
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 36 - 16.05.2022

Quantità di moto del campo elettromagnetico

Quantità di moto dell'onda e.m.

Riflessione e trasmissione

Incidenza normale e obliqua

Anno Accademico 2022/2023

Quantità di moto

- Abbiamo visto il campo elettrico generato da una carica in moto **rettilineo uniforme** (vedi diapositiva **167**)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \hat{\mathbf{e}}_r \quad \cos \theta = \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_z$$

- Una carica in movimento genera anche un campo magnetico

- Abbiamo derivato l'espressione del campo magnetico $\mathbf{B}$ (vedi diapositiva **208**)

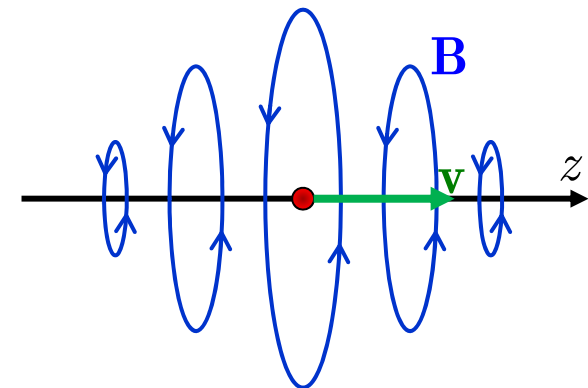
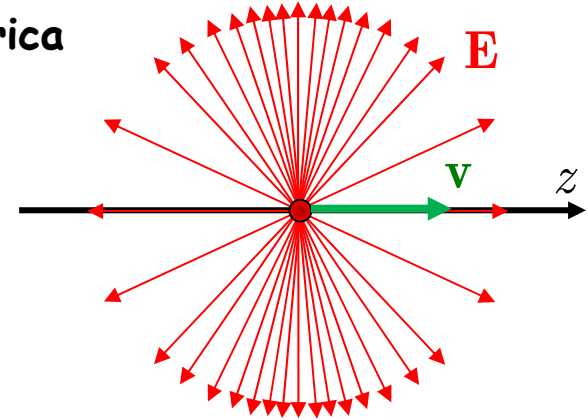
$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}$$

- Le linee di campo sono delle circonferenze centrate sulla traiettoria

- L'intensità del campo magnetico dipende dall'angolo θ

- La forma dei campi appena introdotta permette di convincersi che in elettrodinamica è necessario introdurre anche il concetto di quantità di moto del campo elettromagnetico

- A tal fine consideriamo un esempio



Quantità di moto

- Come esempio consideriamo due cariche q_1 e q_2 in movimento ($v_1 = v_2$)

- Le due cariche generano un campo elettrico E secondo la formula della diapositiva precedente

- Le forze elettriche sono (le distanze da O sono uguali)

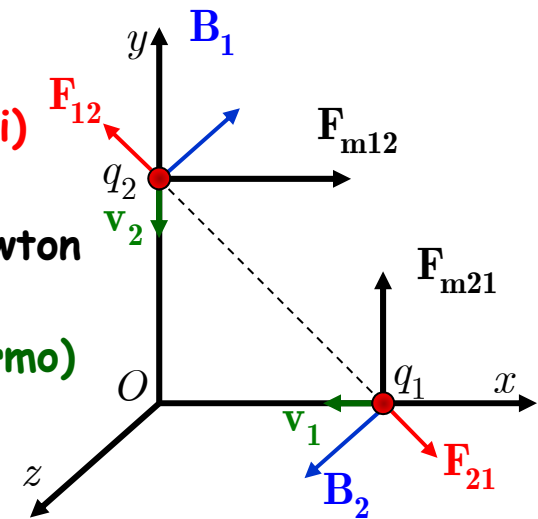
$$F_{12} = q_2 E_1 \quad F_{21} = q_1 E_2 \quad F_{12} = -F_{21}$$

- Le forze elettriche rispettano la terza legge di Newton
- Le due cariche generano anche un campo magnetico
- I campi magnetici B_1 e B_2 (perpendicolari allo schermo)
- Le forze sulle due cariche sono date dalla legge di Lorentz

$$F_{m12} = q_2 v_2 \times B_1 \quad F_{m21} = q_1 v_1 \times B_2$$

- Si verifica facilmente che le due forze magnetiche hanno lo stesso modulo
- Tuttavia le due forze magnetiche non agiscono lungo la congiungente
- Non obbediscono alla terza legge di Newton
- La violazione della terza legge di Newton sarebbe molto grave
- La conservazione della quantità di moto dipende dalla terza legge
- Il problema viene risolto dall'introduzione della quantità di moto del campo elettromagnetico

- Vedi: Keller J.M. – Newton's Third Law and Electrodynamics - American Journal of Physics 10, p. 302 (1948)



Quantità di moto

- Troviamo adesso un'espressione per la quantità di moto del campo elettromagnetico simile a quella dell'energia

- Per l'energia avevamo trovato

$$(\mathbf{p}_{\text{mech}})_i = \left(\begin{matrix} q.moto \\ materia \end{matrix} \right)_i$$

$$(\mathbf{p}_{EM})_i = \left(\begin{matrix} q.moto \\ campo \end{matrix} \right)_i$$

- Vogliamo trovare

$$\frac{dW}{dt} = - \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} - \frac{\partial U_{EM}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{p}_{\text{mech}})_i = - \left(\begin{matrix} \text{flusso} \\ q.moto \end{matrix} \right)_i - \left(\frac{\partial \mathbf{p}_{EM}}{\partial t} \right)_i$$

Si dimostra che

$$\mathbf{p}_{EM} = \int_V \mathbf{g} dV$$

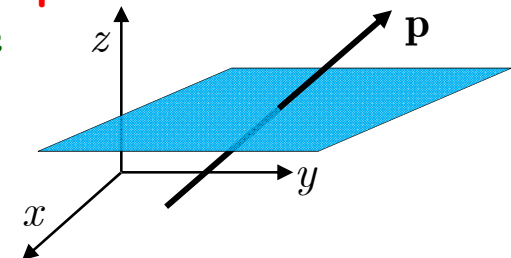
$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}$$

- È una relazione più complicata: ci sono tre componenti $i = x, y, z$

- La quantità di moto è un vettore
- Il flusso attraverso una superficie deve essere un vettore
- La grandezza corrispondente a $\mathbf{S}$ non può essere un vettore
 - È un tensore: il tensore degli stress di Maxwell

- Pensiamo al flusso di quantità di moto attraverso una superficie

- Ad esempio una superficie attraversata da particelle
 - Il flusso attraverso la superficie $(x-y)$ produce quantità di moto nelle tre direzioni
 - Lo stesso attraverso superfici $x-z$ e $y-z$



Quantità di moto

$$\frac{dW}{dt} = - \oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} - \frac{\partial U_{EM}}{\partial t} \longrightarrow \left(\frac{\partial \mathbf{p}_{\text{mech}}}{\partial t} \right)_i = - \left(\text{flusso} \right)_i - \left(\frac{\partial \mathbf{p}_{EM}}{\partial t} \right)_i$$

- Il termine a primo membro rappresenta la variazione di quantità di moto all'interno di un volume V nell'unità di tempo

