
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 37 - 18.05.2023

Potenziali elettrodinamici

Invarianza di gauge

Equazione dell'onda per i potenziali

Potenziali ritardati

Radiazione del dipolo elettrico

Anno Accademico 2022/2023

Potenziale scalare e potenziale vettore

- Ricordiamo le relazioni fra campi e potenziali nel caso di campi variabili nel tempo (vedi diapositiva [241](#))

- Vogliamo adesso scrivere l'equazione dell'onda per i potenziali

- Richiamiamo come avevamo introdotto le relazioni fra campi e potenziali

- Ricordiamo le equazioni di Maxwell nel vuoto

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- La divergenza del campo magnetico è nulla anche in elettrodinamica

- È pertanto possibile introdurre il potenziale vettore anche in elettrodinamica

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

- Introduciamo questa relazione nella legge di Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

- Abbiamo pertanto trovato una combinazione di campi a rotore nullo

- È il gradiente di un campo scalare

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad \longrightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Equazioni per i potenziali

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

- I campi soddisfano automaticamente le equazioni di Maxwell omogenee

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

- Adesso utilizziamo le altre due equazioni di Maxwell (con le sorgenti) per trovare le equazioni differenziali a cui obbediscono i campi $\mathbf{A}$ e ϕ

- La legge di Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$



$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial\nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- È un'equazione in cui i campi $\mathbf{A}$ e ϕ sono accoppiati
- La legge di Ampère (il rotore di $\mathbf{B}$)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \quad \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial\nabla\phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}$$

- Ricordiamo la relazione (diapositiva [82](#)) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial\nabla\phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}$$

Equazioni per i potenziali

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

- **Elaboriamo**

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- **Abbiamo pertanto un sistema di equazioni differenziali accoppiate**
 - **Il problema può essere semplificato utilizzando la non unicità dei potenziali**
- **Abbiamo già notato che in elettrostatica e in magnetostatica i potenziali non sono definiti univocamente**
 - **Il potenziale scalare è definito a meno di una costante**
 - **Il potenziale vettore è definito a meno del gradiente di un campo scalare**
- **In elettrodinamica le due non univocità devono essere trattate insieme**

Invarianza di gauge

- Ricaviamo pertanto le condizioni di invarianza in elettrodinamica

- Consideriamo una trasformazione (arbitraria) dei potenziali

$$\phi'(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t) + \beta(\mathbf{r}, t) \quad \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}, t)$$

- Cerchiamo le condizioni su α e β in modo che il campo elettrico e il campo magnetico derivati dai potenziali non cambino

- Per il potenziale vettore è sufficiente che

$$\nabla \times \boldsymbol{\alpha} = 0 \quad \boldsymbol{\alpha} = \nabla \lambda \quad \lambda(x, y, z, t) \quad \lambda \text{ funzione arbitraria}$$

- Calcoliamo il campo elettrico prima e dopo la trasformazione

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{E}' = -\nabla \phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla \phi - \nabla \beta - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t}$$

- Perché il campo non vari ($\mathbf{E} = \mathbf{E}'$) deve essere

$$\nabla \beta + \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} = 0 \quad \text{e anche} \quad \nabla \beta + \frac{\partial \nabla \lambda}{\partial t} = 0 \quad \nabla \left(\beta + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) = 0$$

- Pertanto l'argomento del gradiente deve essere una funzione indipendente dalla posizione

- In particolare possiamo scegliere

$$\beta + \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0 \quad \beta = -\frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

Invarianza di gauge

- Pertanto, per ogni funzione arbitraria $\lambda(x, y, z, t)$ la seguente trasformazione sui potenziali lascia invariati i campi elettrico e magnetico

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \lambda$$

- La trasformazione precedente prende il nome di trasformazione di gauge
- L'invarianza di gauge dei potenziali può essere utilizzata per semplificare le equazioni differenziali dei potenziali disaccoppiando le equazioni
- Ricordiamo due dei gauge più utilizzati

- Il gauge di Coulomb

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

- Il gauge di Coulomb è utile per mettere in evidenza la natura trasversale dell'onda elettromagnetica
- Semplifica le equazioni disaccoppiandole nel caso di $\rho = 0$
- Ha lo svantaggio di non essere relativisticamente invariante
- Il gauge di Lorenz

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

- Il gauge di Lorenz è relativisticamente invariante
- Disaccoppia le due equazioni

Invarianza di gauge

- Dimostriamo che con una trasformazione di gauge possiamo sempre ottenere dei potenziali che soddisfano le due condizioni di gauge introdotte

- **Gauge di Coulomb**

- Supponiamo che $\nabla \cdot \mathbf{A}$ non sia nulla e che sia invece $\nabla \cdot \mathbf{A} = f(\mathbf{r})$
- Troviamo una $\lambda(\mathbf{r})$ (indipendente da t) che renda nulla $\nabla \cdot \mathbf{A}'$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \lambda(\mathbf{r}) \quad \nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \lambda(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) + \nabla^2 \lambda(\mathbf{r}) = 0$$

- Otteniamo l'equazione che determina $\lambda(\mathbf{r})$ (equazione di Poisson)

$$\nabla^2 \lambda(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r}) \quad \lambda(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

- Ovviamente questa trasformazione non modifica né ϕ né $\mathbf{E}$

- **Gauge di Lorenz**

- Analogamente al caso precedente troviamo l'equazione per λ nell'ipotesi che

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = f(\mathbf{r}, t)$$

- La trasformazione di gauge è

$$\phi' = \phi - \partial \lambda(\mathbf{r}, t) / \partial t \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \lambda(\mathbf{r}, t)$$

Invarianza di gauge

- I nuovi potenziali devono soddisfare il gauge di Lorenz

$$0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A}' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} + \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \lambda$$

- Abbiamo assunto che i potenziali $\mathbf{A}$ e ϕ non soddisfino il gauge di Lorenz

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = f(\mathbf{r}, t)$$

- Pertanto l'equazione diventa

$$f(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} + \nabla^2 \lambda = 0$$

$$\nabla^2 \lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} = -f(\mathbf{r}, t)$$

- Analogamente all'equazione di Poisson anche questa equazione ha una soluzione
- La studieremo fra breve (vedi diapositiva [451](#))
- Per il momento è sufficiente sapere che la soluzione esiste e che pertanto è sempre possibile assumere che i potenziali soddisfino il gauge di Lorenz

Esempio

- Un campo elettromagnetico, in un certo Gauge, ha i seguenti potenziali

$$\phi'(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = -\frac{qt}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

- Calcoliamo il campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi' - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = \mathbf{0} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{-qt}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \left[-\frac{qt}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right] = \mathbf{0}$$

- È il campo di una carica puntiforme a riposo nonostante $\phi = 0$ e $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$

- Naturalmente per il campo elettrostatico di una carica puntiforme conviene

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}$$

- Cerchiamo una trasformazione di Gauge per passare da ϕ $\mathbf{A}$ a ϕ' $\mathbf{A}'$

$$\phi' = \phi - \frac{\partial\lambda}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad 0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{\partial\lambda}{\partial t} \quad \lambda(\mathbf{r}, t) = \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} dt + f(\mathbf{r}) = \frac{qt}{4\pi\epsilon_0 r} + f(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda \quad \longrightarrow \quad -\frac{qt}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \mathbf{0} + \nabla \left[\frac{qt}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + f(\mathbf{r}) \right]$$

è sufficiente

$$-\frac{qt}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = -\frac{qt}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} + \nabla f(\mathbf{r}) \quad \longrightarrow \quad \nabla f(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad f(\mathbf{r}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda(\mathbf{r}, t) = \frac{qt}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Esempio

- Alternativamente possiamo utilizzare la procedura della diapositiva **445** per rendere nulla la divergenza di $\mathbf{A}'$

$$\lambda(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

- Calcoliamo la funzione $f(\mathbf{r})$

$$f(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = -\frac{qt}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = -\frac{qt}{4\pi\epsilon_0} 4\pi\delta^3(\mathbf{r}) = -\frac{qt}{\epsilon_0} \delta^3(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$$

- Calcoliamo $\lambda(\mathbf{r})$

$$\lambda(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi} \int_V -\frac{qt}{\epsilon_0} \frac{\delta(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = -\frac{1}{4\pi} \frac{qt}{\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}|} = -\frac{qt}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

- Trasformiamo i potenziali

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi' - \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0 - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{qt}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) + \nabla \lambda(\mathbf{r}, t) = -\frac{qt}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} + \nabla \left(-\frac{qt}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \right)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{qt}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} + \frac{qt}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = 0$$

Equazioni per i potenziali

- In pratica non è quasi mai necessario calcolare la funzione $\lambda(x,y,z,t)$
 - Sapendo che è possibile trovarle si può assumere che la condizione di Lorenz o di Coulomb sia rispettata e si risolvono le equazioni dei potenziali
- Vediamo l'espressione delle equazioni dei potenziali nel gauge di Lorenz

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Poiché $\mathbf{A}$ e ϕ soddisfano il gauge di Lorenz

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

- Sostituendo nell'equazione di ϕ

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Equazione dell'onda non omogenea

Equazioni per i potenziali

- Consideriamo adesso l'equazione per il potenziale vettore

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \cancel{\nabla \cdot \mathbf{A}} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}$$

- Poiché $\mathbf{A}$ e ϕ soddisfano il gauge di Lorenz

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

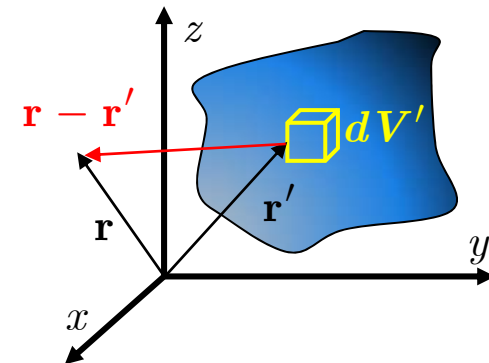
- Anche il potenziale vettore soddisfa l'equazione dell'onda inhomogenea
- Nel caso statico ritroviamo le equazioni dell'elettrostatica e della magnetostatica

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Nei casi statico e stazionario conosciamo le soluzioni
- Richiedendo che i campi si annullino all'infinito ...

