV \quad dV = dxdydz$$

- In un sistema inerziale S' in moto rispetto a S avremo

$$dq = \rho' dV' \quad dV' = \frac{1}{\gamma} dV$$

- Sappiamo che l'invarianza della carica richiede che

$$\rho dV = \rho' dV' \quad \rho' = \gamma \rho$$

- Nel sistema inerziale S' in cui le cariche sono in movimento avremo pertanto

$$\rho' = \rho \gamma \quad \mathbf{J}' = \rho \gamma \mathbf{v}$$

Equazione di continuità

$$\rho' = \rho\gamma \quad \mathbf{J}' = \rho\gamma\mathbf{v}$$

- L'evidente somiglianza con la definizione di quadri-velocità o di quadri-momento suggerisce che ρ e $\mathbf{J}$ siano le componenti di un 4-vettore

$$J^\mu = (c\rho, J_x, J_y, J_z)$$

- Alternativamente, con la quadri-velocità $u = (\gamma c, \gamma\mathbf{u}) = (u^0, u^1, u^2, u^3)$

$$J^\mu = \rho u^\mu = \rho(\gamma c, \gamma\mathbf{u})$$

- Utilizzando le espressioni covarianti introdotte possiamo esprimere in modo covariante anche l'equazione di continuità

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} c\rho + \frac{\partial}{\partial x} J_x + \frac{\partial}{\partial y} J_y + \frac{\partial}{\partial z} J_z = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0} J^0 + \frac{\partial}{\partial x^1} J^1 + \frac{\partial}{\partial x^2} J^2 + \frac{\partial}{\partial x^3} J^3 = 0$$

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

quadri-divergenza nulla

Potenziale vettore A^μ

- Abbiamo visto che anche i potenziali obbediscono all'equazione non omogenea dell'onda (vedi diapositiva [450](#))

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

- Elaboriamo la seconda equazione

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \rightarrow \frac{1}{\varepsilon_0} = \mu_0 c^2$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\mu_0 c^2 \rho$$

$$\nabla^2 \frac{\phi}{c} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\phi}{c} = -\mu_0 c \rho$$

- Utilizziamo l'operatore di d'Alembert e introduciamo J^μ

$$\square \frac{\phi}{c} = -\mu_0 J^0 \quad \square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

- Queste equazioni suggeriscono che anche ϕ e $\mathbf{A}$ siano le componenti di un quadri-vettore

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z \right)$$

$$\square A^\mu = -\mu_0 J^\mu$$

Potenziale vettore A^μ

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z \right)$$

- Per finire esprimiamo in forma covariante il gauge di Lorentz
 - Ricordiamo la formula della condizione (vedi diapositiva [444](#))

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

- Elaboriamo

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\phi}{c} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \qquad \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3} = 0$$

- In definitiva

$$\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0}$$

- Ancora una volta una condizione sulla quadri-divergenza

Il tensore campo elettromagnetico

- Ricordiamo la relazione fra i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ e i potenziali (vedi diapositiva **440**)

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

- Scriviamo esplicitamente le componenti di $\mathbf{B}$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \qquad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \qquad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

- Cambiano gli indici delle componenti ($x \rightarrow x^1, y \rightarrow x^2, z \rightarrow x^3$)

$$B_1 = \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \qquad B_2 = \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \qquad B_3 = \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2}$$

- In forma più sintetica ($\partial/\partial x^k = \partial_k = -\partial^k, k = 1,2,3$)

$$B_1 = \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2)$$

$$B_2 = \partial_3 A^1 - \partial_1 A^3 = -(\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3)$$

$$B_3 = \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 = -(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1)$$

Il tensore campo elettromagnetico

- Veniamo al campo elettrico

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \quad E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \quad E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}$$

- Cambiamo gli indici ($x \rightarrow x^1, y \rightarrow x^2, z \rightarrow x^3, ct = x^0$)

$$E_1 = -\frac{\partial\phi}{\partial x^1} - c \frac{\partial A^1}{\partial x^0} \quad \frac{E_2}{c} = -\frac{\partial}{\partial x^2} \frac{\phi}{c} - \frac{\partial A^2}{\partial x^0} \quad \frac{E_3}{c} = -\frac{\partial A^0}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^0}$$