- La variazione di quantità di moto è la forza che agisce sulla materia

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{\text{mech}}}{\partial t} = \mathbf{F} \quad \text{Ricordiamo l'espressione della forza di Lorentz} \quad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Introduciamo la forza per unità di volume

$$\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

$$\rho\mathbf{v} = \mathbf{J}$$

- Si potrebbe procedere in modo analogo a quanto fatto per il teorema di Poynting

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{\text{mech}}}{\partial t} = \mathbf{F} = \int_V \mathbf{f} dV = \int_V (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV$$

- Si introducono ρ e $\mathbf{J}$ nell'espressione utilizzando le equazioni Maxwell
- Si elabora l'espressione utilizzando le altre equazioni e opportune identità vettoriali
- Il calcolo è lungo e non particolarmente illuminante
- Si può consultare Griffiths § 8.2.2



Quantità di moto

- Si giunge al risultato

$$\left(\frac{\partial \mathbf{p}_{\text{mech}}}{\partial t} \right)_i = \oint_{\partial V} \sum_j T_{ij} n_j da - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \int_V \mathbf{S} dV \right)_i$$

- Il primo membro è la componente i di un vettore
- La quantità fra parentesi del secondo termine del secondo membro è la componente i di un vettore che rappresenta la quantità di moto del campo
- Introduciamo la densità di quantità di moto

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}$$

Notiamo che $\mathbf{g}$ è proporzionale
al vettore di Poynting

$$\mathbf{p}_{EM} = \int_V \mathbf{g} dV$$

- Il primo termine nel secondo membro rappresenta il flusso di quantità di moto al secondo attraverso la superficie che delimita il volume

$$\oint_{\partial V} \sum_j T_{ij} n_j da \quad T_{ij} = \varepsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{E^2}{2} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{B^2}{2} \delta_{ij} \right)$$

- La grandezza T_{ij} è il Tensore degli Stress di Maxwell
- L'integrale di superficie (un flusso) deve produrre un vettore
- D'altro canto il flusso è il prodotto di un vettore e la normale alla superficie
- Per questo motivo nell'integrando compare un tensore

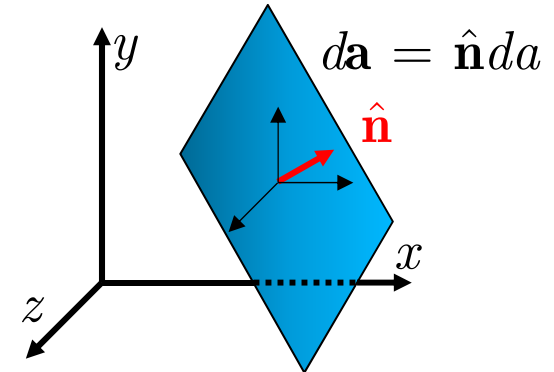


Il tensore degli stress di Maxwell

- Esaminiamo ancora l'integrale

$$\oint_{\partial V} \sum_j T_{ij} n_j da$$

- Deve produrre tre componenti
 - Consideriamo la componente i
- Consideriamo inoltre l'elemento di superficie da
 - Attraverso questa superficie il campo contribuisce quantità di moto lungo la direzione i tramite le tre proiezioni di da nelle direzioni x, y, z
 - Proiettiamo la superficie da nelle tre direzioni degli assi



$$da = da(\hat{n}_x \hat{e}_x + \hat{n}_y \hat{e}_y + \hat{n}_z \hat{e}_z) = da(\hat{n}_1 \hat{e}_1 + \hat{n}_2 \hat{e}_2 + \hat{n}_3 \hat{e}_3)$$

- L'integrando della componente i è pertanto

$$T_{i1} \hat{n}_1 da + T_{i2} \hat{n}_2 da + T_{i3} \hat{n}_3 da$$

- Infine scriviamo la legge di conservazione in forma differenziale

$$\left(\rho \mathbf{E} + \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right)_i = \left(\mathbf{f} \right)_i = \partial_j T_{ij} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{S}}{c^2} \right)_i \quad \partial_j T_{ij} \equiv \sum_j \partial_j T_{ij}$$

È la "divergenza" del tensore



Il tensore degli stress di Maxwell

- Per meglio comprendere il significato e l'uso del tensore degli Stress di Maxwell risolviamo il seguente problema

- Consideriamo una sfera di raggio R e carica Q $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$
- Immaginiamo che la sfera sia divisa in due emisferi
 - Calcolare la forza su ciascun emisfero

- Il problema si può risolvere con metodi standard

- Sappiamo che all'interno della sfera il campo è $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{R^3}$ $\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$

- L'elemento di volume interno alla sfera è

$$dv = r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr$$

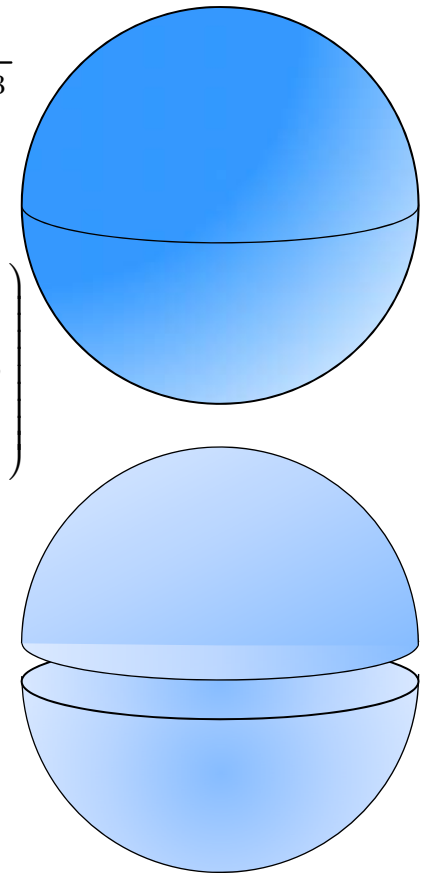
- La forza esercita sull'elemento di volume dv è

$$d\mathbf{F} = dq\mathbf{E} = \rho dv\mathbf{E}$$

- La forza totale è

$$\mathbf{F} = \frac{\rho Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3} \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \mathbf{r} r^2 \sin \theta d\theta$$

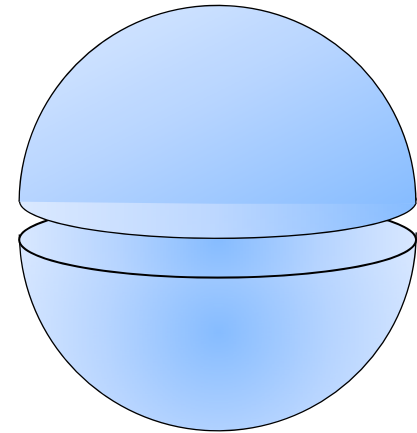
- Si verifica facilmente che l'unico contributo diverso da zero è F_z



Il tensore degli stress di Maxwell

- La forza è pertanto

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{\rho Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3} \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos\theta r^2 \sin\theta d\theta \\ &= \frac{\rho Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3} \frac{1}{4} R^4 2\pi \int_0^1 \cos\theta d\cos\theta = \frac{\rho Q}{16\epsilon_0} R \end{aligned}$$

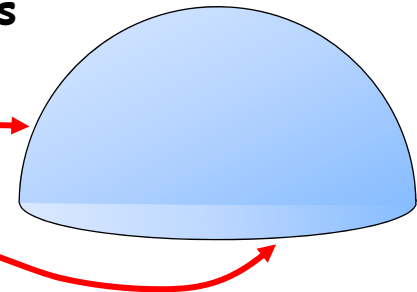


- In definitiva, la forza sull'emisfero superiore è

$$\mathbf{F} = \frac{3Q^2}{64\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{e}}_z \quad \rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