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$



Potenziali ritardati

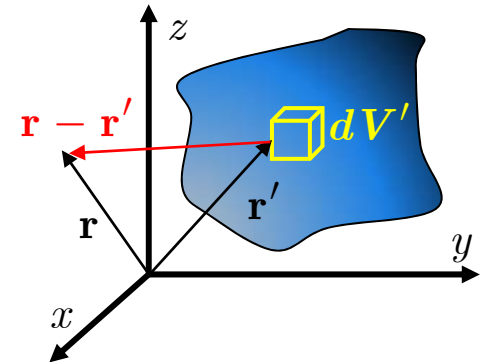
- Nel caso dipendente dal tempo la soluzione è, almeno formalmente, molto semplice
- Le cariche contenute nel volume dV' sono in movimento

$$\rho(\mathbf{r}', t) \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}', t)$$

- Tuttavia gli effetti elettromagnetici propagano con velocità c
 - Il potenziale $\phi(\mathbf{r}, t)$ può ricevere contributi solo dal valore assunto da ρ e $\mathbf{J}$ ad un tempo precedente t_r
- Si può dimostrare (forse lo faremo) che le soluzioni sono

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

- Durante l'integrazione la variabile ausiliaria t_r varia con $\mathbf{r}'$
 - Un utile esercizio (non banale) è verificare che queste soluzioni soddisfino l'equazione inhomogenea della diapositiva precedente
 - In tal caso occorre ricordarsi che i potenziali dipendono da $\mathbf{r}$
 - In modo esplicito attraverso $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$
 - In modo implicito attraverso $t_r = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$



$$t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$$

Potenziali ritardati

- Nonostante queste soluzioni siano "intuitive" la loro semplicità (apparente) va considerata in qualche modo fortuita

- Ad esempio le stesse formule intuitive non valgono per $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \neq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \neq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

NO!

- Le formule corrette si possono ricavare da ϕ e $\mathbf{A}$

- Il calcolo tuttavia è un po' laborioso. Diamo il risultato (v. Griffiths)[†]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}', t_r)(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t_r)}{c^2|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV'$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t_r)}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right] \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV'$$

- Ovviamente per ρ e $\mathbf{J}$ indipendenti dal tempo ritroviamo le formule dell'elettrostatica e della magnetostatica

- [†] Vedi anche A. Zangwill – Modern electrodynamics – CUP 2012 - applicazione 20.2p. 726

Approssimazione quasi-statica per B

- Esaminiamo la formula che abbiamo appena scritto per B

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t_r)}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right] \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' \quad t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$$

- Semplifichiamo la notazione ponendo $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{u^2} + \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t_r)}{cu} \right] \times \hat{\mathbf{u}} dV' \quad t_r - t = -\frac{u}{c}$$

- Consideriamo una densità di corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ le cui variazioni temporali abbiano una scala di tempi fissata da un parametro τ

- Il parametro τ potrebbe essere definito come

- Si può dimostrare (v. diapositive seguenti) che per $|t - t_r| \ll \tau$ $\tau \sim \left| \frac{J(\mathbf{r}, t)}{\dot{J}(\mathbf{r}, t)} \right|$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t_r) \approx \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t)(t_r - t) \quad \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t_r) \approx \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t)$$

- Sostituendo

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t) - \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t)(t - t_r)}{u^2} + \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t)}{cu} \right] \times \hat{\mathbf{u}} dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\frac{\mathbf{J}(t)}{u^2} - \frac{\dot{\mathbf{J}}(t)(t - t_r)}{uc(t - t_r)} + \frac{\dot{\mathbf{J}}(t)}{cu} \right] \times \hat{\mathbf{u}} dV'$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t)}{u^2} \times \hat{\mathbf{u}} dV'$$

Approssimazione quasi-statica per B

• Ricordiamo $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \quad t_r - t = -\frac{u}{c} \quad |t_r - t| \ll \tau \quad \tau \sim \left| \frac{J(t)}{\dot{J}(t)} \right|$

- Sviluppiamo al primo ordine la densità di corrente

$$\mathbf{J}(t_r) \approx \mathbf{J}(t) + \dot{\mathbf{J}}(t)(t_r - t)$$

- Dimostriamo che nelle condizioni dell'approssimazione $\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t_r) \approx \dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t)$

- Sviluppiamo $\dot{\mathbf{J}}(t_r)$ intorno a t

$$\dot{\mathbf{J}}(t_r) \approx \dot{\mathbf{J}}(t) + \ddot{\mathbf{J}}(t)(t_r - t)$$

- Dato che l'ordine di grandezza del tempo di variazione di $\mathbf{J}(t)$ è τ abbiamo

$$\dot{\mathbf{J}}(t) \approx \frac{\mathbf{J}(t)}{\tau} \quad \longrightarrow \quad \ddot{\mathbf{J}}(t) \approx \frac{\dot{\mathbf{J}}(t)}{\tau}$$

- Sostituiamo

$$\dot{\mathbf{J}}(t_r) \approx \dot{\mathbf{J}}(t) + \ddot{\mathbf{J}}(t)(t_r - t) \approx \dot{\mathbf{J}}(t) + \frac{\dot{\mathbf{J}}(t)}{\tau}(t_r - t) \quad \frac{|t - t_r|}{\tau} \ll 1$$

$$\dot{\mathbf{J}}(t_r) \approx \dot{\mathbf{J}}(t)$$

- La legge di Biot-Savart è pertanto una ottima approssimazione per

$$t - t_r \ll \tau \quad \text{Inoltre dalla definizione} \quad t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \quad \longrightarrow \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll c\tau$$



Approssimazione quasi-statica

- Vediamo un'applicazione di questi concetti (Griffiths esempio 7.9)

- Un filo infinitamente lungo parallelo all'asse z , percorso da una corrente $i(t)$

- Calcolare il campo elettrico indotto in funzione della distanza r dal filo

- Il problema ha una simmetria cilindrica

- Le linee del campo B sono circonferenze

- I campi non dipendono da ϕ o z

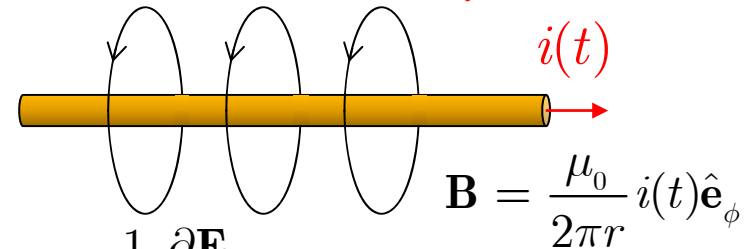
- Il campo elettrico indotto è parallelo a z

- Infatti si consideri l'equazione $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

- Data la forma delle linee di B il rotore ha solo la componente z

- Anche la densità di corrente è lungo z

- Segue che il campo E è diretto lungo z



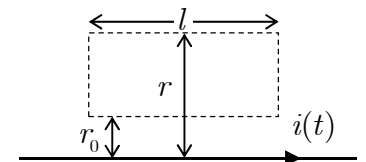
- Per calcolare il campo elettrico utilizziamo la legge di Faraday

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0}{2\pi} i(t) l \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi} i(t) l \ln \frac{r}{r_0}$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E(r_0)l - E(r)l \quad \mathbf{E} = \left[\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{di}{dt} \ln \frac{r}{r_0} + E(r_0) \right] \hat{e}_z$$

- La formula predice che E diverge per $r \rightarrow \infty$

- L'approssimazione quasi-statica usata vale solo per $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll c\tau$



Onda piana nel gauge di Coulomb

- Vogliamo adesso una prima soluzione delle equazioni dei potenziali
 - Nel gauge di Coulomb: $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$
 - Nel caso in cui le sorgenti siano nulle
- Ricordiamo le equazioni dei potenziali (vedi diapositiva [421](#))

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}$$

- Consideriamo la prima equazione e imponiamo il gauge di Coulomb

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- È l'equazione di Poisson. Tuttavia in generale ρ è funzione del tempo
- La soluzione è