- In una forma più sintetica ($\partial/\partial x^0 = \partial_0 = \partial^0, \partial/\partial x^k = \partial_k = -\partial^k, k = 1,2,3$)

$$\frac{E_1}{c} = -\partial_1 A^0 - \partial_0 A^1 = \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 = -(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0)$$

$$\frac{E_2}{c} = -(\partial^0 A^2 - \partial^2 A^0)$$

$$\frac{E_3}{c} = -(\partial^0 A^3 - \partial^3 A^0)$$

Il tensore campo elettromagnetico

- Riassumendo

$$B_1 = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) \quad B_2 = -(\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3) \quad B_3 = -(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1)$$

$$\frac{E_1}{c} = -(\partial^0 A^1 - \partial^1 A^0) \quad \frac{E_2}{c} = -(\partial^0 A^2 - \partial^2 A^0) \quad \frac{E_3}{c} = -(\partial^0 A^3 - \partial^3 A^0)$$

- Introduciamo il tensore campo elettromagnetico

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$F^{i0} = -F^{0i} = E^i/c$$

$$B_i = 1/2 \varepsilon_{ijk} F^{jk} \leftrightarrow F^{ij} = -\varepsilon^{ijk} B_k$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

- Una sorta di "rotore" quadri-dimensionale
- La quantità $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ è un invariante relativistico (vedi diapositiva [207](#))

- Ha lo stesso valore in tutti i sistemi inerziali

- È facile verificare che

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \frac{\mathbf{E}^2}{c^2})$$

- Ovviamente, anche il segno di $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ è invariante

- Non è possibile che un campo elettrostatico puro sia trasformato in un campo magnetostatico puro attraverso un cambio di sistema inerziale

Il tensore campo elettromagnetico

- È possibile e utile definire un altro tensore $\bar{F}^{\mu\nu}$, il tensore duale di $F^{\mu\nu}$
 - Per la definizione si utilizza il tensore $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ di Levi Civita
 - Un tensore totalmente anti-simmetrico a 4 indici

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & (\mu\nu\sigma\rho) \text{ permutazione pari di } (0123) \\ -1 & (\mu\nu\sigma\rho) \text{ permutazione dispari di } (0123) \\ 0 & \text{se due o più indici uguali} \end{cases}$$

- Il tensore duale è definito come

$$\bar{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

$$\bar{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ -B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ -B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix}$$

- È ottenuto da $F^{\mu\nu}$ con la sostituzione

$$\mathbf{B} \leftrightarrow -\mathbf{E} / c$$

- Si può costruire un secondo invariante

$$\bar{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{4}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

Il tensore campo elettromagnetico

- Osservazioni (vedi diapositiva [207](#))
 - Per un campo elettrostatico o magnetostatico puro
 - Il primo invariante è positivo o negativo rispettivamente
 - Il secondo invariante è nullo
 - Il passaggio ad un altro sistema inerziale può fare comparire un altro campo
 - Perpendicolare all'altro
 - I moduli dei campi devono mantenere il segno del primo invariante
- Per i campi di un'onda elettromagnetica i due invarianti sono nulli
 - I moduli dei campi E e B sono sempre nella relazione $E = cB$ in ogni sistema inerziale
 - I campi E e B sono ortogonali in tutti i sistemi inerziali

Equazioni di Maxwell

- Le equazioni di Maxwell possono essere riscritte utilizzando un formalismo covariante che utilizzi il tensore $F^{\mu\nu}$
- Iniziamo con le due equazioni non omogenee (vedi diapositiva [301](#))

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$$

- Possono essere riscritte come

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \mu_0 c^2 \rho \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot \frac{\mathbf{E}}{c} = \mu_0 c \rho = \mu_0 J^0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\mathbf{E}}{c} = \mu_0 \mathbf{J}$$

- Osserviamo che nel secondo membro delle due equazioni sono presenti le componenti del quadri-vettore densità di corrente
- Deve essere possibile riscrivere il primo membro in modo che sia evidente che si tratta delle componenti di un quadrivettore

Equazioni di Maxwell

- Consideriamo la prima equazione

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{E}}{c} = \mu_0 J^0$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

- Elaboriamo il primo membro

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{\mathbf{E}}{c} &= \partial_1 \frac{E_1}{c} + \partial_2 \frac{E_2}{c} + \partial_3 \frac{E_3}{c} = \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} \\ &= \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \partial_\mu F^{\mu 0} \end{aligned}$$

In definitiva

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \mu_0 J^0$$

- Consideriamo la seconda equazione

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\mathbf{E}}{c} = \mu_0 \mathbf{J}$$

- Consideriamo la componente x

$$\begin{aligned} \left(\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial}{\partial x^0} \frac{\mathbf{E}}{c} \right)_x &= \partial_y B_z - \partial_z B_y - \partial_0 \frac{E_x}{c} = \partial_2 F^{21} - \partial_3 (-F^{31}) - \partial_0 (-F^{01}) \\ &= \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} + \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} = \partial_\mu F^{\mu 1} \end{aligned}$$

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = \mu_0 J^1$$

- Analogamente per le altre componenti

Otteniamo infine

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$$

Equazioni di Maxwell

- Consideriamo adesso le equazioni omogenee (vedi diapositiva **301**)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

