

---

# Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa  
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 35 - 11.05.2023

Equazione delle Onde  
Elettromagnetiche e sue soluzioni  
Onde piane - Onde monocromatiche  
Polarizzazione delle onde

Anno Accademico 2022/2023

---

# Equazione dell'onda

- Scriviamo adesso l'equazione di propagazione dei campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  dopo che l'onda è stata generata

- Utilizziamo le equazioni di Maxwell nel vuoto con  $\rho = 0$  e  $\mathbf{J} = 0$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$\xrightarrow{\quad} \epsilon_0 \mu_0$

- Si tratta di un sistema di equazioni differenziali accoppiate
- Per disaccoppiare i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  calcoliamo il rotore delle ultime due equazioni

- Utilizziamo l'identità (diapositiva 82)  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V}$
- Appliciamola alla terza equazione

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \nabla \times \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Utilizziamo la quarta equazione

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial \nabla \times \mathbf{B}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

- È una forma compatta per indicare le tre equazioni

$$\nabla^2 E_x = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad \nabla^2 E_y = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \nabla^2 E_z = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

# Equazione dell'onda

- Si può dimostrare che anche le componenti  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$  del campo magnetico soddisfano la stessa equazione del campo  $\mathbf{E}$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

- Inoltre verificheremo in seguito che anche il potenziale vettore  $\mathbf{A}$  e il potenziale scalare  $\phi$  soddisfano la stessa equazione dell'onda
- Da un punto di vista matematico si tratta di una equazione differenziale alle derivate parziali di tipo iperbolico

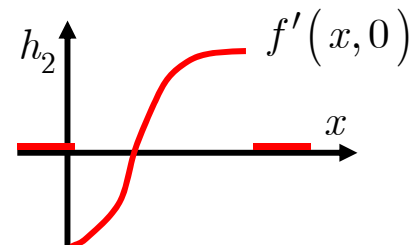
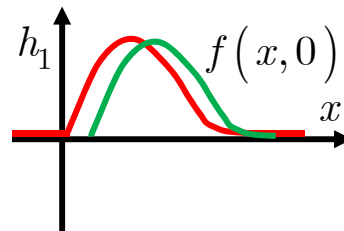
$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

- Per risolverla occorre definire le condizioni iniziali

$$f(\mathbf{r}, 0) = h_1(\mathbf{r}) \qquad \left. \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = h_2(\mathbf{r})$$

- Ad esempio nel caso unidimensionale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$



# Soluzioni dell'equazione dell'onda

- Le equazioni trovate sono una generalizzazione a tre dimensioni dell'equazione dell'onda in una dimensione

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} \quad \longrightarrow \quad \nabla^2 f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$$

- Com'è noto nel caso unidimensionale la soluzione generale è

$$f(x, t) = u(x - ct) + v(x + ct) \quad u, v \text{ sono funzioni continue con derivata continua}$$

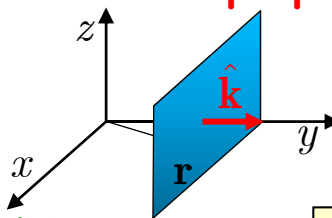
- Naturalmente la funzione  $E_y = -\mu_0 c K R_T(x - ct)$  soddisfa il nostro problema della corrente superficiale infinita
- Per correnti parallele ai piani  $x-y$  e  $x-z$  le soluzioni avrebbero potuto essere

$$E_x = -\mu_0 c K R_T(z - ct) \quad E_z = -\mu_0 c K R_T(y - ct)$$

- La caratteristica saliente di queste soluzioni è che il campo è costante sui piani perpendicolari alla direzione di propagazione

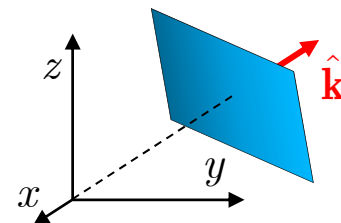
- Ad esempio

$$y - ct = \hat{\mathbf{e}}_y \cdot \mathbf{r} - ct$$



- Nel caso in cui la direzione di propagazione sia arbitraria

$$\hat{\mathbf{e}}_i \rightarrow \hat{\mathbf{k}} \quad \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{r} - ct \rightarrow \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - ct$$



**E è costante in ogni punto del piano**

**NB: non tutte le soluzioni sono onde piane**

# Soluzioni dell'equazione dell'onda

\*\*\*

- Cerchiamo le soluzioni dell'equazione dell'onda unidimensionale utilizzando la trasformata di Fourier

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2}$$

- La trasformata di Fourier è definita come

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{+ikx} dk$$

- Applicando le formule precedenti alla funzione di due variabili  $f(x, t)$

$$F(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) e^{-ikx} dx$$

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k, t) e^{+ikx} dk$$

- Calcoliamo le derivate di  $f(x, t)$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} -k^2 F(k, t) e^{+ikx} dk$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F(k, t)}{\partial t^2} e^{+ikx} dk$$

- Introduciamo nell'equazione

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( k^2 F(k, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F(k, t)}{\partial t^2} \right) e^{+ikx} dk = 0$$

- L'integrando deve essere identicamente nullo

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F(k, t)}{\partial t^2} + k^2 F(k, t) = 0$$