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

- Sottolineiamo che la densità è calcolata al tempo t , non al tempo t_r
- Sembrerebbe un paradosso ma non lo è
- Il campo elettrico non dipende solo da ϕ , ma anche da $\mathbf{A}$
- I contributi di ϕ e $\mathbf{A}$ introducono la dipendenza dal tempo ritardato



Gauge di Coulomb

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

- Vogliamo studiare la propagazione nel vuoto, in assenza di sorgenti
 - Se $\rho = 0$ allora $\phi = 0$
- Consideriamo adesso l'equazione per il potenziale vettore

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}$$

- Poiché $\phi = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = 0$ abbiamo

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

Equazione dell'onda omogenea

- Abbiamo studiato le soluzioni per i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$
 - In particolare le onde piane

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{A}}_0 e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

- $\mathbf{A}_0$ è un vettore, in generale complesso
- La soluzione fisica è la parte reale di $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$



Onda piana

- Vediamo la condizione di trasversalità dell'onda

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{A}}_0 e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

- Deve essere

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = i(\tilde{A}_{0x} k_x + \tilde{A}_{0y} k_y + \tilde{A}_{0z} k_z) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = 0$$

- Pertanto abbiamo la condizione di trasversalità $\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{A}}_0 = 0$
 - Pertanto $\mathbf{A}_0$ deve essere perpendicolare alla direzione di propagazione

- Il campo elettrico si trova semplicemente

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -i\omega \tilde{\mathbf{A}}_0 e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \equiv \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \tilde{\mathbf{E}}_0 = -i\omega \tilde{\mathbf{A}}_0$$

- Per trovare il campo magnetico ricordiamo la forma che acquista l'operatore ∇ per un'onda piana: $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k\zeta$ (vedi diapositiva [386](#)) $\nabla = \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial \zeta}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A} = -ik \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{A}}_0 e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = -i \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{A}}_0 e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$



Potenziali di Liénard-Wiechert

- Consideriamo una carica q in movimento arbitrario dato

- Conosciamo la traiettoria $\mathbf{r}_0(t)$

- La densità di carica e la densità corrente sono

$$\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)] \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = q\mathbf{v}(t)\delta^3[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)]$$

- Calcoliamo i potenziali ritardati generati da q

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

- Calcoliamo dapprima il potenziale $\phi(\mathbf{r}, t)$

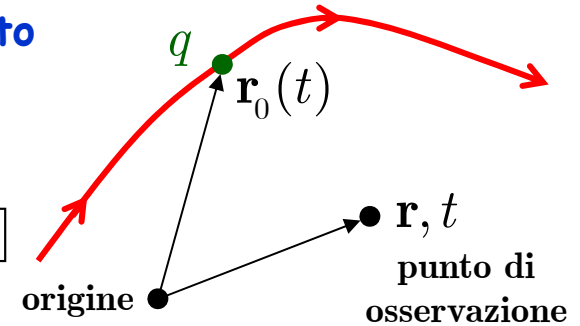
- Il calcolo del potenziale $\mathbf{A}$ è analogo

- La complicazione del calcolo è nascosta in t_r

- Il calcolo risulta più semplice se si scrive la densità di carica come

$$\rho(\mathbf{r}', t_r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\mathbf{r}', t') \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) dt'$$

- Notiamo che la funzione $\rho(\mathbf{r}, t')$ all'interno dell'integrale dipende da un tempo normale, non ritardato



$$t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$$

Potenziali di Liénard-Wiechert

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \quad \rho(\mathbf{r}, t) = q\delta^3[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)]$$

- Abbiamo visto che $\rho(\mathbf{r}', t_r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\mathbf{r}', t') \delta(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) dt'$

- Otteniamo pertanto

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q\delta^3[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) dt' d^3\mathbf{r}'$$

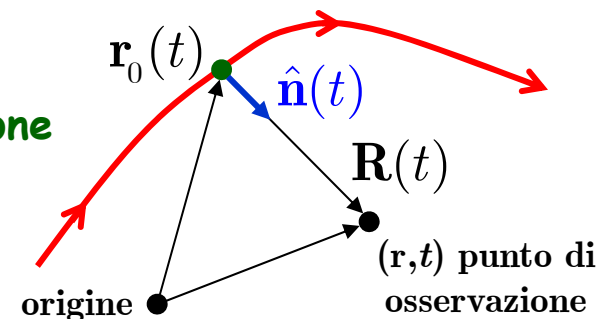
- La presenza della funzione $\delta^3[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t)]$ rende immediato l'integrale in $d^3\mathbf{r}'$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} \delta(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c}) dt'$$

- Definiamo $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t) \equiv R(t)\hat{\mathbf{n}}(t)$

- Il versore $\hat{\mathbf{n}}(t)$ punta dalla posizione della carica al tempo t alla posizione $\mathbf{r}$ del punto di osservazione

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{R(t')} \delta(t' - t + \frac{R(t')}{c}) dt'$$



Potenziali di Liénard-Wiechert

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{R(t')} \delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) dt'$$

• **Elaboriamo la funzione δ**

• **Ricordiamo che**

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|} \quad f(x_i) = 0$$

• **Abbiamo**

$$f(t') = t' - t + \frac{R(t')}{c} \quad f(t_r) = 0$$

per definizione
 t_r è definito
dall'equazione

$$t_r = t - \frac{R(t_r)}{c}$$

• **Inoltre**

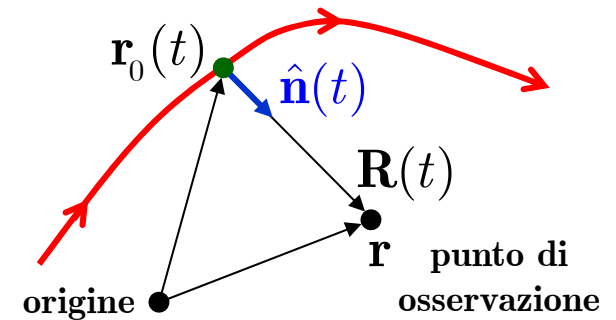
$$f'(t') = 1 + \frac{1}{c} \frac{dR(t')}{dt'} \quad R(t') = \sqrt{\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{R}(t')}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = -\frac{d\mathbf{R}}{dt}$$

$$\frac{dR(t')}{dt'} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{R}(t') \cdot \mathbf{R}(t')}} \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt'} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt'} \right) = \frac{1}{R(t')} \frac{d\mathbf{R}}{dt'} \cdot \mathbf{R} = -\mathbf{v}(t') \cdot \hat{\mathbf{n}}(t')$$

$$f'(t') = 1 - \beta(t') \cdot \hat{\mathbf{n}}(t') > 0$$

$$\delta\left(t' - t + \frac{R(t')}{c}\right) = \frac{\delta(t' - t_r)}{1 - \beta(t_r) \cdot \hat{\mathbf{n}}(t_r)}$$



$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t) = R(t)\hat{\mathbf{n}}(t)$$

Potenziali di Liénard-Wiechert

$$\delta(t' - t + \frac{R(t')}{c}) = \frac{\delta(t' - t_r)}{1 - \beta(t_r) \cdot \hat{\mathbf{n}}(t_r)} = \frac{\delta(t' - t_r)}{g(t_r)} \quad g(t) = 1 - \beta(t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(t)$$

- Inseriamo il risultato nella formula del potenziale ritardato

- Abbiamo

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{R(t')} \delta(t' - t + \frac{R(t')}{c}) dt' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{g(t')R(t')} \delta(t' - t_r) dt' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(t_r)(1 - \beta(t_r) \cdot \hat{\mathbf{n}}(t_r))} \end{aligned}$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_r)|} \frac{1}{1 - \beta(t_r) \cdot \hat{\mathbf{n}}(t_r)}$$

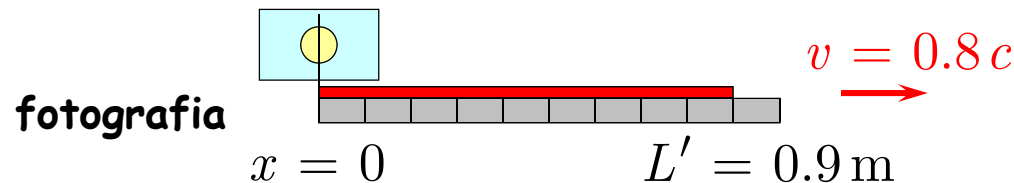
- E analogamente per $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mathbf{v}(t_r)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_r)|} \frac{1}{1 - \beta(t_r) \cdot \hat{\mathbf{n}}(t_r)}$$

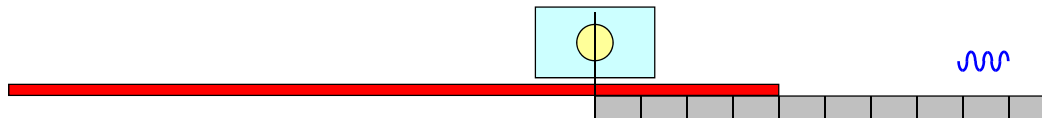
Il fattore $1 - \beta \cdot n$

- Per comprendere meglio il significato del fattore $1 - \beta \cdot n$ consideriamo il seguente problema