- Ripetiamo adesso il calcolo utilizzando il tensore degli stress

- Bisogna calcolare il flusso di T_{ij} attraverso la superficie dell'emisfero
 - Attraverso la superficie della calotta
 - Attraverso la base della calotta
- Per brevità calcoliamo solo la componente z delle forze
 - Sappiamo già che le altre componenti sono nulle
 - Si potrebbe trarre la stessa conclusione con argomenti di simmetria

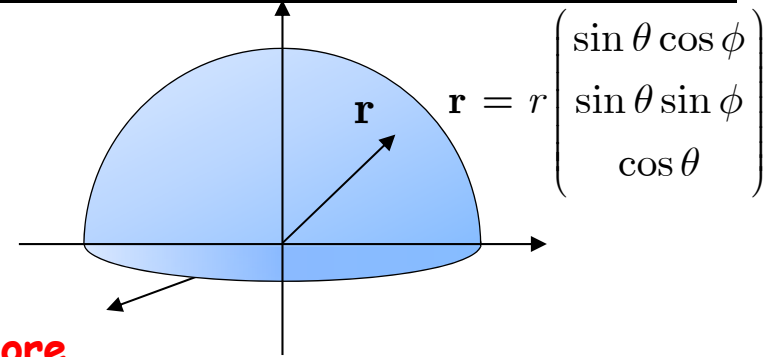


Il tensore degli stress di Maxwell

- Le componenti cartesiane del campo sono

$$\mathbf{E} = k\mathbf{r} \quad \begin{aligned} E_x &= kr \sin \theta \cos \phi \\ E_y &= kr \sin \theta \sin \phi \\ E_z &= kr \cos \theta \end{aligned}$$

$$k = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$



- Scriviamo le componenti necessarie del tensore

$$T_{zx} / \epsilon_0 = E_z E_x = k^2 r^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi \quad T_{zy} / \epsilon_0 = E_z E_y = k^2 r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi$$

$$T_{zz} / \epsilon_0 = E_z E_z - \frac{1}{2} E^2 = k^2 r^2 \cos^2 \theta - \frac{1}{2} k^2 r^2 = \frac{1}{2} k^2 r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

- L'elemento di superficie sulla calotta sferica è $da = R^2 \sin \theta d\phi d\theta \hat{\mathbf{r}}$

- Le componenti sono

$$da_x = R^2 \sin \theta d\phi d\theta \hat{r}_x = R^2 \sin^2 \theta \cos \phi d\phi d\theta$$

$$da_y = R^2 \sin \theta d\phi d\theta \hat{r}_y = R^2 \sin^2 \theta \sin \phi d\phi d\theta$$

$$da_z = R^2 \sin \theta d\phi d\theta \hat{r}_z = R^2 \sin \theta \cos \theta d\phi d\theta$$

- Il contributo alla forza della calotta F_c è pertanto

$$F_{cz} = \int T_{zx} da_x + T_{zy} da_y + T_{zz} da_z = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \epsilon_0 k^2 R^4 I(\theta, \phi)$$

$$I(\theta, \phi) = \sin^3 \theta \cos \theta \cos^2 \phi + \sin^3 \theta \cos \theta \sin^2 \phi + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \sin^2 \theta$$



Il tensore degli stress di Maxwell

$$\begin{aligned}
 I(\theta, \phi) &= \sin^3 \theta \cos \theta \cos^2 \phi + \sin^3 \theta \cos \theta \sin^2 \phi + \\
 &\quad \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \sin^2 \theta \\
 &= \sin^3 \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \sin^2 \theta \\
 &= \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta (2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta
 \end{aligned}$$

$$k = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3}$$

• **Pertanto**

$$F_{cz} = \frac{\epsilon_0}{2} k^2 R^4 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\epsilon_0}{2} k^2 R^4 \pi = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2}$$

• **Rimane da calcolare il contributo della superficie inferiore**

• **L'elemento di superficie sulla base equatoriale è**

• **Sulla superficie inferiore ($\theta = \pi/2$)**

$$F_{bz} = \int T_{zz} da_z$$

$$da = -rdrd\phi \hat{e}_z$$

$$da_z = -rdrd\phi$$

$$T_{zz} = \frac{\epsilon_0}{2} k^2 r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \rightarrow T_{zz} = -\frac{\epsilon_0}{2} k^2 r^2$$

$$F_{bz} = \frac{\epsilon_0}{2} k^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^3 dr = \epsilon_0 \pi k^2 \frac{R^4}{4} = \frac{Q^2}{64\pi\epsilon_0 R^2}$$

• **La forza totale è**

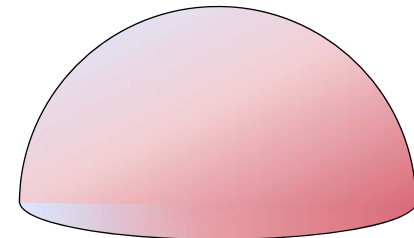
$$F_z = F_{cz} + F_{bz} = \frac{3Q^2}{64\pi\epsilon_0 R^2}$$

In accordo con il risultato della diapositiva 413



Il tensore degli stress di Maxwell

- Non è obbligatorio utilizzare la superficie dell'emisfero
 - È sufficiente utilizzare una superficie che contiene la carica sulla quale vogliamo effettuare il calcolo
 - Eventualmente anche nel caso magnetico
 - Una superficie chiusa che contiene tutte le cariche e le correnti di interesse
- Possiamo utilizzare una superficie differente
 - Ad esempio una calotta più grande
- Al crescere del raggio della semisfera il contributo della superficie sferica tende a zero
 - Bisogna tuttavia aggiungere il contributo della superficie piana da $r = R$ a $r = \infty$
- Per $r > R$ il campo elettrico E giace sulla superficie e ha modulo
 - La componente di T_{ij} di interesse è T_{zz}



$$F_{cz} \sim \frac{Q^2}{R^2} \rightarrow 0$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

$$T_{zz} = \epsilon_0 E_z E_z - \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = -\frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{1}{r^4}$$

L'elemento di superficie è lo stesso di prima $da_z = -rdrd\phi$

$$F_{ez} = \int T_{zz} da_z = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_R^\infty r dr \frac{1}{r^4} = \frac{Q^2}{32\pi \epsilon_0} \frac{2\pi}{2R^2}$$

$$F_{ez} = \frac{Q^2}{32\pi \epsilon_0 R^2}$$



Il tensore degli stress di Maxwell

- Riassumendo

- Il contributo del piano per $r < R$ è

$$F_{bz} = \frac{Q^2}{64\pi\epsilon_0 R^2}$$

- Il contributo restante del piano ($R \rightarrow \infty$) $F_{ez} = \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2}$

- Complessivamente la forza è

$$F_z = F_{bz} + F_{ez} = \frac{Q^2}{64\pi\epsilon_0 R^2} + \frac{Q^2}{32\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{3Q^2}{64\pi\epsilon_0 R^2}$$

- In accordo con il risultato precedente

- Il risultato trovato è molto importante e utile

- Si può' calcolare la forza su un sistema complicato di cariche (e correnti) ignorandone i dettagli calcolando il flusso del tensore degli stress su una superficie chiusa arbitraria (conveniente) che racchiude tutto il sistema di interesse