# Soluzioni dell'equazione dell'onda

\*\*\*

- Abbiamo pertanto ricondotto il problema alla ricerca della soluzione di un'equazione differenziale ordinaria (oscillatore armonico)

$$\frac{d^2 F(k, t)}{dt^2} = -\omega^2 F(k, t) \quad \omega^2 = k^2 c^2$$

- Per ogni valore di  $k$  la soluzione è

$$F(k, t) = U(k)e^{-i\omega t} + V(k)e^{+i\omega t}$$

- Rimandiamo la discussione delle "costanti"  $U(k)$  e  $V(k)$  che dipendono dalle condizioni iniziali

- Inserendo nell'espressione per  $f(x, t)$

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [U(k)e^{-i\omega t} + V(k)e^{+i\omega t}] e^{+ikx} dk$$

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [U(k)e^{-i\omega t + ikx} + V(k)e^{+i\omega t + ikx}] dk$$

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [U(k)e^{-ikct + ikx} + V(k)e^{+ikct + ikx}] dk$$

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [U(k)e^{+ik(x-ct)} + V(k)e^{+ik(x+ct)}] dk$$

# Soluzioni dell'equazione dell'onda

---

- Esaminiamo la soluzione trovata

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [U(k)e^{+ik(x+ct)} + V(k)e^{+ik(x-ct)}] dk$$

$$f(x, t) = u(x + ct) + v(x - ct)$$

- Abbiamo ritrovato la soluzione di D'Alembert
- La soluzione generale dell'equazione è la somma di due onde
  - Un'onda che propaga nel senso negativo delle  $x$
  - Un'onda che propaga nel senso positivo delle  $x$
- È facile verificare che per una arbitraria funzione  $h(x)$ , due volte continua  $h(x \pm ct)$  è soluzione dell'equazione delle onde
- Inoltre osserviamo che le funzioni  $\exp[\pm ik(x \pm ct)]$  sono soluzioni dell'equazione delle onde
  - Sono funzioni trigonometriche (seni e coseni)
    - I parametri  $\omega$  e  $k$  non sono indipendenti  $\omega = kc$
  - Le funzioni  $\exp[\pm ik(x \pm ct)]$  dette anche onde monocromatiche di frequenza  $\omega = kc$
- La soluzione generale, espressa sotto forma di trasformata, è una sovrapposizione (integrale) di onde monocromatiche con frequenze diverse

# Soluzioni dell'equazione dell'onda

\*\*\*

- Per finire determiniamo  $U(k)$  e  $V(k)$  in funzione delle condizioni iniziali

$$f(x, 0) = h_1(x) \quad H_1(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(x) e^{-ikx} dx \quad h_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(k) e^{+ikx} dk$$

$$\left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = h_2(x) \quad H_2(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(x) e^{-ikx} dx \quad h_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_2(k) e^{+ikx} dk$$

- Abbiamo

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [U(k) e^{+ik(x+ct)} + V(k) e^{+ik(x-ct)}] dk$$

$$f(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [U(k) + V(k)] e^{+ikx} dk \quad \longrightarrow \quad H_1(k) = U(k) + V(k)$$

- Inoltre

$$\dot{f}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ikc [U(k) e^{+ik(x+ct)} - V(k) e^{+ik(x-ct)}] dk$$

$$\dot{f}(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ikc [U(k) - V(k)] e^{+ikx} dk \quad \longrightarrow \quad H_2(k) = ikc [U(k) - V(k)]$$

- Otteniamo

$$U(k) = \frac{1}{2} \left[ H_1(k) + \frac{H_2(k)}{ikc} \right]$$

$$V(k) = \frac{1}{2} \left[ H_1(k) - \frac{H_2(k)}{ikc} \right]$$

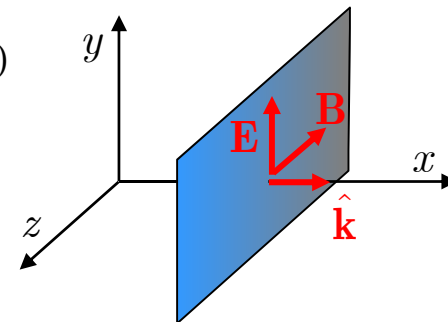
# Onde piane e monocromatiche

- Ritorniamo alle onde elettromagnetiche

- Abbiamo visto che i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  soddisfano le equazioni

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$$

- In coordinate cartesiane le 6 componenti dei campi soddisfano le equazioni dell'onda
- Una soluzione dell'equazione dell'onda non soddisfa necessariamente le equazioni di Maxwell (che accoppiano  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ )
  - Le equazioni d'onda per  $\mathbf{E}$  e per  $\mathbf{B}$  sono disaccoppiate
- La richiesta che le soluzioni soddisfino anche le equazioni di Maxwell restringe le soluzioni accettabili: onde elettromagnetiche
  - Le equazioni  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  e  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  impongono che  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  siano perpendicolari alla direzione di propagazione
  - Le equazioni del rotore impongono che i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  siano perpendicolari fra loro e i loro moduli collegati
- Consideriamo soluzioni del tipo  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - kx)}$ 
  - Un'onda che propaga lungo l'asse  $x$
  - I campi  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  hanno lo stesso valore sui piani perpendicolari all'asse  $x$
  - Un'onda di questo tipo si chiama onda piana