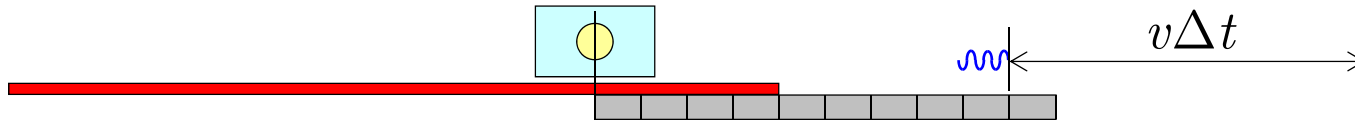
- Una barra si muove da sinistra verso destra con velocità $v = 0.8 c$



- Una macchina fotografica riprende l'immagine quando l'estremità sinistra della barra passa per la posizione $x = 0$ di un metro
 - La fotografia mostra che l'estremità destra della barra coincide con la lettura $L' = 0.9 \text{ m}$ del metro.
 - Metro e macchina fotografica sono a riposo. Quanto è lunga la barra ?
- Chiamiamo L la lunghezza reale della barra e L' la lunghezza apparente
- La luce che segnala che l'estremità destra della barra è nella posizione $L' = 0.9 \text{ m}$ deve partire prima della luce che segnala la posizione 0 .
 - Poiché la luce deve percorrere L' sarà partita Δt secondi prima $\Delta t = \frac{L'}{c}$



Il fattore $1 - \beta \cdot n$



- Nel tempo che la luce impiega per raggiungere l'obbiettivo la barra (in particolare l'estremità di destra) si sposta verso destra di Δx

$$\Delta x = v\Delta t$$

- La lunghezza della barra è pertanto la somma di due termini
 - Della lunghezza apparente misurata dalla macchina fotografica: L'
 - Dello spazio percorso dalla barra nell'intervallo di tempo che la luce emessa a $L' = 0.9 \text{ m}$ impiega per raggiungere l'obbiettivo: $v\Delta t$

$$L = L' + v\Delta t = L' + v \frac{L'}{c} = L'(1 + \beta)$$

- La relazione fra lunghezza reale L e lunghezza apparente L' è pertanto

$$L' = \frac{L}{1 + \beta}$$

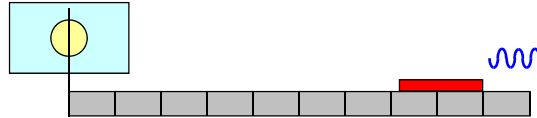
$$L = 0.9 \cdot (1 + 0.8) = 1.62 \text{ m}$$

- Sottolineiamo che non si tratta della contrazione di Lorentz
 - È simile all'effetto Doppler



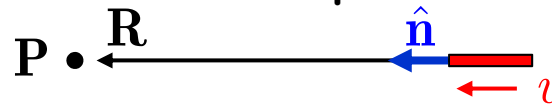
Il fattore $1 - \beta \cdot n$

- Se la barra si muove in direzione opposta il fattore diventa $1 - \beta$
 - Infatti in questo caso la lunghezza apparente L' è maggiore

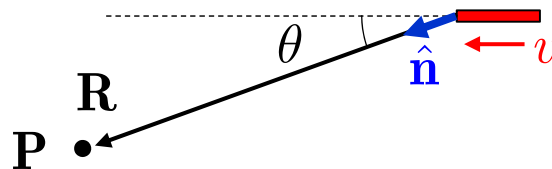


$$L' = \frac{L}{1 - \beta}$$

- In questo caso una barra lunga $L = 0.18$ m viene fotografata come una barra lunga $L' = 0.9$ m
- In entrambi i casi trattati la velocità della sorgente e il vettore dalla sorgente al punto di osservazione sono paralleli o antiparalleli



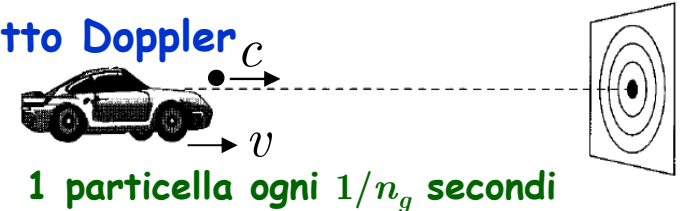
- Se il vettore R e la velocità v non sono paralleli (o antiparalleli) le derivazioni precedenti sono ancora valide a condizione di usare le proiezioni delle lunghezze nella direzione di v : $L \cos \theta$, $L' \cos \theta$



- Il fattore diventa pertanto $1 - \beta \cdot \hat{n}$

Il fattore $1 - \beta \cdot n$

- Sottolineiamo ulteriormente le analogie con l'effetto Doppler
 - Un veicolo si muove con velocità v
 - Emette particelle (proiettili) con frequenza n_g
 - I proiettili si muovono con velocità c
 - I proiettili colpiscono un bersaglio con frequenza n_t
- Per semplicità supponiamo che le particelle vengano emesse uniformemente
 - Una particella viene emessa al tempo t_0
 - Supponendo sia stata emessa ad una distanza L dal bersaglio lo raggiungerà al tempo $t_1 = t_0 + L/c$
 - La successiva particella è emessa al tempo $t_0 + 1/n_g$
 - È stata emessa ad una distanza $L - v/n_g$
 - Raggiunge il bersaglio al tempo $t_2 = t_0 + 1/n_g + (L - v/n_g)/c$
- La frequenza n_t con cui le particelle colpiscono il bersaglio è



$$\frac{1}{n_t} = \Delta t = t_2 - t_1 = t_0 + \frac{1}{n_g} + \frac{L}{c} - \frac{\beta}{n_g} - t_0 - \frac{L}{c} = \frac{1}{n_g} - \frac{\beta}{n_g}$$

$$\frac{1}{n_t} = \frac{1}{n_g} (1 - \beta)$$

$$n_t = \frac{n_g}{1 - \beta}$$

Il fattore $1 - \beta \cdot \mathbf{n}$

- Per finire osserviamo la differenza fra i due integrali

- L'integrale della densità di carica funzione del tempo "normale" t

$$\int \rho(\mathbf{r}', t) d^3 \mathbf{r}' = q$$

- L'integrale della densità di carica funzione del tempo "ritardato" t_r

$$\rho(\mathbf{r}', t_r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\mathbf{r}', t') \delta(t' - t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}) dt'$$

$$\delta(t' - t + \frac{R(t')}{c}) = \frac{\delta(t' - t_r)}{1 - \beta(t_r) \cdot \hat{\mathbf{n}}(t_r)}$$

$$\int \rho(\mathbf{r}', t_r) d^3 \mathbf{r}' = \frac{q}{1 - \beta(t_r) \cdot \hat{\mathbf{n}}(t_r)}$$

- Il secondo integrale presuppone la definizione di un punto di osservazione $(\mathbf{r}, t)$
- L'integrale usa valori della densità di carica presi a tempi diversi

$$t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$$

- Il dominio di integrazione di $\mathbf{r}'$ in cui $\rho(\mathbf{r}', t_r)$ è diversa da zero è più grande rispetto all'integrale precedente

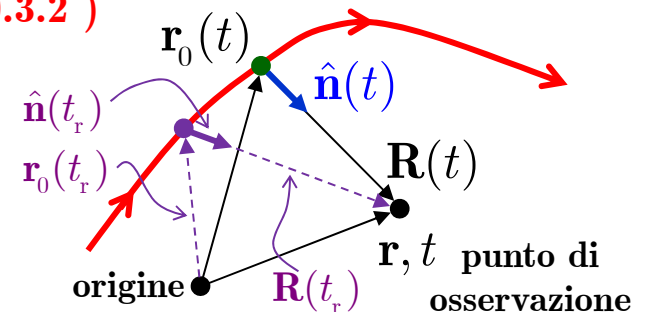


Campi di Liénard-Wiechert

- Le formule per i potenziali trovate sono semplici solo apparentemente
 - Per passare ai campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ bisogna eseguire le derivate prestando molta attenzione alle quantità "ritardate"
 - Un calcolo dettagliato è fatto nel Griffiths[†] (§ 10.3.2)
 - Ricordiamo le definizioni della geometria

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t) = R(t)\hat{\mathbf{n}}(t)$$

$$t_r = t - \frac{R(t_r)}{c}$$



- Il risultato per il campo elettrico è

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(1 - \beta^2)(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta})}{g^3 R^2} + \frac{\hat{\mathbf{n}} \times ((\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{cg^3 R} \right]_{\text{ret}}$$

- Il risultato per il campo magnetico è

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{n}}(t_r) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

$$g(t) = 1 - \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(t)$$

dentro le parentesi [] tutto è calcolato al tempo t_r

- [†]Vedi Griffiths D. Introduction to Electrodynamics 3° ed. Prentice Hall 1999
- Vedi anche Zangwill A. – Modern Electrodynamics CUP 2012 p. 875

Campi di Liénard-Wiechert

- Esaminiamo più attentamente il campo elettrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(1 - \beta^2)(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta})}{g^3 R^2} + \frac{\hat{\mathbf{n}} \times ((\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{cg^3 R} \right]_{\text{ret}}$$