- Esercizio

- Riprodurre la forza di Coulomb fra due cariche utilizzando il tensore degli stress di Maxwell



Energia e quantità di moto dell'onda

- Le leggi che abbiamo visto generalizzano la conservazione dell'energia e della quantità di moto tenendo conto anche
 - Dell'energia del campo **elettromagnetico**
 - Della quantità di moto del campo **elettromagnetico**
- Un'onda elettromagnetica è un campo elettromagnetico
 - Consideriamo un'onda piana monocromatica con polarizzazione lineare $\hat{n}$ (**392**)

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \hat{n} \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \hat{k} \times \hat{n}$$

- Trasporta **energia e quantità di moto**
- Calcoliamo la densità di energia

$$u_{EM} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + \frac{1}{2\mu_0 c^2} E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$
$$\frac{1}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0 \quad \longrightarrow \quad u_{EM} = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

- Osserviamo che in un'onda polarizzata linearmente i contributi del campo elettrico e del campo magnetico sono uguali
 - L'energia dell'onda varia nello spazio e nel tempo ed è trasportata nello spazio-tempo
 - Il vettore di Poynting **descrive** il flusso di energia
- Per onda con polarizzazione circolare sono diversi**

Energia e quantità di moto dell'onda

- Calcoliamo il vettore di Poynting dell'onda piana con polarizzazione lineare
 - Ricordiamo che le sue dimensioni sono energia per secondo per metro quadrato

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \hat{\mathbf{n}} \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0 c^2} c E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) - \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = \hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) c \hat{\mathbf{k}}$$

- In definitiva

$$\mathbf{S} = u_{EM} c \hat{\mathbf{k}}$$

- La densità di quantità di moto associata con l'onda è data da

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} = \frac{u_{EM}}{c} \hat{\mathbf{k}}$$

Energia e quantità di moto dell'onda

- Nel caso di un'onda di luce abbiamo visto che le frequenze sono molto elevate

- Frequenze dell'ordine di $\nu \sim 10^{16}$ Hz, lunghezze d'onda $\lambda \sim 10^{-7}$ m

- Tipiche misure macroscopiche sono medie nel tempo su molti cicli dell'onda

- Ad esempio, l'occhio umano fa medie in tempi dell'ordine di ms
- Si definiscono pertanto medie temporali
- Ricordiamo che

$$\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

- Infatti

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = a$$

$$2a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\sin^2 t + \cos^2 t] dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt = \frac{1}{2\pi} 2\pi = 1 \quad a = \frac{1}{2}$$

- Otteniamo pertanto

$$\langle u_{EM} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \quad \langle S \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 c \hat{\mathbf{k}} \quad \langle \mathbf{g} \rangle = \frac{1}{2c} \varepsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{k}}$$

- Si definisce intensità dell'onda (energia per unità di superficie per secondo)

NB: Polarizzazione lineare

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 c \quad [I] = \text{Jm}^{-2}\text{s}^{-1}$$

Energia e quantità di moto dell'onda

- Supponiamo che un'onda elettromagnetica incida su una superficie **perfettamente** assorbente
- La **radiazione elettromagnetica** assorbita trasferisce quantità di moto **alla superficie**
- Calcoliamo la quantità di moto contenuta in un parallelepipedo di area A e spessore cdt

$$dp = \langle \mathbf{g} \rangle A c dt \quad \langle \mathbf{g} \rangle = \frac{1}{2c} \varepsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{k}}$$

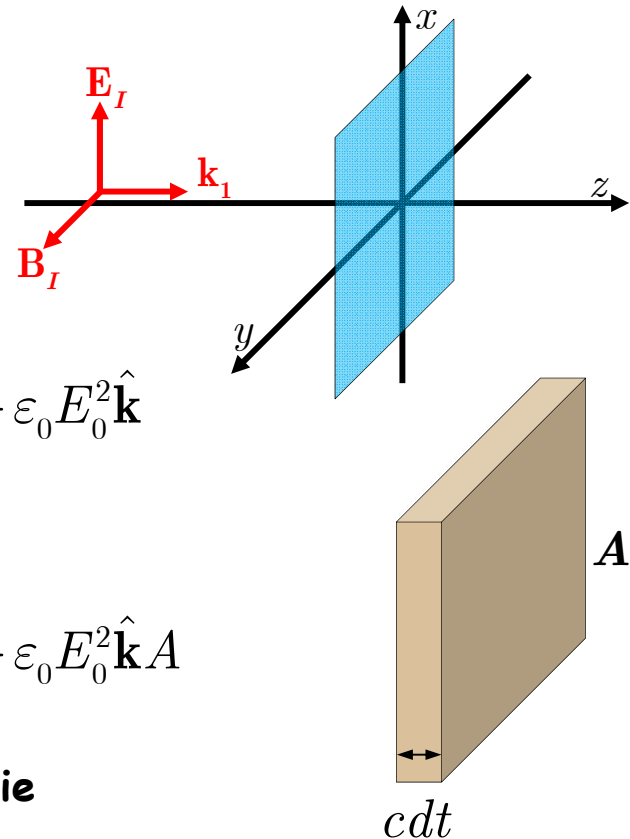
$$dp = \frac{1}{2c} \varepsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{k}} A c dt = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{k}} A dt$$

- La **forza sulla superficie** A è $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{k}} A$

- La **pressione** è la forza per unità di superficie

$$\frac{F}{A} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \quad \text{Pressione di radiazione}$$

- Se la **superficie è perfettamente riflettente** la **pressione raddoppia**



Energia e quantità di moto dell'onda

- Calcoliamo la pressione di radiazione della luce solare su una superficie perfettamente assorbente

- La potenza della luce solare incidente sulla superficie della terra è circa 1300 W/m^2

- Questa è l'intensità dell'onda $I = 1300 \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1}$

- Supponiamo che sia un'onda piana con polarizzazione lineare

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 c \qquad \frac{F}{A} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{I}{c}$$

- La pressione di radiazione è

$$\frac{F}{A} = \frac{1.3 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} = 4.3 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$$

- Confrontiamo con la pressione atmosferica $\frac{F}{A} = 1.05 \times 10^5 \text{ N/m}^2$

- La pressione di radiazione è pertanto $4.3 \times 10^{-11} \text{ atm}$ (molto piccola)

Propagazione nella materia

- In assenza di cariche e correnti libere, le equazioni di Maxwell nella materia assumono la forma (vedi diapositiva [370](#))

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

- Per un mezzo lineare

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \mathbf{B}$$

- All'interno di ciascun mezzo avremo

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- Naturalmente nel passaggio da un mezzo all'altro bisogna tenere conto delle discontinuità dei campi
- Da un punto di vista matematico l'unica differenza con le equazioni nel vuoto (senza materia) è avere sostituito le costanti μ_0 e ε_0 con μ e ε
- Le soluzioni saranno onde che viaggiano con velocità v diversa da c

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n} \quad n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$

- La costante n è l'indice di rifrazione della sostanza
 - Per molte sostanze $\mu_r \approx 1$ e l'indice di rifrazione è determinato solo da ε_r
 - La "costante" ε_r dipende molto dalla frequenza