# Soluzioni: onde piane

- In un'onda piana i campi  $E$  e  $B$  non cambiano spostandosi sul piano

- Non necessariamente il piano deve essere perpendicolare ad uno degli assi delle coordinate  
I campi dipendono solo dalla lunghezza  $\zeta$  della proiezione di  $\mathbf{r}$  nella direzione della normale al piano  $\hat{\mathbf{k}}$

$$\zeta = \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{k}_x x + \hat{k}_y y + \hat{k}_z z$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\zeta, t) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\zeta, t)$$

- Il fatto che il campo dipenda solo da  $\zeta$  implica che le derivate assumano una forma particolare

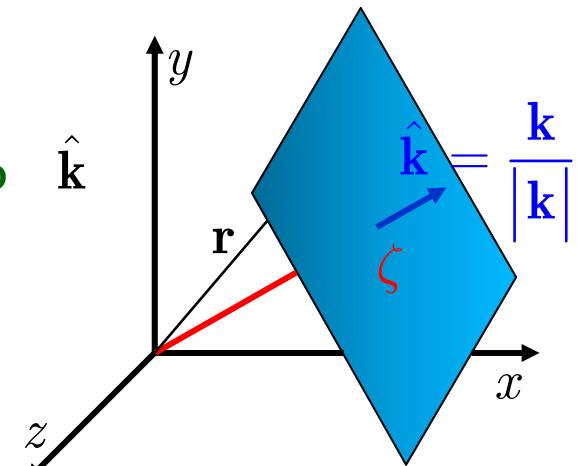
$$\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{E}(\zeta, t)}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{E}(\zeta, t)}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \hat{k}_x \frac{\partial \mathbf{E}(\zeta, t)}{\partial \zeta}$$

- Espressioni analoghe per le altre derivate

- Specializziamo queste considerazioni all'operatore  $\nabla$  applicato a un'onda piana (in coordinate cartesiane) o a una sua componente  $f(\zeta)$

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z} = \hat{k}_x \hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial \zeta} + \hat{k}_y \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial \zeta} + \hat{k}_z \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

$$\nabla = \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial \zeta}$$



$\zeta$  è la distanza del piano dall'origine

# Soluzioni: onde piane

- Utilizzando l'espressione dell'operatore  $\nabla$  trovata per l'onda piana possiamo riscrivere le equazioni di Maxwell nel vuoto  $\nabla = \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial \zeta}$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = 0 \quad \hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \zeta} = 0 \quad \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \zeta} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

- Ricaviamo la proprietà di trasversalità dell'onda piana

- Moltiplichiamo per  $\hat{\mathbf{k}}$  la quarta equazione

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \left( \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \zeta} \right) = \frac{1}{c^2} \hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dt = 0$$

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} d\zeta = 0$$

- Analogamente per la prima equazione si ha

- Sommando le due equazioni

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} d\zeta \right) = 0 \quad \text{definiamo} \quad d\mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} d\zeta$$

- Il differenziale  $d\mathbf{E}$  è la variazione del campo elettrico se ci si muove nella direzione di propagazione o se varia il tempo

- L'onda è trasversale alla direzione di propagazione

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot d\mathbf{E} = 0$$

# Soluzioni: onde piane

- Analogamente dalla seconda e dalla terza equazione si ricava

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot d\mathbf{B} = 0 \quad \text{ricordiamo la precedente} \quad \hat{\mathbf{k}} \cdot d\mathbf{E} = 0$$

- Il significato di queste equazioni è il seguente

- In un'onda piana le variazioni  $d\mathbf{E}$  e  $d\mathbf{B}$  dovute a spostamenti lungo  $\zeta$  e/o a variazioni nel tempo sono perpendicolari a  $\hat{\mathbf{k}}$

- È possibile che la condizione sia verificata anche per campi con componente lungo  $\zeta$

- Ad esempio, il campo  $\mathbf{E}$  potrebbe avere una componente uniforme lungo  $\zeta$

$$\frac{\partial E_\zeta}{\partial \zeta} = 0 \quad \longrightarrow \quad \hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{inoltre} \quad dE_\zeta = \frac{\partial E_\zeta}{\partial t} dt + \frac{\partial E_\zeta}{\partial \zeta} d\zeta = 0$$

- Implica che anche  $\frac{\partial E_\zeta}{\partial t} = 0$  Significa che sarebbero campi statici

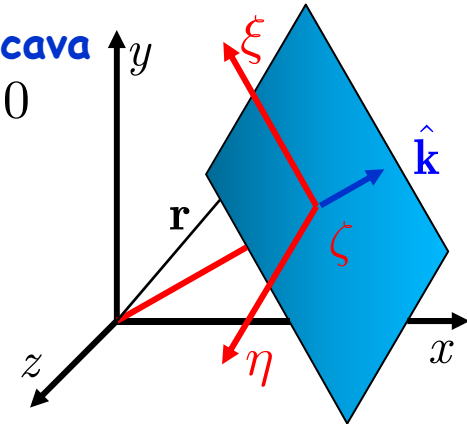
- Non sono onde che propagano

- Quindi i campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  di un'onda piana giacciono sul piano perpendicolare a  $\hat{\mathbf{k}}$

- Utilizziamo un sistema di riferimento locale  $\xi-\eta$

- I campi possono essere scomposti nelle componenti  $E_\xi$  e  $E_\eta$ ,  $B_\xi$  e  $B_\eta$