- Il campo risulta da due contributi diversi $\mathbf{E} = \mathbf{E}_v + \mathbf{E}_a$
 - Il primo termine $\mathbf{E}_v$ è chiamato campo di velocità
 - Questo termine varia come $1/R^2$
 - Il secondo termine $\mathbf{E}_a$ è chiamato campo di accelerazione
 - Questo termine varia come $1/R$
 - Anche il corrispondente $\mathbf{B}_a$ varia come $1/R$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{n}}(t_r) \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

- Il vettore di Poynting dei campi di accelerazione varia come $1/R^2$
 - Il flusso di energia attraverso una superficie di raggio R è costante
 - Il campo di accelerazione è la radiazione che viaggia
- Ritorneremo più avanti sul problema della radiazione da parte di una carica di cui si conosce la legge del moto $\mathbf{r}_0(t)$
- Per comprendere meglio le formule calcoliamo i campi di una carica in moto rettilineo uniforme $\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{v}t$



Campo di una carica con v costante

- Specializziamo la formula al caso di una carica in moto rettilineo uniforme
 - Abbiamo già analizzato questo problema con altri metodi (vedi [162](#))
 - Se la carica non accelera il campo di accelerazione è nullo $E_a = 0$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_v = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \frac{(1 - \beta^2)(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta})}{R^2} \right]_{\text{ret}}$$

- L'obiettivo è esprimere la formula in funzione di t eliminando t_r
- Consideriamo la traiettoria della particella in moto
 - Consideriamo un punto di osservazione $(\mathbf{r}, t)$
 - Al tempo t la posizione della particella è $\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{v}t$
 - Al tempo precedente t_r la particella è nella posizione $\mathbf{r}_0(t_r) = \mathbf{v}t_r$
 - Il tempo ritardato t_r è la soluzione dell'equazione

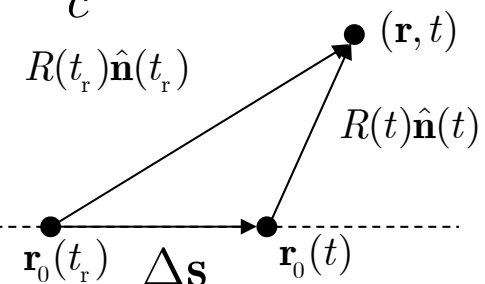
$$t_r = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_r)|}{c} = t - \frac{R(t_r)}{c} \quad \longrightarrow \quad t - t_r = \frac{R(t_r)}{c} \quad \boxed{\mathbf{v}(t - t_r) = \beta R(t_r)}$$

- Abbiamo pertanto

$$\Delta \mathbf{s} \equiv \mathbf{v}(t - t_r) = \beta R(t_r)$$

- Rappresentiamo i vettori

$$R(t_r)\hat{\mathbf{n}}(t_r) = \Delta \mathbf{s} + R(t)\hat{\mathbf{n}}(t)$$



Campo di una carica con v costante

- Otteniamo pertanto

$$R(t_r)\hat{\mathbf{n}}(t_r) = \Delta\mathbf{s} + R(t)\hat{\mathbf{n}}(t) \quad R(t_r)\hat{\mathbf{n}}(t_r) = \beta R(t_r) + R(t)\hat{\mathbf{n}}(t)$$

$$\Delta\mathbf{s} = \beta R(t_r)$$

$$\hat{\mathbf{n}}(t_r) - \beta = \frac{R(t)\hat{\mathbf{n}}(t)}{R(t_r)} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \beta)^3} \frac{(1 - \beta^2)(\hat{\mathbf{n}} - \beta)}{R^2} \right]_{\text{ret}}$$

- Useremo questa relazione per sviluppare il numeratore del campo
- Consideriamo ancora il grafico

- Calcoliamo la proiezione AB di $\Delta\mathbf{s}$ su AC

$$AB = \Delta\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{n}}(t_r) = R(t_r)\beta \cdot \hat{\mathbf{n}}(t_r)$$

- Inoltre

$$\begin{aligned} BC &= R(t_r) - R(t_r)\beta \cdot \hat{\mathbf{n}}(t_r) \\ &= R(t_r)[1 - \beta \cdot \hat{\mathbf{n}}(t_r)] = R(t_r)g(t_r) \end{aligned}$$

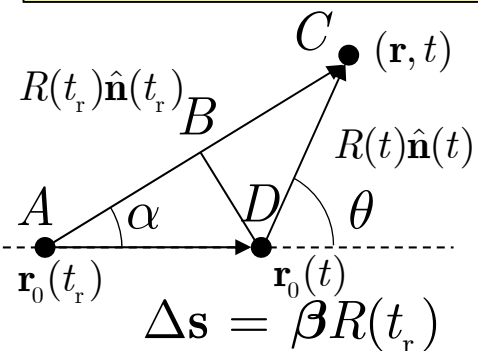
- Consideriamo i triangoli rettangoli BCD e BDA

$$BD = AD \sin \alpha = \Delta s \sin \alpha = \beta R(t_r) \sin \alpha$$

$$\overset{\overline{BD}^2}{\beta^2 R^2(t_r) \sin^2 \alpha} + \overset{\overline{BC}^2}{R^2(t_r) g^2(t_r)} = \overset{\overline{DC}^2}{R^2(t)}$$

$$\overset{AC}{R(t_r)} \sin \alpha = \overset{DC}{R(t)} \sin \theta$$

$$\beta^2 R^2(t) \sin^2 \theta + R^2(t_r) g^2(t_r) = R^2(t)$$



Campo di una carica con v costante

$$\beta^2 R^2(t) \sin^2 \theta + R^2(t_r) g^2(t_r) = R^2(t) \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \frac{(1 - \beta^2)(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta})}{R^2} \right]_{\text{ret}}$$

- **Otteniamo**

$$g^2(t_r) R^2(t_r) = R^2(t) (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)$$

$$g(t_r) = [1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}}(t_r)]$$

- **Pertanto**

$$g^3(t_r) R^3(t_r) = R^3(t) (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}$$

ricordiamo

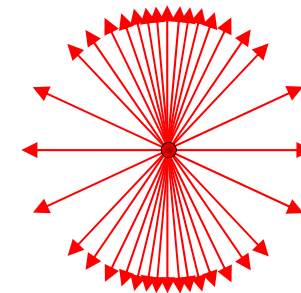
$$\hat{\mathbf{n}}(t_r) - \boldsymbol{\beta} = \frac{R(t)\hat{\mathbf{n}}(t)}{R(t_r)}$$

- **Inseriamo nell'espressione del campo**

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(1 - \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \frac{(1 - \beta^2)(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta})}{R^2} \right]_{\text{ret}}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(1 - \hat{\mathbf{n}}(t_r) \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \frac{(1 - \beta^2)\mathbf{R}(t)}{R^3(t_r)}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(1 - \beta^2)\mathbf{R}(t)}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2} R^3(t)}$$



**Identico al risultato
ottenuto in 167**



Potenziali di una carica con v costante

- Calcoliamo infine i potenziali di una carica che si muove con velocità v costante

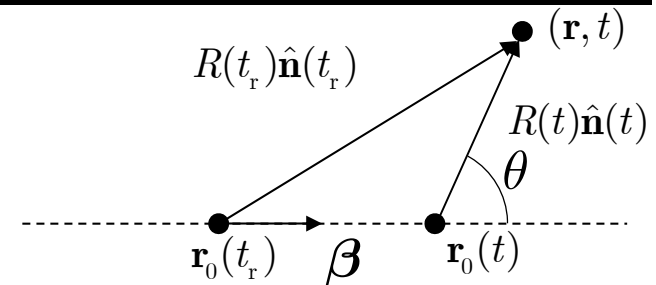
- Ricordiamo i risultati fin qui ottenuti

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t) = R(t)\hat{\mathbf{n}}(t) \quad \mathbf{r}_0(t) = \mathbf{v}t$$

$$R(t) = |\mathbf{r} - \mathbf{v}t| \quad t_r = t - \frac{R(t_r)}{c}$$

$$g(t) = 1 - \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \hat{\mathbf{n}}(t) \quad g^3(t_r)R^3(t_r) = R^3(t)(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}$$

$$g(t_r)R(t_r) = R(t)(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{1/2}$$



- Per il potenziale $\phi(\mathbf{r}, t)$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_r)|} \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta}(t_r) \cdot \hat{\mathbf{n}}(t_r)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \frac{1}{R(t)}$$

- Per il potenziale $A(\mathbf{r}, t)$

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{q\mathbf{v}(t_r)}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_r)|} \frac{1}{1 - \boldsymbol{\beta}(t_r) \cdot \hat{\mathbf{n}}(t_r)} = \frac{q\mathbf{v}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \frac{1}{R(t)}$$

Quantità di moto

- Un altro esempio sulla quantità di moto, apparente paradosso

- Consideriamo due sistemi di riferimento Σ e Σ'

- Σ' si muove da destra verso sinistra con velocità v'

- Supponiamo che nel sistema Σ' due cariche q_1 e q_2 si muovano con velocità opposte con lo stesso modulo v'

- Naturalmente nel sistema Σ la carica q_1 è ferma mentre la carica q_2 si muove con una velocità v