Propagazione nella materia

- Il vettore di Poynting diventa

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

- Nelle onde piane monocromatiche la frequenza ω e il vettore d'onda k sono legate tramite la velocità dell'onda nel mezzo: $\omega = kv$
- I campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono legati anch'essi tramite v

$$E = \frac{1}{v} B$$

- Per finire l'intensità dell'onda è data da (polarizzazione lineare)

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon v E_0^2$$

- Studiamo adesso la propagazione di un'onda piana che attraversa il confine fra due mezzi lineari caratterizzati da costanti ε_1, μ_1 e ε_2, μ_2
- Si formano un'onda trasmessa e un'onda riflessa
 - Studieremo il fenomeno per incidenza normale e incidenza obliqua
 - Saranno necessarie le condizioni all'interfaccia (vedi diapositiva [370](#))

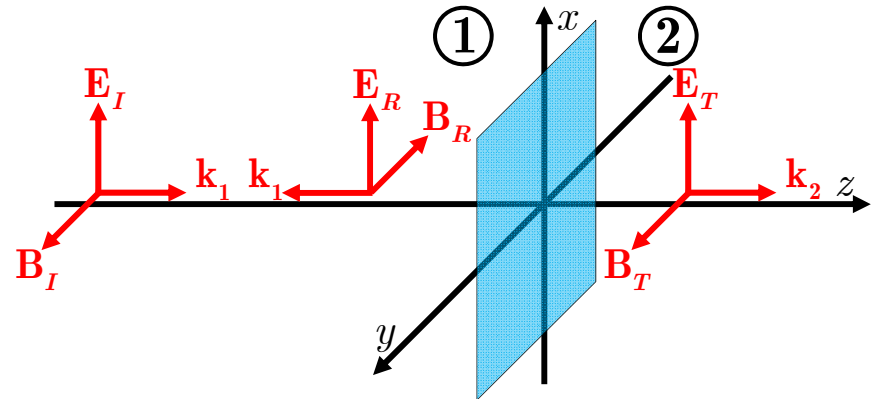
$$\varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp} \quad \mathbf{E}_{1\parallel} = \mathbf{E}_{2\parallel} \quad B_{1\perp} = B_{2\perp} \quad \frac{1}{\mu_1} B_{1\parallel} = \frac{1}{\mu_2} B_{2\parallel}$$

Incidenza normale

- Supponiamo che l'interfaccia fra il mezzo 1 e il mezzo 2 sia il piano $z = 0$
- Le velocità di propagazione nei due mezzi sono v_1 e v_2

$$\tilde{\mathbf{E}}_I(z, t) = \hat{\mathbf{e}}_x \tilde{E}_{0I} e^{i(\omega t - k_1 z)}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_I(z, t) = \hat{\mathbf{e}}_y \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0I} e^{i(\omega t - k_1 z)}$$



- Un'onda piana I viaggia nel senso positivo dell'asse z incide sul piano $z = 0$
- Sono generate un'onda riflessa R e un'onda trasmessa T

$$\tilde{\mathbf{E}}_R(z, t) = \hat{\mathbf{e}}_x \tilde{E}_{0R} e^{i(\omega t + k_1 z)}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_R(z, t) = -\hat{\mathbf{e}}_y \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0R} e^{i(\omega t + k_1 z)}$$

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{v} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$$

vedi [392](#)

$$\tilde{\mathbf{E}}_T(z, t) = \hat{\mathbf{e}}_x \tilde{E}_{0T} e^{i(\omega t - k_2 z)}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_T(z, t) = \hat{\mathbf{e}}_y \frac{1}{v_2} \tilde{E}_{0T} e^{i(\omega t - k_2 z)}$$

- Abbiamo utilizzato la stessa frequenza per le tre onde
 - Vedremo che l'uguaglianza è conseguenza delle condizioni all'interfaccia
- Abbiamo visto che i moduli dei vettori $\mathbf{k}$ sono legati alle frequenze: $\omega = kv$

Incidenza normale

- Nella regione 1 il campo elettromagnetico totale è dato da

$$\tilde{\mathbf{E}}_1 = \tilde{\mathbf{E}}_I + \tilde{\mathbf{E}}_R \quad \tilde{\mathbf{B}}_1 = \tilde{\mathbf{B}}_I + \tilde{\mathbf{B}}_R$$

- Nella regione 2 il campo

elettromagnetico è dato da $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_T$ e $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_T$

- Imponiamo le condizioni all'interfaccia per $z = 0$
- Le condizioni sulle componenti normali sono banali dato che queste sono nulle
 - Esaminiamo la condizione su $E_{\parallel}$ e consideriamo le frequenze diverse

$$\mathbf{E}_{1\parallel}(0, t) = \mathbf{E}_{2\parallel}(0, t) \longrightarrow \hat{\mathbf{e}}_x \tilde{E}_{0I} e^{i(\omega t - k_1 z)} + \hat{\mathbf{e}}_x \tilde{E}_{0R} e^{i(\omega' t + k_1 z)} = \hat{\mathbf{e}}_x \tilde{E}_{0T} e^{i(\omega'' t - k_2 z)}$$

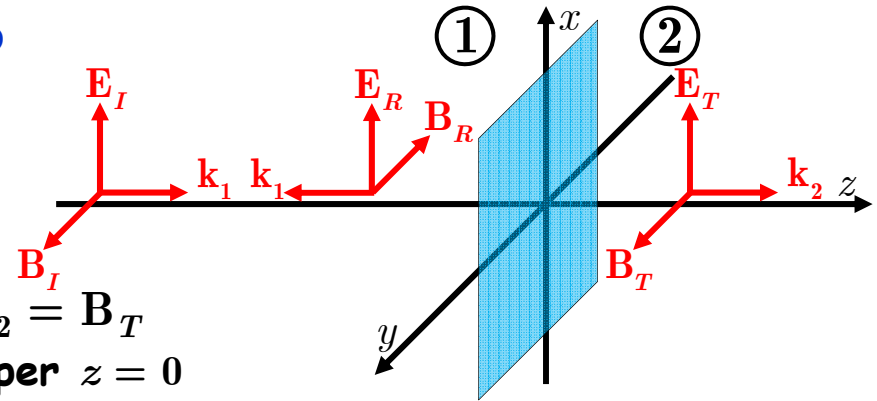
$$z = 0 \longrightarrow \tilde{E}_{0I} e^{i\omega t} + \tilde{E}_{0R} e^{i\omega' t} = \tilde{E}_{0T} e^{i\omega'' t}$$

- Esiste una soluzione non nulla solo se le tre frequenze sono uguali

$$\omega = \omega' = \omega'' \longrightarrow \tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R} = \tilde{E}_{0T}$$

- La condizione su $B_{\parallel}$ è

$$\frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_{1\parallel} = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_{2\parallel} \longrightarrow \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0I} - \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0R} \right) = \frac{1}{\mu_2 v_2} \tilde{E}_{0T}$$



Incidenza normale

$$\frac{1}{\mu_1} \left(\frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0I} - \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0R} \right) = \frac{1}{\mu_2 v_2} \tilde{E}_{0T} \quad \tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R} = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} \tilde{E}_{0T} \quad \beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}$$

• Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} \tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R} = \tilde{E}_{0T} \\ \tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R} = \beta \tilde{E}_{0T} \end{cases} \quad \begin{aligned} 2\tilde{E}_{0I} &= (1 + \beta) \tilde{E}_{0T} \\ \tilde{E}_{0R} &= \tilde{E}_{0T} - \tilde{E}_{0I} \end{aligned}$$

$$\tilde{E}_{0T} = \frac{2}{1 + \beta} \tilde{E}_{0I}$$

$$\tilde{E}_{0R} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \tilde{E}_{0I}$$

• Per la maggior parte delle sostanze $\mu_r = \mu/\mu_0$ è praticamente uguale a 1

• In tal caso

$$\beta = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \tilde{E}_{0T} = \frac{2v_2}{v_1 + v_2} \tilde{E}_{0I} \quad \tilde{E}_{0T} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \tilde{E}_{0I}$$

$$\tilde{E}_{0R} = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2} \tilde{E}_{0I} \quad \tilde{E}_{0R} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \tilde{E}_{0I}$$

$$v = \frac{c}{n}$$

Incidenza normale

- Calcoliamo adesso le intensità (assumendo polarizzazione lineare)

- Ricordiamo la relazione che lega l'intensità all'ampiezza

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon v E_0^2$$

$$I_I = \frac{1}{2} \varepsilon_1 v_1 |\tilde{E}_{0I}|^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_1 v_1 E_0^2$$

$$I_R = \frac{1}{2} \varepsilon_1 v_1 |\tilde{E}_{0R}|^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_1 v_1 \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 E_0^2$$

$$I_T = \frac{1}{2} \varepsilon_2 v_2 |\tilde{E}_{0T}|^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_2 v_2 \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 E_0^2$$

- Se $n_1 = n_2$

- Non c'è onda riflessa
- Tutta l'onda è trasmessa

- Definiamo i coefficienti di riflessione e trasmissione

$$R = \frac{I_R}{I_I} = \frac{\frac{1}{2} \varepsilon_1 v_1 \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 E_0^2}{\frac{1}{2} \varepsilon_1 v_1 E_0^2} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$n \approx \sqrt{\varepsilon}$$

$$v = \frac{c}{n}$$

$$T = \frac{I_T}{I_I} = \frac{\varepsilon_2 v_2 \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2}{\varepsilon_1 v_1} = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2} \right)^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

$$R + T = 1$$

Incidenza obliqua

- Trattiamo adesso il problema della riflessione di un'onda nel caso in cui il vettore d'onda formi un angolo con la normale alla superficie

- L'onda incidente

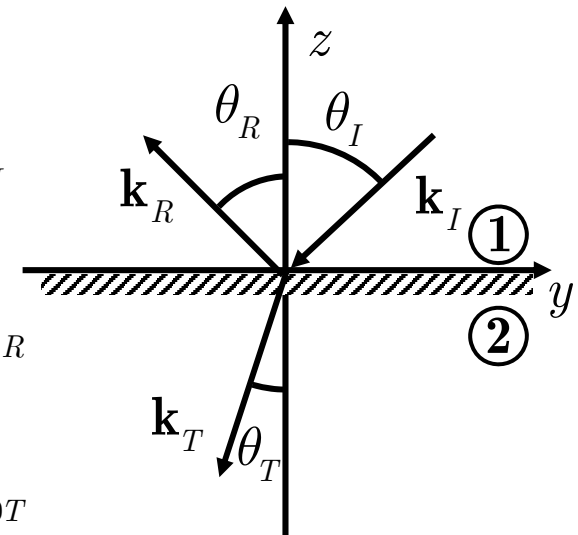
$$\tilde{\mathbf{E}}_I(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0I} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r})} \quad \tilde{\mathbf{B}}_I(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} \hat{\mathbf{k}}_I \times \tilde{\mathbf{E}}_{0I}$$

- L'onda riflessa

$$\tilde{\mathbf{E}}_R(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0R} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r})} \quad \tilde{\mathbf{B}}_R(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} \hat{\mathbf{k}}_R \times \tilde{\mathbf{E}}_{0R}$$

- L'onda trasmessa

$$\tilde{\mathbf{E}}_T(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0T} e^{i(\omega t - \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r})} \quad \tilde{\mathbf{B}}_T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_2} \hat{\mathbf{k}}_T \times \tilde{\mathbf{E}}_{0T}$$



- Come abbiamo visto nel caso precedente tutte e tre le onde hanno la stessa frequenza angolare ω
- I tre vettori d'onda, esplicitamente indicati, sono legati alle frequenze e alle velocità di propagazione

$$k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2 = \omega \quad k_I = k_R = \frac{v_2}{v_1} k_T = \frac{n_1}{n_2} k_T$$

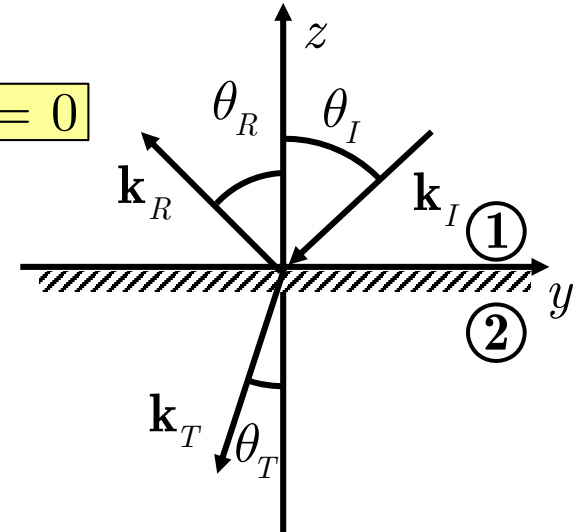
- I campi totali nella regione 1 $\mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R$ e $\mathbf{B}_I + \mathbf{B}_R$ devono adesso essere raccordati ai campi $\mathbf{E}_T$ e $\mathbf{B}_T$ nella regione 2 tramite le condizioni all'interfaccia

Incidenza obliqua

- La forma generica delle condizioni all'interfaccia è

$$\left(\right) e^{i(\omega t - \mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \left(\right) e^{i(\omega t - \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r})} = \left(\right) e^{i(\omega t - \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r})}$$

$$z = 0$$



- Perché questa condizione possa valere su tutti i punti del piano $x-y$ a $z = 0$ le fasi degli esponenziali devono essere uguali

- I termini dipendenti da t ($i\omega t$) si semplificano
- Avremo pertanto (per $z = 0$)

$$\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r}$$

- Esplicitamente

$$xk_{Ix} + yk_{Iy} = xk_{Rx} + yk_{Ry} = xk_{Tx} + yk_{Ty}$$

- Queste relazioni devono valere per qualunque valore di x e di y

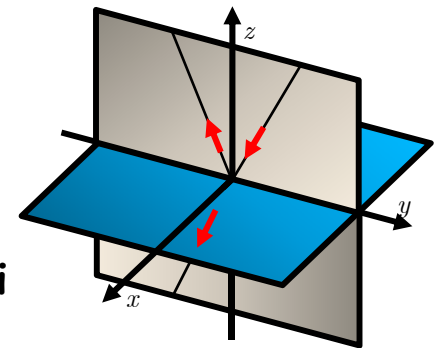
- In particolare per $y = 0$

$$xk_{Ix} = xk_{Rx} = xk_{Tx} \quad \longrightarrow \quad k_{Ix} = k_{Rx} = k_{Tx}$$

- E per $x = 0$

$$yk_{Iy} = yk_{Ry} = yk_{Ty} \quad \longrightarrow \quad k_{Iy} = k_{Ry} = k_{Ty}$$