- Verifichiamo adesso che queste componenti soddisfano l'equazione dell'onda



# Soluzioni: onde piane

- Ricaviamo l'equazione dell'onda nella coordinata  $\zeta$

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = 0 \quad \hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \zeta} = 0 \quad \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \zeta} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- Utilizziamo la terza e la quarta equazione

- Moltiplichiamo vettorialmente la terza per  $\hat{\mathbf{k}}$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \left( \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} \right) = -\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\hat{\mathbf{k}} \times \left( \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} \right) = \hat{\mathbf{k}} \left( \cancel{\hat{\mathbf{k}}} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} \right) - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = -\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$


- Deriviamo rispetto a  $\zeta$  l'equazione ottenuta e rispetto a  $t$  la quarta

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \zeta^2} = \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t \partial \zeta} \quad \hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t \partial \zeta} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

- Eliminiamo B

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \zeta^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

Ci siamo ricondotti all'equazione dell'onda unidimensionale

- Analogamente per il campo B

# Soluzioni: onde piane

---

- Le equazioni trovate sono quelle dell'onda unidimensionale
  - Utilizziamo le soluzioni trovate precedentemente (vedi diapositiva 383)

$$f(\zeta, t) = e^{\pm i(k\zeta \pm \omega t)} = e^{\pm i(\omega t \pm k\zeta)}$$

- Pertanto ci sono due soluzioni che descrivono
  - Un'onda che viaggia verso "destra":  $\omega t - k\zeta$
  - Un'onda che viaggia verso "sinistra":  $\omega t + k\zeta$
- Per ciascuno dei due tipi di onda esistono ancora due soluzioni  $e^{\pm i(\dots)}$ 
  - La soluzione generale sarà data da

$$Ae^{+i\phi} + Be^{-i\phi} \quad \phi \text{ può essere } \omega t - k\zeta \text{ oppure } \omega t + k\zeta$$

- Le costanti  $A$  e  $B$  sono scelte in modo che la soluzione sia reale:  $B = A^*$ 
  - Definiamo  $\rho = |A| = |B|$  e  $\delta = \arg(A) = -\arg(B)$

$$\begin{aligned} Ae^{+i\phi} + Be^{-i\phi} &= \rho e^{+i\delta} e^{+i\phi} + \rho e^{-i\delta} e^{-i\phi} = \rho \left[ e^{+i(\phi+\delta)} + e^{-i(\phi+\delta)} \right] \\ &= 2\rho \cos(\phi + \delta) \end{aligned}$$

- Sia la fase  $\delta$  che l'ampiezza  $\rho$  sono arbitrarie ( $\rho$  o  $2\rho$  è la stessa cosa)
- Una differenza di  $\pi/2$  in  $\delta$  fa passare da un seno a un coseno
- Le soluzioni sono pertanto onde sinusoidali che viaggiano in due direzioni

$$\rho \sin(\omega t \pm k\zeta + \delta) \quad \rho \cos(\omega t \pm k\zeta + \delta) \quad \text{sono anche monocromatiche}$$

# Soluzioni: onde piane

- Abbiamo visto che le soluzioni sono onde sinusoidali
  - Tuttavia è molto più semplice utilizzare gli esponenziali complessi
    - Per tale motivo si indica la soluzione nella forma  $Ae^{i(\omega t \pm k\zeta)}$
    - La costante  $A$  è in generale complessa: contiene eventuali sfasamenti  $\delta$
    - Alla fine del calcolo (lineare) si prende la parte reale
- Usiamo il vettore d'onda  $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}$   $k\zeta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$
- Consideriamo un'onda generale  $Ae^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} + Be^{i(\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$
- Ritornando alla soluzione per il campo elettrico troviamo

$$E_\xi(\mathbf{r}, t) = E_{1\xi}e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + E_{2\xi}e^{i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

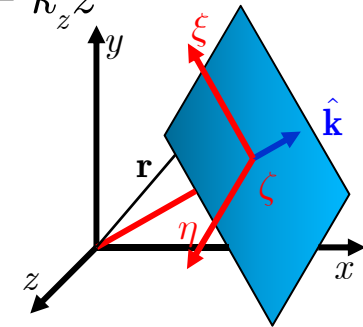
- Le costanti  $E_{1\xi}$  e  $E_{2\xi}$  sono, in generale, complesse
  - Per la componente  $E_\eta$  del campo si trova una soluzione analoga

$$E_\eta(\mathbf{r}, t) = E_{1\eta}e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + E_{2\eta}e^{i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

- In forma vettoriale

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_1 e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{E}}_2 e^{i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

- Il simbolo  $\sim$  (tilde) utilizzato per i vettori sottolinea che, in generale, si tratta di grandezze complesse
  - I vettori complessi sono necessari per permettere una fase arbitraria



# Soluzioni: onde piane

- Per il campo magnetico si trova una soluzione analoga

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{B}}_1 e^{i\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{B}}_2 e^{i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

- Troviamo una relazione fra i vettori  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  e  $\tilde{\mathbf{E}}_2$  e i vettori  $\tilde{\mathbf{B}}_1$  e  $\tilde{\mathbf{B}}_2$
- Utilizziamo l'equazione (vedi diapositiva 387)

$$\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{ricordiamo il campo } \mathbf{E} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_1 e^{i\omega t - ik\zeta} + \tilde{\mathbf{E}}_2 e^{i\omega t + ik\zeta}$$