- Osserviamo innanzitutto che in entrambi i sistemi l'interazione fra le due cariche è solo elettrica

- Infatti il campo magnetico nella posizione delle cariche è nullo

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad \text{se } \mathbf{v} \text{ ed } \mathbf{E} \text{ sono paralleli segue che } \mathbf{B} = 0$$

- Il campo elettrico generato dalle due cariche è

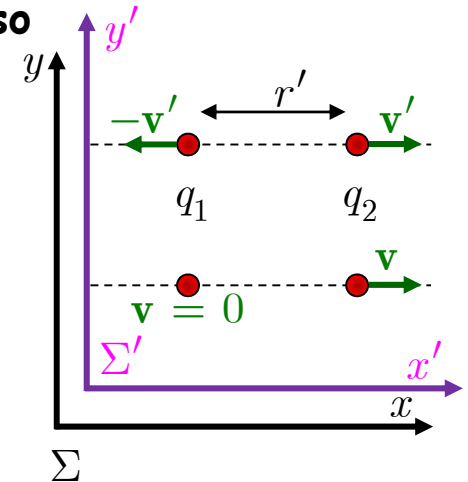
$$E_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{1,2}}{r'^2} \frac{1 - \beta'^2}{(1 - \beta'^2 \sin^2 \theta')^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{1,2}}{r'^2} (1 - \beta'^2)$$

$$\sin \theta' = 0 \quad \beta' = \frac{v'}{c}$$

- Nel sistema Σ' su ciascuna carica agisce la forza

$$\mathbf{F}_{1,2} = \pm \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r'^2} (1 - \beta'^2) \hat{\mathbf{e}}_{x'}$$

- Le due forze soddisfano la terza legge di Newton



Quantità di moto

- Analizziamo adesso il fenomeno nel sistema Σ

- Nella posizione della carica q_1 il campo elettrico è

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r^2} (1 - \beta^2) \hat{\mathbf{e}}_x \quad \mathbf{F}_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} (1 - \beta^2) \hat{\mathbf{e}}_x$$

- Nella posizione della carica q_2 il campo è elettrico è

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_x \quad \mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_x$$

- Osserviamo che le due forze agiscono sulla congiungente ma hanno moduli diversi

- La terza legge di Newton non è soddisfatta

- Ancora una volta la soluzione si trova attribuendo quantità di moto al campo

- Nella prossima diapositiva vedremo che la quantità di moto del campo è

$$\mathbf{p}_{EM} = q\mathbf{A} \quad \mathbf{A}(x, 0, 0, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_2 v}{r + vt} \hat{\mathbf{e}}_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q_2 v}{r + vt} \hat{\mathbf{e}}_x$$

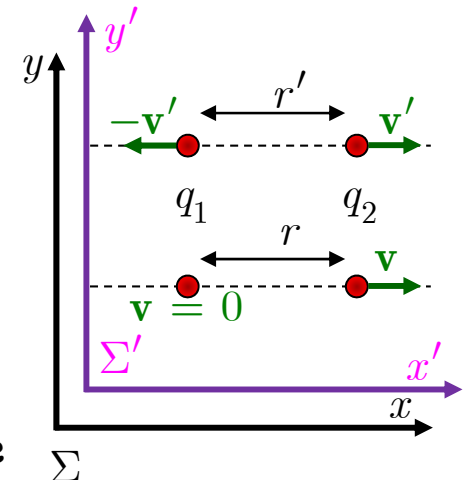
- Utilizzando la quantità di moto del campo vedremo che

$$\boxed{\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = -\frac{d\mathbf{p}_{EM}}{dt}} \quad \frac{d\mathbf{p}_{EM}}{dt} = q_2 \frac{d\mathbf{A}}{dt} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q_1 q_2 v^2}{(r + vt)^2} \hat{\mathbf{e}}_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 \beta^2}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_x$$

- Sommiamo $\mathbf{F}_{12}$ e $\mathbf{F}_{21}$

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 \beta^2}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_x$$

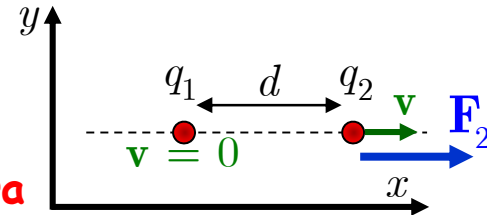
Jefimenko O. – European Journal of Physics 20 (1999) p. 39



Terza legge di Newton

- Il paradosso dell'apparente violazione della terza legge di Newton[†] può essere risolto nel modo seguente

- Abbiamo una carica q_1 ferma, supponiamo a $r_1 = 0$
- Una carica q_2 che si muove con velocità v verso destra



- La sua posizione al tempo t è $r_2(t) = vt = d$
- La carica q_1 genera il potenziale $\phi_1(\mathbf{r})$ indipendente dal tempo

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

- La carica q_2 genera i potenziali $\phi_2(\mathbf{r}, t)$, $A(\mathbf{r}, t)$

$$\phi_2(\mathbf{r}, t) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \frac{1}{((x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{q_2 \mathbf{v}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \frac{1}{((x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

- Calcoliamo la forza $\mathbf{F}_2$ esercitata da q_1 su q_2 : $\mathbf{F}_2 = q_2 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2)$

- Il campo $\mathbf{E}_1$ è un campo elettrostatico

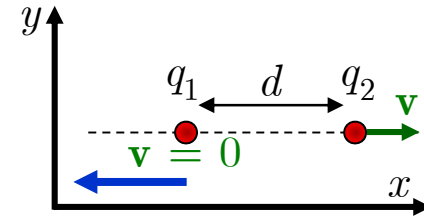
$$\mathbf{F}_2 = q_2 \mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2) = -q_2 \nabla \phi_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{e}}_r}{r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{e}}_x}{d^2}$$

• [†]Vedi Zangwill A. – Modern Electrodynamics CUP 2012 p. 511

Terza legge di Newton

- Calcoliamo la forza $\mathbf{F}_1$ sulla carica q_1
 - È generata dalla carica q_2 in movimento

$$\mathbf{F}_1 = q_1 \mathbf{E}_2(\mathbf{r}_1) = -q_1 \nabla \phi_2 - q_1 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$



- Calcoliamo il gradiente di ϕ_2

$$\phi_2(\mathbf{r}, t) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \frac{1}{((x - vt)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \equiv f_1(\mathbf{r}) f_2(\mathbf{r})$$

- Osserviamo preliminarmente che il calcolo finale andrà fatto per $\mathbf{r} = 0$

$$\nabla \phi_2(\mathbf{r}, t) = f_2(\mathbf{r}) \nabla f_1(\mathbf{r}) + f_1(\mathbf{r}) \nabla f_2(\mathbf{r})$$

- Si verifica facilmente che

$$\nabla f_1(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}=0} = 0 \quad f_1(0) = 1$$

- Otteniamo pertanto

$$\mathbf{F}_1 = -q_1 \nabla \phi_2 \Big|_{\mathbf{r}=0} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x - vt)\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y + z\hat{\mathbf{e}}_z}{\left[(x - vt)^2 + y^2 + z^2 \right]^{3/2}} \Big|_{\mathbf{r}=0} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{e}}_x}{v^2 t^2}$$

- Osserviamo che il modulo di questo contributo a $\mathbf{F}_1$ è uguale a quello di $\mathbf{F}_2$

Terza legge di Newton

- Riassumendo

$$\mathbf{F}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{e}}_x}{d^2} \quad \mathbf{F}_1 = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{e}}_x}{v^2 t^2} - q_1 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -q_1 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

- La terza legge di Newton sembra violata

- Alla forza corrisponde una variazione di quantità di moto

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \frac{d}{dt} \mathbf{p}_{\text{mech}}$$

- Concludiamo che per ripristinare la terza legge di Newton (e con essa la conservazione della quantità di moto) dobbiamo ipotizzare l'esistenza di una ulteriore quantità di moto $\mathbf{p}_{\text{EM}}$ tale che

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}_{\text{mech}} + \mathbf{p}_{\text{EM}}) = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dt} \mathbf{p}_{\text{EM}} = -\frac{d}{dt} \mathbf{p}_{\text{mech}} = q_1 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

- E infine

$$\mathbf{p}_{\text{EM}} = q_1 \mathbf{A}$$

- A questo stesso risultato si può giungere a partire dalla definizione[†] $\mathbf{g} = \frac{1}{c} \mathbf{S}$

- Nel sistema di riferimento in cui una delle cariche è a riposo, utilizzando il gauge di Coulomb e integrando su tutto lo spazio

- [†]Vedi Zangwill A. – Modern Electrodynamics CUP 2012, §15.5.3, p. 514



Radiazione

- Quando una carica subisce un'accelerazione si genera una perturbazione elettromagnetica che si disaccoppia dalle sorgenti che l'hanno generata
- La perturbazione generata viaggia allontanandosi dalla sorgente
- Trasporta energia e quantità di moto
 - La potenza (Joule al secondo) della radiazione, al tempo t , è data dal flusso del vettore di Poynting attraverso (ad esempio) la superficie A di una sfera di raggio r (con r molto grande)

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

$$P(r, t) = \frac{1}{\mu_0} \int_A (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}$$