- Queste due equazioni ci hanno permesso di introdurre i potenziali

- La divergenza di un rotore è nulla
- Il rotore di un gradiente è nullo
- L'introduzione dei potenziali rende automatico il rispetto delle due equazioni

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

- In totale si tratta di quattro equazioni
- Analizziamo la prima equazione

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3 = \partial_1(-F^{23}) + \partial_2 F^{13} + \partial_3(-F^{12})$$

$$\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = 0$$

- Analogamente, per la componente x della seconda equazione

$$\begin{aligned} \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)_x &= \partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 + c \partial_0 B_1 \\ &= \partial_2(-c F^{03}) - \partial_3(-c F^{02}) + c \partial_0(-F^{23}) = c(\partial^2 F^{03} - \partial^3 F^{02} - \partial^0 F^{23}) \\ &= -c(\partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} + \partial^0 F^{23}) \end{aligned}$$

$$\partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} + \partial^0 F^{23} = 0$$

Equazioni di Maxwell

- Per le restanti due componenti si trova

$$\partial^3 F^{10} + \partial^1 F^{03} + \partial^0 F^{31} = 0 \qquad \partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} + \partial^0 F^{12} = 0$$

- Ricordiamo le prime due

$$\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = 0 \qquad \partial^2 F^{30} + \partial^3 F^{02} + \partial^0 F^{23} = 0$$

- Le quattro equazioni possono essere sintetizzate in

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0$$

- In questa equazione gli indici $\alpha\beta\gamma$
 - Sono una scelta senza ripetizione di 3 di (0,1,2,3)
 - Quattro possibilità: (0,1,2) (0,1,3) (0,2,3) (1,2,3)
 - I tre termini dell'equazione hanno permutazioni cicliche di $\alpha\beta\gamma$
- Una forma equivalente, meno esplicita ma più compatta è

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta F_{\gamma\delta} = 0 \qquad \alpha = 0, 1, 2, 3$$

- Può essere formulata utilizzando il tensore duale $\bar{F}^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}$
 - L'equazione diventa

$$\partial_\alpha \bar{F}^{\alpha\beta} = \partial_\beta \bar{F}^{\alpha\beta} = 0$$

Equazioni di Maxwell

- L'equazione omogenea implica che il tensore $F^{\mu\nu}$ sia derivabile dal potenziale A^μ

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0$$

- Applicando l'equazione al tensore $F^{\mu\nu}$ espresso con il potenziale A^μ

$$\partial^\lambda \partial^\mu A^\nu - \partial^\lambda \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu \partial^\nu A^\lambda - \partial^\mu \partial^\lambda A^\nu + \partial^\nu \partial^\lambda A^\mu - \partial^\nu \partial^\mu A^\lambda$$

$$\partial^\lambda \partial^\mu A^\nu - \partial^\lambda \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu \partial^\nu A^\lambda - \partial^\mu \partial^\lambda A^\nu + \partial^\nu \partial^\lambda A^\mu - \partial^\nu \partial^\mu A^\lambda = 0$$

- Sono considerazioni analoghe a quelle che hanno condotto all'introduzione del potenziale nella formulazione non covariante
 - Scrivere il tensore $F^{\mu\nu}$ nella forma data assicura che le equazioni di Maxwell omogenee siano soddisfatte sempre

Invarianza di gauge

- Ricordiamo la trasformazione di gauge generale (vedi diapositiva **444**)
 - Per una arbitraria funzione $\lambda(r,t)$ i campi E e B restano invariati se si applica ai potenziali la trasformazione

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \qquad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \lambda$$

- Esprimiamo la trasformazione di gauge in forma covariante

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \frac{\phi}{c} \rightarrow \frac{\phi}{c} - \frac{\partial \lambda}{c \partial t} \quad \longrightarrow \quad A^0 \rightarrow A^0 - \partial^0 \lambda$$

- Per le componenti spaziali di A^μ ricordiamo la definizione di ∂^μ e ∂_μ

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \qquad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

- Otteniamo

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \lambda \quad \longrightarrow \quad A^k \rightarrow A^k - (-\nabla \lambda) = A^k - \partial^k \lambda$$

$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \lambda$

- Per finire riscriviamo in forma covariante il gauge di Lorenz

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \longrightarrow \quad \partial^0 A_0 + \partial^k A_k = \partial^\mu A_\mu = 0 = \partial_\mu A^\mu$$

Invarianza di gauge

- Si verifica facilmente che l'espressione del tensore $F^{\mu\nu}$ è invariante rispetto alle trasformazioni di gauge