- Calcoliamo le derivate

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = -ik\tilde{\mathbf{E}}_1 e^{i\omega t - ik\zeta} + ik\tilde{\mathbf{E}}_2 e^{i\omega t + ik\zeta} \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\omega(\tilde{\mathbf{B}}_1 e^{i\omega t - ik\zeta} + \tilde{\mathbf{B}}_2 e^{i\omega t + ik\zeta})$$

- Introduciamo nell'equazione di Maxwell

$$-ik\hat{\mathbf{k}} \times (\tilde{\mathbf{E}}_1 e^{i\omega t - ik\zeta} - \tilde{\mathbf{E}}_2 e^{i\omega t + ik\zeta}) = -i\omega(\tilde{\mathbf{B}}_1 e^{i\omega t - ik\zeta} + \tilde{\mathbf{B}}_2 e^{i\omega t + ik\zeta})$$

- Uguagliamo i coefficienti dei due esponenziali (ricordiamo  $\omega = kc$ )

$$ik\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}_1 = i\omega\tilde{\mathbf{B}}_1 \quad \tilde{\mathbf{B}}_1 = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}_1 \quad \left| \quad ik\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}_2 = -i\omega\tilde{\mathbf{B}}_2 \quad \tilde{\mathbf{B}}_2 = \frac{1}{c}(-\hat{\mathbf{k}}) \times \tilde{\mathbf{E}}_2 \right.$$

$$\boxed{\text{progressiva}} \quad \tilde{\mathbf{E}}_1 = -c\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{B}}_1 \quad \boxed{\text{regressiva}} \quad \tilde{\mathbf{E}}_2 = -c(-\hat{\mathbf{k}}) \times \tilde{\mathbf{B}}_2$$

# Soluzioni: onde piane

- Consideriamo un'onda che viaggia nella direzione positiva  $z$   $\mathbf{k} = k \hat{\mathbf{e}}_z$ 
  - Supponiamo il vettore  $\tilde{\mathbf{E}}_1$  nella direzione  $x$   $\tilde{\mathbf{E}}_1 = E \hat{\mathbf{e}}_x$
  - Il vettore  $\tilde{\mathbf{B}}_1$  punta nella direzione  $y$

$$\tilde{\mathbf{B}}_1 = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}_1 = \frac{E}{c} \hat{\mathbf{e}}_z \times \hat{\mathbf{e}}_x = \frac{E}{c} \hat{\mathbf{e}}_y$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_1 e^{i\omega t - ikz}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{B}}_1 e^{i\omega t - ikz}$$

- Il periodo dell'onda

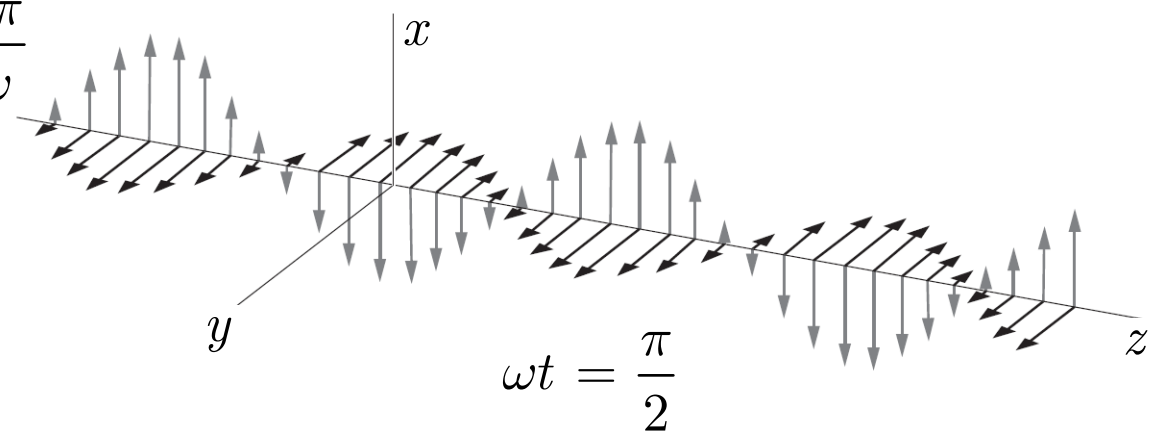
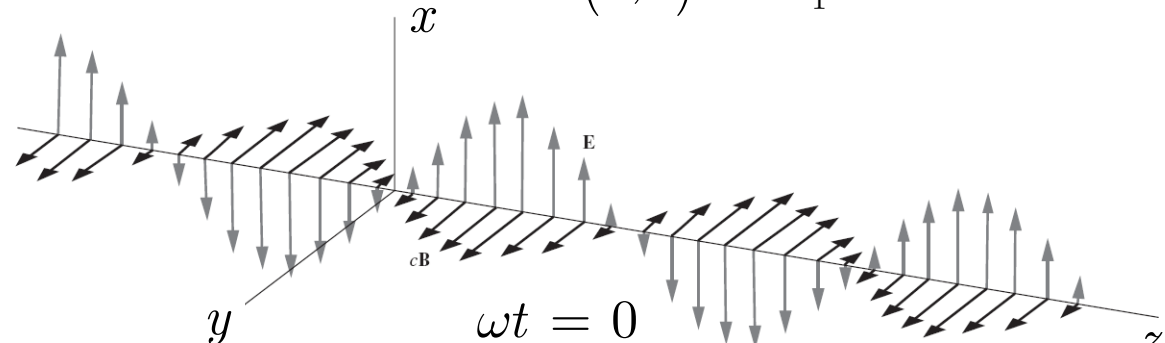
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- La lunghezza d'onda

$$\lambda = cT = \frac{\omega}{k} T = \frac{\omega}{k} \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$