- La potenza al tempo t deve essere uguale alla potenza della radiazione emessa dalla sorgente al tempo precedente $t_0 = t - r/c$

- Abbiamo pertanto

$$P_{\text{source}}(t_0) = P(r, t) = P\left(r, t_0 + \frac{r}{c}\right)$$

Il limite per $r \rightarrow \infty$ deve essere uguale a $P_{\text{source}}(t_0)$ e quindi indipendente da r

- Pertanto il flusso del vettore di Poynting non deve dipendere da r
- Il flusso del vettore di Poynting $\mathbf{S}$ su una sfera di raggio r vale circa

$$P = \frac{1}{\mu_0} \int_A (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} \sim |\mathbf{S}| 4\pi r^2 \quad P = \text{cost} \quad \longrightarrow \quad |\mathbf{S}_{\text{rad}}| \sim \frac{1}{r^2}$$

Radiazione

- Il ragionamento precedente ci dice che i campi statici o quasi statici che conosciamo non possono essere campi di radiazione $|\mathbf{S}_{\text{rad}}| \sim \frac{1}{r^2}$

- Ad esempio, per un campo statico

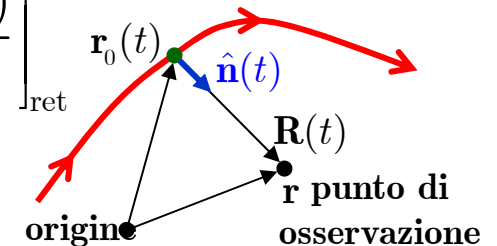
$$E \sim \frac{1}{r^2} \quad B \sim \frac{1}{r^2} \quad |\mathbf{S}| \sim \frac{1}{r^4}$$

- I campi derivati dai potenziali ritardati hanno dei termini che dipendono dalla derivata rispetto al tempo delle sorgenti e che variano come $1/r$

- Ad esempio consideriamo il campo elettrico (vedi diapositiva 468)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(1 - \beta^2)(\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta})}{g^3 R^2} + \frac{\hat{\mathbf{n}} \times ((\hat{\mathbf{n}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}})}{cg^3 R} \right]_{\text{ret}}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{n}}(t_r) \times \mathbf{E} \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t) = R(t)\hat{\mathbf{n}}(t)$$



- Contiene termini che hanno la dipendenza da $1/r$ corretta
- Per studiare la radiazione pertanto occorre
 - Studiare la soluzione per i campi a grande distanza dalla sorgente
 - Trascurare i termini che vanno a zero all'infinito più velocemente di $1/r$
 - Questi termini si annullano per grandi distanze
 - In particolare diventa nullo il loro flusso di energia attraverso una superficie

Radiazione di dipolo elettrico

- Consideriamo un sistema composto da due piccole sfere collegate da un cavo collegato ad un generatore di corrente. Il sistema è orientato lungo l'asse z

- Al tempo t le due sfere hanno carica

$$\pm q(t) = \pm q_0 \cos \omega t \quad \text{è un dipolo} \quad \mathbf{p}(t) = p_0 \hat{\mathbf{e}}_z \cos \omega t$$

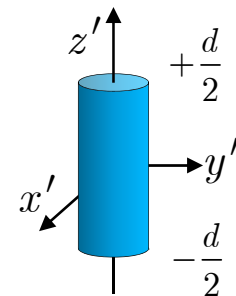
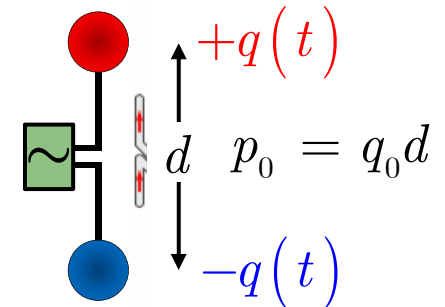
- Il generatore fornisce pertanto una corrente

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega \sin \omega t \quad I d\mathbf{l} \equiv I \hat{\mathbf{e}}_z dz.$$

- Calcoliamo il potenziale vettore $\mathbf{A}$ ritardato dovuto alle due cariche (v. 451)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' & t_r &= t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \frac{dz'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r) da' \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \frac{I(t_r) \hat{\mathbf{e}}_z dz'}{|\mathbf{r} - z' \hat{\mathbf{e}}_z|}$$



$$dV' = dz' da'$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{r} - z' \hat{\mathbf{e}}_z$$

Radiazione di dipolo elettrico

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} \frac{I(t_r) \hat{\mathbf{e}}_z dz'}{|\mathbf{r} - z' \hat{\mathbf{e}}_z|}$$

- **Applichiamo le approssimazioni**

- **La dimensione del dipolo molto minore della distanza** $|z'| < d \ll r$ **appr. 1**

- **Le varie approssimazioni di $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ sono**

$$|\mathbf{r} - z' \hat{\mathbf{e}}_z| = r \sqrt{1 + \frac{z'^2}{r^2} - 2 \frac{z'}{r} \cos \theta} \approx r \left(1 - \frac{z'}{r} \cos \theta\right) \approx r$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} I(t_r) \hat{\mathbf{e}}_z dz'$$

- **La corrente del dipolo è (vedi diapositiva 482)**

$$I(t_r) = -q_0 \omega \sin \omega(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| / c)$$

$$\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \approx \frac{r}{c} - \frac{z' \cos \theta}{c}$$

- **Il termine $z' \cos \theta / c$ è molto piccolo e si può fare uno sviluppo in serie di $\sin()$**

appr. 2

$$I(t_r) \approx -q_0 \omega \left[\sin \omega(t - r / c) + (z' \omega \cos \theta / c) \cos \omega(t - r / c) \right]$$

- **Assumiamo che $|z'| < d$ sia anche molto minore della lunghezza d'onda λ**

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \quad d \ll \frac{2\pi c}{\omega} \quad \frac{\omega d}{c} \ll 2\pi \quad \longrightarrow \quad \frac{\omega z'}{c} \sim \frac{\omega d}{c} \ll 2\pi \quad \text{l'ultimo termine è trascurabile}$$

- **La corrente approssimata è**

$$I(t_r) \approx -q_0 \omega \sin \omega(t - r / c)$$

Radiazione di dipolo elettrico

$$I(t_r) \approx -q_0 \omega \sin \omega(t - r / c)$$

- L'approssimazione fatta ($\omega z' / c$ trascurabile) significa che la velocità della carica ($\sim z' \omega$) è trascurabile rispetto a c (approssimazione non relativistica)
- Equivale a dire che i ritardi nella corrente non sono importanti
- La corrente si può portare fuori dall'integrale

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0 \omega q_0}{4\pi r} \hat{\mathbf{e}}_z \sin \omega(t - r / c) \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} dz'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0 \omega q_0 d}{4\pi r} \hat{\mathbf{e}}_z \sin \omega(t - r / c)$$

- Calcoliamo il potenziale scalare

- Per il potenziale scalare le approssimazioni fatte per $\mathbf{A}$ sono grossolane
- Vedi Feynman Lectures On Physics § 21.4 (pag. 21-8)

- Si può utilizzare l'equazione del gauge di Lorenz

(usiamo V invece di ϕ per evitare confusione)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}$$

- Calcoliamo la divergenza di $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_z}{\partial z} = -\frac{\mu_0 \omega q_0 d}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{r} \sin \omega(t - r / c) \right] \\ &= -\frac{\mu_0 \omega q_0 d}{4\pi} \left[-\frac{2z}{r^3} \sin(\omega t - r / c) + \frac{\omega}{r} \frac{z}{rc} \cos \omega(t - r / c) \right] \end{aligned}$$

Radiazione di dipolo elettrico

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 \omega q_0 d}{4\pi} \left[-\frac{1}{r^2} \frac{2z}{r} \sin(\omega t - r/c) + \frac{\omega}{rc} \frac{z}{r} \cos \omega(t - r/c) \right] \quad \boxed{\frac{z}{r} = \cos \theta}$$

- Trascuriamo $1/r^2$ rispetto a ω/rc

approssimazione 3 - $r \gg \lambda$

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} \approx -\frac{\mu_0 \omega q_0 d}{4\pi} \frac{\omega z}{r^2 c} \cos \omega(t - r/c) = -\frac{\mu_0 \omega q_0 d}{4\pi} \frac{\omega \cos \theta}{rc} \cos \omega(t - r/c)$$

- Riepilogando

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 \omega q_0 d}{4\pi} \frac{\omega \cos \theta}{rc} \cos \omega(t - r/c) \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}$$

- Possiamo calcolare il potenziale scalare

$$V(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\partial V}{\partial t} dt = c^2 \int \frac{\mu_0 \omega q_0 d}{4\pi} \frac{\omega \cos \theta}{rc} \cos \omega(t - r/c) dt$$

$$\boxed{V(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 c \omega q_0 d}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r} \sin \omega(t - r/c)}$$

- Abbiamo posto uguale a zero la costante di integrazione

Radiazione di dipolo elettrico

- In previsione della derivazione dei campi E e B esprimiamo A in coordinate sferiche