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

- Applichiamo una trasformazione di gauge

$$A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \lambda$$

- Calcoliamo il nuovo tensore del campo elettromagnetico

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu (A^\nu - \partial^\nu \lambda) - \partial^\nu (A^\mu - \partial^\mu \lambda)$$

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\mu \partial^\nu \lambda - \partial^\nu A^\mu + \partial^\nu \partial^\mu \lambda \quad \partial^\mu \partial^\nu \lambda = \partial^\nu \partial^\mu \lambda$$

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}$$

$$F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}$$

Equazione per i potenziali

- Scriviamo l'equazione per i potenziali
 - In forma covariante è molto semplice
 - Ricordiamo l'equazione di Maxwell non omogenea (vedi diapositiva [509](#))

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$$

- Sostituiamo l'espressione di $F^{\mu\nu}$ in funzione del potenziale A^μ

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

- Otteniamo

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \mu_0 J^\nu \longrightarrow \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \mu_0 J^\nu$$

- Se imponiamo il gauge di Lorenz $\partial_\mu A^\mu = 0$ otteniamo

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \square A^\nu = \mu_0 J^\nu$$

- È un'equazione dell'onda non omogenea
- Coincide con le equazioni che avevamo trovato precedentemente (dia. 450)

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} \qquad \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Forza di Lorentz

- Abbiamo detto che la forza di Lorentz è relativisticamente corretta a condizione di utilizzare la quantità di moto relativistica

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$$

- Per esprimere in forma covariante la forza di Lorentz occorre utilizzare la forza di Minkowski (vedi diapositiva [193](#)) $u = (\gamma c, \gamma\mathbf{u}) = (u^0, u^1, u^2, u^3)$
 - NB: $d\tau = dt/\gamma$, diverso dalla definizione della diapositiva 184

$$K^\mu = m \frac{du^\mu}{d\tau} \quad \mathbf{K} = m \frac{d\gamma\mathbf{v}}{dt} = \gamma\mathbf{F} \quad K^0 = \gamma \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c}$$

- Possiamo riscrivere la forza di Lorentz come

$$\mathbf{K} = \gamma\mathbf{F} = \gamma q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = q\left(\gamma c \frac{\mathbf{E}}{c} + \gamma\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

- Ricordiamo la quadri-velocità

$$u^\mu = (u^0, \mathbf{u}) = (\gamma c, \gamma\mathbf{v})$$

$$\mathbf{K} = q\left(\frac{\mathbf{E}}{c} u^0 + \mathbf{u} \times \mathbf{B}\right)$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_x = q\left(\frac{E_x}{c} u^0 + u_y B_z - u_z B_y\right) \quad K^1 = q\left[F^{10}u^0 + u^2 F^{21} - u^3(-F^{31})\right]$$

Forza di Lorentz

$$K^1 = q \left[F^{10} u_0 - u_2 F^{21} - u_3 F^{31} \right] = q \left[F^{10} u_0 + u_1 F^{11} + u_2 F^{12} + u_3 F^{13} \right]$$

$$K^1 = q F^{1\alpha} u_\alpha$$

$\boxed{F^{11} = 0}$

- Analogamente per le componenti K^2 e K^3
- Definiamo allo stesso modo la componente temporale

$$K^0 = q F^{0\alpha} u_\alpha$$

- Interpretiamo la formula che dà K^0

$$K^0 = q \left[F^{01} u_1 + F^{02} u_2 + F^{03} u_3 \right] = q \left[-\frac{E_x}{c} (-u_x) - \frac{E_y}{c} (-u_y) - \frac{E_z}{c} (-u_z) \right]$$

$$K^0 = \frac{q}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{u} = \frac{q}{c} \gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{c} \gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{c} \gamma \frac{dU}{dt} = \gamma \frac{dU}{dx^0} = \frac{dU}{d\tau} = \frac{dp^0}{d\tau}$$

- Anche la componente K^0 ha la forma prevista per la forza di Minkowski
- In definitiva la forza di Lorentz in forma covariante è

$$\boxed{K^\mu = q F^{\mu\nu} u_\nu}$$

Riepilogo delle formule principali

$$J^\mu = (c\rho, J_x, J_y, J_z) \quad \partial_\mu J^\mu = 0$$

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right) \quad A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \lambda \quad \partial_\mu A^\mu = 0$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$\bar{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(\mathbf{B}^2 - \frac{\mathbf{E}^2}{c^2}) \quad \bar{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{4}{c} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu$$

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0 \quad \partial_\alpha \bar{F}^{\alpha\beta} = \partial_\beta \bar{F}^{\alpha\beta} = 0$$

$$K^\mu = q F^{\mu\nu} u_\nu \quad \square A^\mu = -\mu_0 J^\mu$$