# Lo spettro delle onde elettromagnetiche

---

| The Electromagnetic Spectrum |             |                |
|------------------------------|-------------|----------------|
| Frequency (Hz)               | Type        | Wavelength (m) |
| $10^{22}$                    | gamma rays  | $10^{-13}$     |
| $10^{21}$                    |             | $10^{-12}$     |
| $10^{20}$                    |             | $10^{-11}$     |
| $10^{19}$                    |             | $10^{-10}$     |
| $10^{18}$                    | x-rays      | $10^{-9}$      |
| $10^{17}$                    |             | $10^{-8}$      |
| $10^{16}$                    | ultraviolet | $10^{-7}$      |
| $10^{15}$                    | visible     | $10^{-6}$      |
| $10^{14}$                    | infrared    | $10^{-5}$      |
| $10^{13}$                    |             | $10^{-4}$      |
| $10^{12}$                    | microwave   | $10^{-3}$      |
| $10^{11}$                    |             | $10^{-2}$      |
| $10^{10}$                    |             | $10^{-1}$      |
| $10^9$                       |             | 1              |
| $10^8$                       | TV, FM      | 10             |
| $10^7$                       |             | $10^2$         |
| $10^6$                       | AM          | $10^3$         |
| $10^5$                       |             | $10^4$         |
| $10^4$                       | RF          | $10^5$         |
| $10^3$                       |             | $10^6$         |

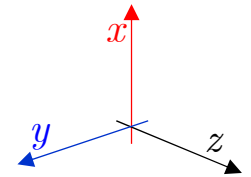
# Lo spettro visibile

---

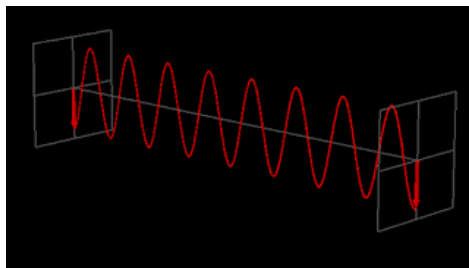
| The Visible Range    |                       |                      |
|----------------------|-----------------------|----------------------|
| Frequency (Hz)       | Color                 | Wavelength (m)       |
| $1.0 \times 10^{15}$ | near ultraviolet      | $3.0 \times 10^{-7}$ |
| $7.5 \times 10^{14}$ | shortest visible blue | $4.0 \times 10^{-7}$ |
| $6.5 \times 10^{14}$ | blue                  | $4.6 \times 10^{-7}$ |
| $5.6 \times 10^{14}$ | green                 | $5.4 \times 10^{-7}$ |
| $5.1 \times 10^{14}$ | yellow                | $5.9 \times 10^{-7}$ |
| $4.9 \times 10^{14}$ | orange                | $6.1 \times 10^{-7}$ |
| $3.9 \times 10^{14}$ | longest visible red   | $7.6 \times 10^{-7}$ |
| $3.0 \times 10^{14}$ | near infrared         | $1.0 \times 10^{-6}$ |

# Polarizzazione dell'onda

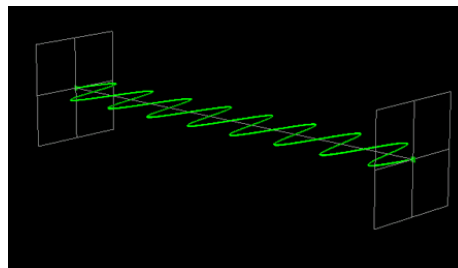
- L'onda che abbiamo visto ha il vettore campo elettrico che oscilla parallelamente alla direzione  $x$ 
  - Si definisce questo tipo di onda "polarizzata linearmente"
  - Naturalmente il vettore  $\mathbf{E}$  può puntare in qualsiasi direzione
  - La direzione del vettore  $\mathbf{E}$  è la direzione in cui è polarizzata l'onda
    - Ad esempio ...



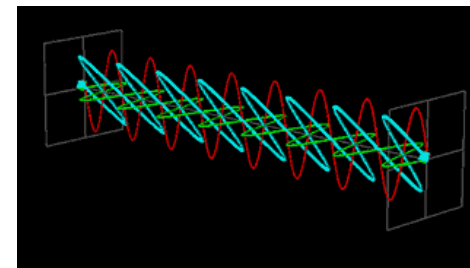
polarizzazione verticale



polarizzazione orizzontale



polarizzazione obliqua



- Vediamo in dettaglio come costruire un'onda polarizzata obliquamente tramite la sovrapposizione di altre due onde
  - Utilizziamo due onde con polarizzazione Verticale e Orizzontale  $\mathbf{E}_x$  e  $\mathbf{E}_y$

$$\mathbf{E}_x(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_a e^{i\omega t - ikz}$$

$$\mathbf{E}_y(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_b e^{i\omega t - ikz}$$