- Ricordiamo che

$$\hat{e}_z = \hat{e}_r \cos \theta - \hat{e}_\theta \sin \theta$$

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &= \sin \theta \cos \phi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \phi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z \\ \hat{e}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \hat{e}_x + \cos \theta \sin \phi \hat{e}_y - \sin \theta \hat{e}_z \\ \hat{e}_\phi &= -\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y\end{aligned}$$

- I potenziali sono pertanto ($p_0 = q_0 d$)

$$V(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 c p_0 \omega \cos \theta}{4\pi r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

$$\mathbf{A}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} (\hat{e}_r \cos \theta - \hat{e}_\theta \sin \theta) \sin \omega \left(t - r / c \right)$$

- Calcoliamo il gradiente di V $\nabla V = \hat{e}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \hat{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi}$

$$= -\frac{\mu_0 c p_0 \omega}{4\pi} \left\{ \hat{e}_r \cos \theta \left[-\frac{1}{r^2} \sin \omega \left(t - r / c \right) - \frac{\omega}{rc} \cos \omega \left(t - r / c \right) \right] - \hat{e}_\theta \frac{\sin \theta}{r^2} \sin \omega \left(t - r / c \right) \right\}$$

- Trascuriamo i termini $1/r^2$ rispetto a ω/rc (approssimazione 3)

$$\nabla V = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r} \hat{e}_r \cos \omega \left(t - r / c \right)$$

Radiazione di dipolo elettrico

$$\nabla V = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r} \hat{\mathbf{e}}_r \cos \omega(t - r/c)$$

- **Inoltre**

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} (\hat{\mathbf{e}}_r \cos \theta - \hat{\mathbf{e}}_\theta \sin \theta) \cos \omega(t - r/c)$$

- **Otteniamo infine il campo elettrico di radiazione** $\mathbf{E}_{\text{rad}} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$

$$= -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\cos \theta}{r} \hat{\mathbf{e}}_r \cos \omega(t - r/c) + \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi r} (\hat{\mathbf{e}}_r \cos \theta - \hat{\mathbf{e}}_\theta \sin \theta) \cos \omega(t - r/c)$$

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(r, \theta, t) = -\hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} \cos \omega(t - r/c)$$

- **Per il campo magnetico** $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (\sin \theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right] \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

$$\mathbf{B}(r, \theta, t) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

Radiazione di dipolo elettrico

$$\mathbf{A}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} (\hat{\mathbf{e}}_r \cos \theta - \hat{\mathbf{e}}_\theta \sin \theta) \sin \omega(t - r/c) \quad \mathbf{B}(r, \theta, t) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

- **Calcoliamo le derivate**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \frac{\sin \theta}{r} \cos \omega(t - r/c) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} = \frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \frac{\sin \theta}{r^2} \sin \omega(t - r/c)$$

- **Il secondo termine va come $1/r^2$ ed è trascurabile rispetto al primo** appr. 3

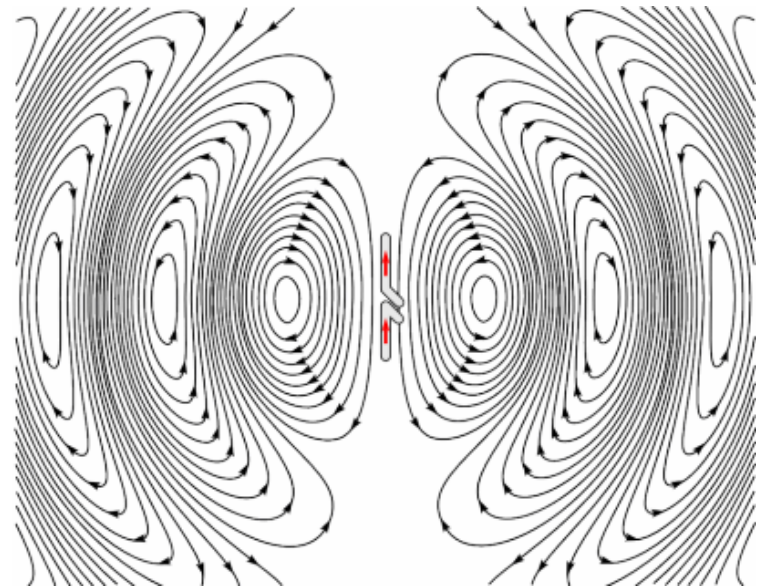
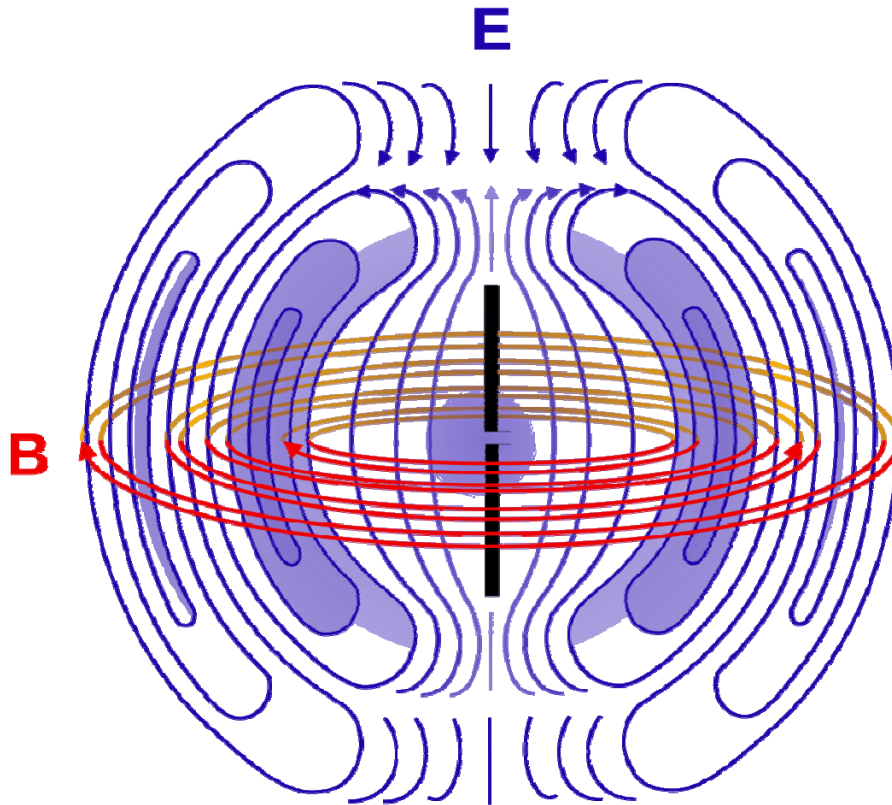
- **Concludiamo**

$$\mathbf{B}_{\text{rad}}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \frac{\sin \theta}{r} \hat{\mathbf{e}}_\phi \cos \omega(t - r/c)$$

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r} \hat{\mathbf{e}}_\theta \cos \omega(t - r/c)$$

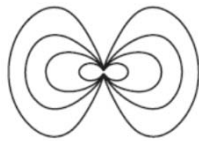
- **Come previsto la soluzione è un'onda elettromagnetica che si propaga in direzione radiale $\hat{\mathbf{e}}_r$**
 - **I campi $\mathbf{E}_{\text{rad}}$ e $\mathbf{B}_{\text{rad}}$ sono perpendicolari alla direzione di propagazione**
 - **Inoltre sono perpendicolari fra di loro e $E_{\text{rad}}/B_{\text{rad}} = c$**
 - **Osserviamo che non è un'onda piana bensì un'onda sferica**

Radiazione di dipolo elettrico

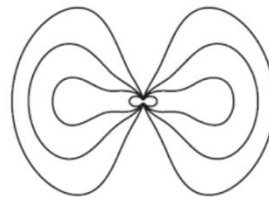


La nascita della radiazione

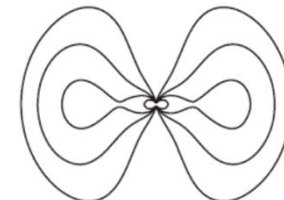
- Uno studio accurato[†] dei campi trovati permette di comprendere meglio come si forma la radiazione
 - Un campo disaccoppiato dalle sorgenti
 - Le figure mostrano l'evoluzione nel tempo di alcune linee del campo E



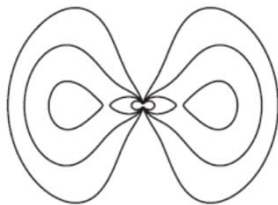
0.000 T



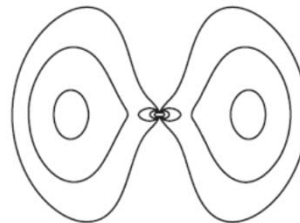
0.143 T



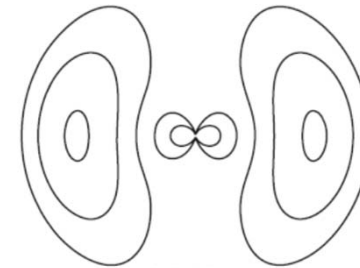
0.158 T



0.160 T



0.210 T



0.318 T



0.158 T



0.159 T



0.160 T

- [†]Vedi Zangwill A. – Modern Electrodynamics CUP 2012 p. 731