- Il significato di queste relazioni è che le componenti trasversali (rispetto a $\hat{e}_z$) dei tre vettori d'onda sono uguali
- Pertanto i tre vettori giacciono sullo stesso piano



Incidenza obliqua

- Arriviamo pertanto alla prima legge dell'ottica geometrica

- I vettori d'onda delle tre onde (k_I , k_R , k_T) formano un piano detto piano di incidenza

- Il piano è definito dalla normale e da k_I

- Per fissare le idee supponiamo che il piano di incidenza sia il piano $y-z$

- Significa che $k_{Ix} = k_{Rx} = k_{Tx} = 0$

- Abbiamo visto che

$$k_{Iy} = k_{Ry} = k_{Ty}$$

- Significa che

$$k_I \sin \theta_I = k_R \sin \theta_R \quad \longrightarrow \quad \sin \theta_I = \sin \theta_R$$

- Abbiamo trovato la seconda legge (della riflessione)

- L'angolo di incidenza θ_I è uguale all'angolo di riflessione θ_R

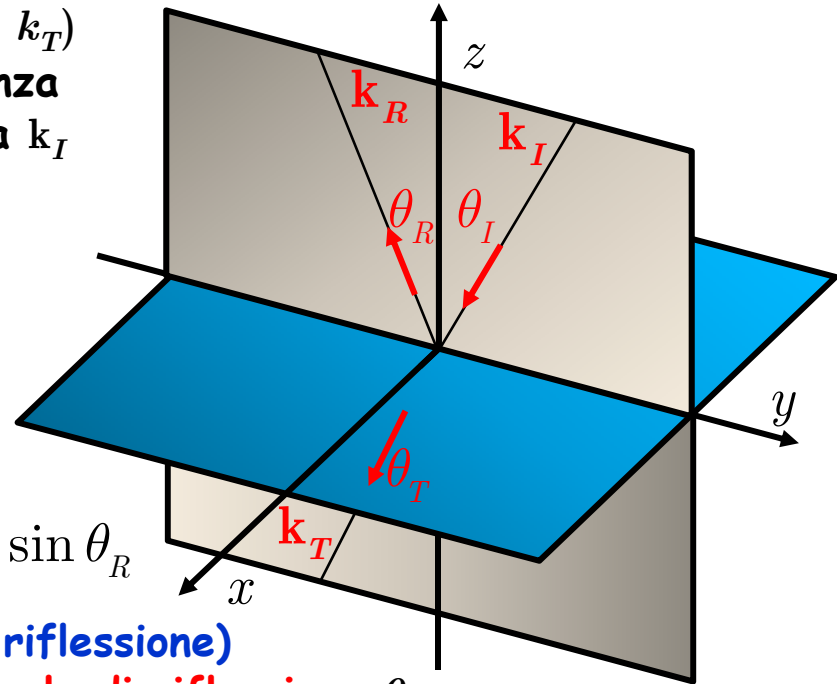
- Inoltre abbiamo

$$k_I \sin \theta_I = k_T \sin \theta_T \quad \frac{k_I}{k_T} = \frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} \quad \frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{\omega}{v_I} / \frac{\omega}{v_T} = \frac{v_T}{v_I} = \frac{n_I}{n_T}$$

- Troviamo quindi la terza legge o legge di Snell

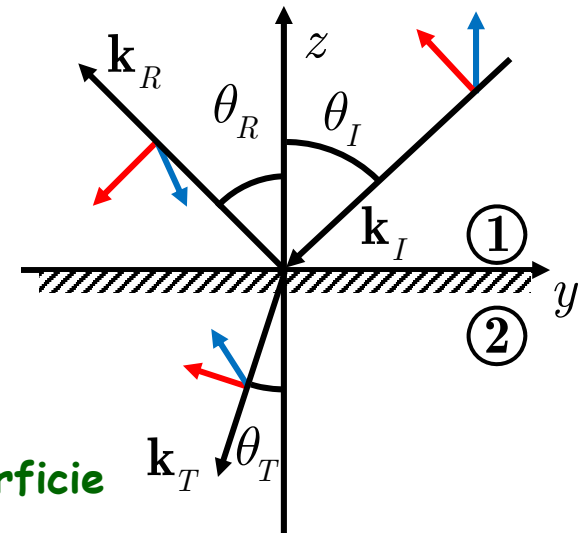
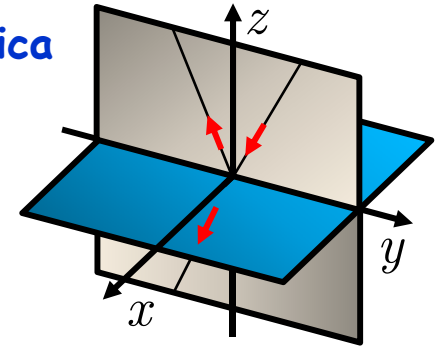
- Nota anche come legge della rifrazione

$$\frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{n_I}{n_T}$$



Incidenza obliqua

- Abbiamo trovato le tre leggi fondamentali dell'ottica geometrica
 - Non abbiamo ancora utilizzato le condizioni all'interfaccia
 - Le condizioni che abbiamo trovato assicurano che gli esponenziali si semplificano
 - Senza ledere la generalità della trattazione possiamo orientare il piano di incidenza nel piano $y-z$
- Dobbiamo definire la polarizzazione dell'onda rispetto al piano di incidenza
 - E può giacere sul piano di incidenza
 - E può essere perpendicolare al piano di incidenza
 - Una polarizzazione arbitraria può essere ottenuta come una combinazione delle due indicate
- Trattiamo solo il caso in cui il campo E_I giace nel piano di incidenza
 - Si può dimostrare che anche E_R e E_T giacciono sul piano di incidenza
 - Notiamo che nel caso dell'incidenza obliqua i campi elettrici E hanno una componente normale alla superficie
 - I campi B sono perpendicolari al piano di incidenza
 - Hanno solo componente lungo l'asse $x \rightarrow B_z = B_y = 0$



Incidenza obliqua

- Scriviamo le condizioni al contorno

- Ricordiamo che nell'onda piana

$$\mathbf{B} = \frac{1}{v} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \quad B = \frac{1}{v} E$$

- Iniziamo con le componenti normali

$$\varepsilon_1 (E_{0Iz} + E_{0Rz}) = \varepsilon_2 E_{0Tz} \quad B_{0Iz} + B_{0Rz} = B_{0Tz}$$

- Per le componenti tangenziali

$$\mathbf{E}_{0I\parallel} + \mathbf{E}_{0R\parallel} = \mathbf{E}_{0T\parallel} \quad \frac{1}{\mu_1} (\mathbf{B}_{0I\parallel} + \mathbf{B}_{0R\parallel}) = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_{0T\parallel}$$

- Queste ultime equazioni sono in realtà quattro (in generale)