- Scegliamo i due vettori  $\tilde{\mathbf{E}}_a$  e  $\tilde{\mathbf{E}}_b$  nel modo seguente

$$\tilde{\mathbf{E}}_a = E \hat{\mathbf{e}}_x$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_b = E \hat{\mathbf{e}}_y$$

# Polarizzazione dell'onda

- Sommiamo le due onde

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_a e^{i\omega t - ikz} + \tilde{\mathbf{E}}_b e^{i\omega t - ikz} = E(\hat{\mathbf{e}}_x e^{i\omega t - ikz} + \hat{\mathbf{e}}_y e^{i\omega t - ikz})$$

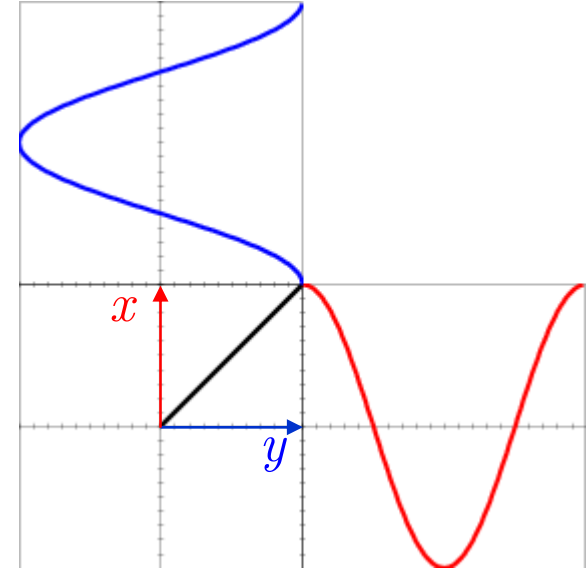
- Anziché scegliere opportunamente i vettori complessi  $\tilde{\mathbf{E}}_a$  e  $\tilde{\mathbf{E}}_b$  abbiamo scelto la costante  $E$  reale e di prendere la parte reale del vettore complesso  $\mathbf{E}_s$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= \text{Re } \mathbf{E}_s(z, t) = E\hat{\mathbf{e}}_y \cos(\omega t - kz) + E\hat{\mathbf{e}}_x \cos(\omega t - kz) \\ &= E[\hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_y] \cos(\omega t - kz) \end{aligned}$$

- Abbiamo ottenuto un'onda polarizzata linearmente con polarizzazione obliqua
- Visualizziamo il campo  $\mathbf{E}$  per  $z = 0$  in funzione del tempo

$$\mathbf{E}(0, t) = E[\hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_y] \cos \omega t$$

- È l'andamento temporale del campo sul piano  $z = 0$ 
  - La direzione del vettore è sempre la stessa
  - La lunghezza del vettore oscilla



# Polarizzazione dell'onda

- Utilizziamo adesso altre due onde

$$\tilde{\mathbf{E}}_a = E e^{i\pi/2} \hat{\mathbf{e}}_x \quad \tilde{\mathbf{E}}_b = E \hat{\mathbf{e}}_y$$

- Il vettore  $\tilde{\mathbf{E}}_a$  ha una parte immaginaria che introduce una fase  $(+\frac{\pi}{2})$
- Sommiamo le due onde

$$\mathbf{E}_s(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_a e^{i\omega t - ikz} + \tilde{\mathbf{E}}_b e^{i\omega t - ikz} = E(\hat{\mathbf{e}}_x e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\omega t - ikz} + \hat{\mathbf{e}}_y e^{i\omega t - ikz})$$

$$\mathbf{E}_s(z, t) = E(\hat{\mathbf{e}}_x e^{i\omega t - ikz + i\pi/2} + \hat{\mathbf{e}}_y e^{i\omega t - ikz})$$

- Calcoliamo la parte reale

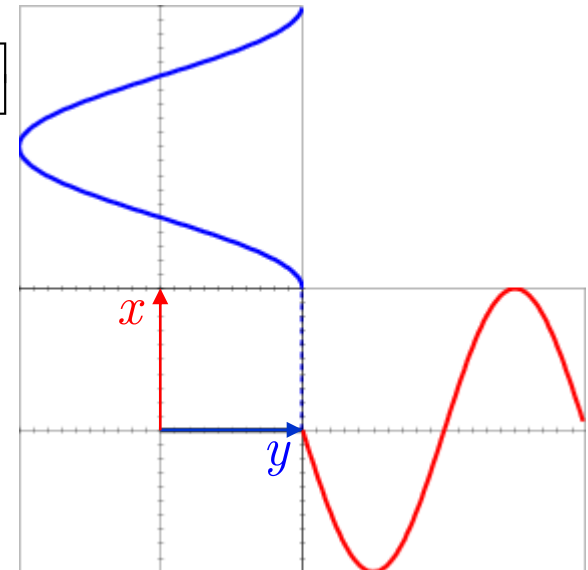
$$\mathbf{E}_s(z, t) = \text{Re } \mathbf{E}(z, t) = E[\hat{\mathbf{e}}_x \cos(\omega t - kz + \pi/2) + \hat{\mathbf{e}}_y \cos(\omega t - kz)]$$

$$\mathbf{E}_s(z, t) = E[-\hat{\mathbf{e}}_x \sin(\omega t - kz) + \hat{\mathbf{e}}_y \cos(\omega t - kz)]$$