- Due componenti (x, y) per ogni campo

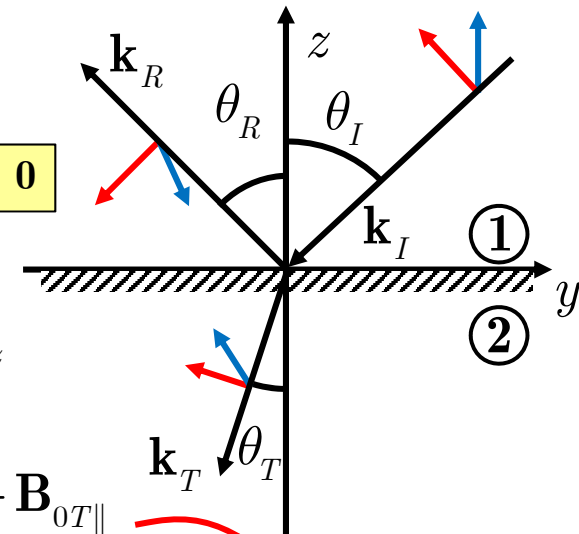
- Proiettiamo sull'asse z i campi $\mathbf{E}$. La prima equazione diventa

$$\varepsilon_1 (E_{0I} \sin \theta_I - E_{0R} \sin \theta_R) = \varepsilon_2 E_{0T} \sin \theta_T$$

- La terza equazione $E_{0I} \cos \theta_I + E_{0R} \cos \theta_R = E_{0T} \cos \theta_T$

- Per finire la quarta equazione

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} (E_{0I} - E_{0R}) = \frac{1}{\mu_2 v_2} E_{0T}$$



banale. $B_z = 0$

Proiezione lungo y

Proiezione lungo x

Incidenza obliqua

• **Riassumendo** $\varepsilon_1 (E_{0I} \sin \theta_I - E_{0R} \sin \theta_R) = \varepsilon_2 E_{0T} \sin \theta_T$

$$E_{0I} \cos \theta_I + E_{0R} \cos \theta_R = E_{0T} \cos \theta_T \quad \frac{1}{\mu_1 v_1} (E_{0I} - E_{0R}) = \frac{1}{\mu_2 v_2} E_{0T}$$

- **La prima equazione è equivalente all'ultima**

- **Infatti per le leggi della riflessione**

$$\sin \theta_I = \sin \theta_R \quad \frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{v_2}{v_1} \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{\mu_1 v_1^2} \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\mu_2 v_2^2}$$

$$E_{0I} - E_{0R} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} E_{0T} \frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{\mu_1 v_1^2}{\mu_2 v_2^2} E_{0T} \frac{v_2}{v_1} \quad E_{0I} - E_{0R} = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} E_{0T}$$

• **In definitiva abbiamo due equazioni** $\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} \quad \alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}$

$$E_{0I} - E_{0R} = \beta E_{0T} \quad E_{0I} + E_{0R} = E_{0T} \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} = \alpha E_{0T}$$

Incidenza obliqua

- Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} E_{0I} + E_{0R} = \alpha E_{0T} \\ E_{0I} - E_{0R} = \beta E_{0T} \end{cases} \quad \alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} \quad \beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}$$

$$2E_{0I} = (\alpha + \beta) E_{0T}$$

$$E_{0T} = \frac{2}{\alpha + \beta} E_{0I}$$

$$E_{0R} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} E_{0I}$$

- Sostituiamo nella seconda

$$E_{0R} = E_{0I} - \beta E_{0T}$$

- Le due soluzioni trovate sono note come equazioni di Fresnel quando la polarizzazione giace sul piano di incidenza

- Notiamo che per $\theta_I = 0$ anche $\theta_T = 0$ e $\alpha = 1$

- Ritroviamo le leggi della incidenza normale

- Notiamo inoltre che l'ampiezza delle onde riflessa e trasmessa dipende dall'angolo di incidenza

$$\alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_T}}{\cos \theta_I} = \frac{\sqrt{1 - (n_1 / n_2 \sin \theta_I)^2}}{\cos \theta_I} = f(\theta_I)$$

- Per $\theta_I \rightarrow \pi/2$ abbiamo $\alpha \rightarrow \infty$ e l'onda viene completamente riflessa

Incidenza obliqua

$$\alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} \quad \beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}$$

$$E_{0T} = \frac{2}{\alpha + \beta} E_{0I}$$

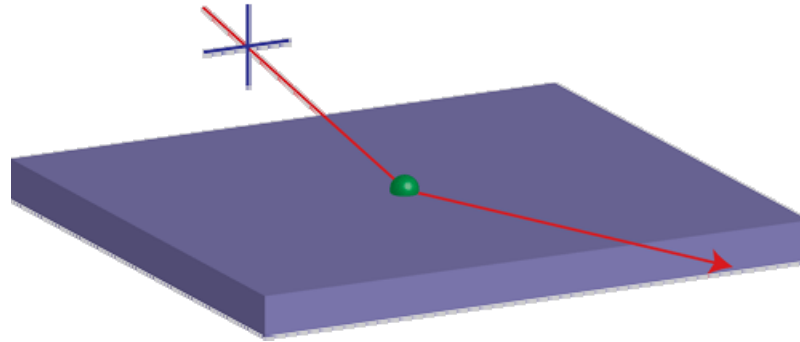
$$E_{0R} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} E_{0I}$$

- Osserviamo inoltre che per $\alpha = \beta$ l'onda riflessa ha ampiezza nulla
 - In questo caso non c'è onda riflessa, tutta l'onda viene trasmessa
 - L'angolo di incidenza per il quale questo accade si chiama angolo di Brewster
 - Dalle formule precedenti si ricava facilmente

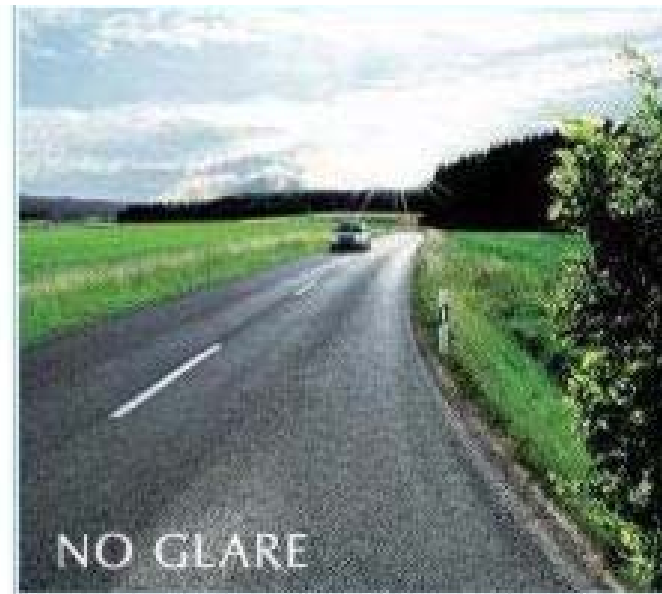
$$\sin^2 \theta_B = \frac{1 - \beta^2}{\left(n_1 / n_2\right)^2 - \beta^2}$$

- Per la luce con polarizzazione perpendicolare al piano di incidenza non esiste un fenomeno analogo
 - Supponiamo che un fascio di luce con polarizzazione arbitraria incida su una superficie con angolo di incidenza uguale (o prossimo) all'angolo di Brewster
 - La componente con polarizzazione parallela al piano di incidenza non è riflessa: è trasmessa, in pratica assorbita
 - Tutta la luce riflessa ha polarizzazione perpendicolare al piano di incidenza
 - Su questo fenomeno si basa l'utilizzo di filtri polaroid negli occhiali per ridurre i riflessi: filtri che assorbono la polarizzazione voluta

Esempio: lenti polarizzate



Non Polarised Lenses



Polarised Lenses