- In questo caso la polarizzazione è circolare
- Studiamo il campo sul piano  $z = 0$

$$\mathbf{E}_s(0, t) = E[-\hat{\mathbf{e}}_x \sin \omega t + \hat{\mathbf{e}}_y \cos \omega t]$$

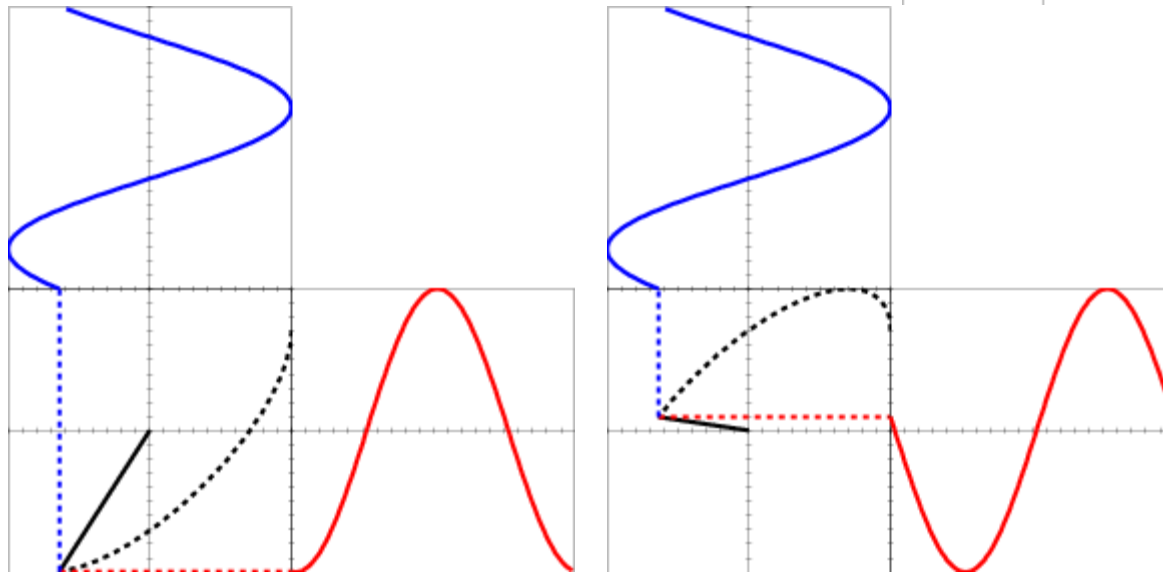
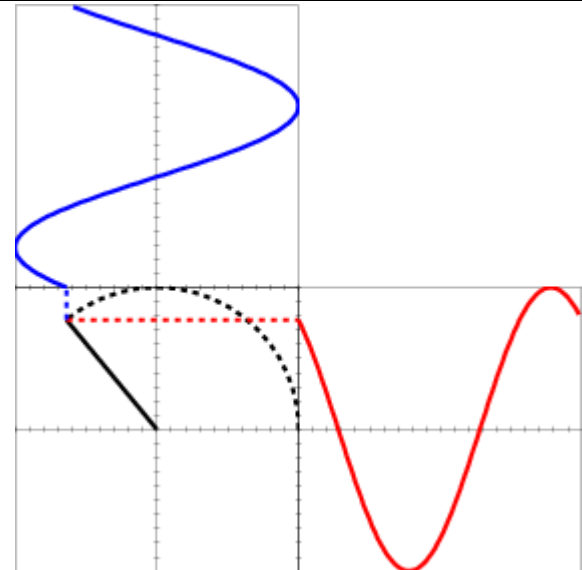
- Guardando verso la sorgente il vettore  $\mathbf{E}$  ruota in senso antiorario: polarizzazione destrorsa
- L'onda rappresentata viaggia "entrando" nella figura



# Polarizzazione dell'onda

- Se lo sfasamento è  $-\pi/2$  E (visto dalla sorgente) ruota in senso orario: polarizzazione destra
- Infine consideriamo due ulteriori sfasamenti
  - $\phi = \pm\pi/4$
  - In questo caso le onde sono polarizzate ellitticamente
    - $\phi$  positivo polarizzazione sinistra
    - $\phi$  negativo polarizzazione destra

$$\mathbf{E}_s(0,t) = E[\hat{\mathbf{e}}_z \cos(\omega t + \pi/4) + \hat{\mathbf{e}}_y \cos(\omega t)]$$



# Teorema di Poynting

---

- Abbiamo scritto l'energia associata ai campi **elettrici e magnetici** con le seguenti espressioni

$$U_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 dV \qquad U_M = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV$$

- Queste espressioni valgono anche per campi variabili nel tempo
- Per un campo elettromagnetico si scrive

$$U_{EM} = \frac{1}{2} \int (\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) dV$$

- Supponiamo che una distribuzione di cariche  $\rho$  e di correnti  $\mathbf{J}$  generi un campo elettromagnetico descritto dai campi  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$

- Supponiamo che le cariche si muovano

- $\mathbf{v}$  è la velocità dell'elemento di carica contenuto in  $dV$

- Calcoliamo il lavoro fatto dal campo elettromagnetico su di esse nel tempo  $dt$

- Consideriamo un elemento di volume  $dV$

$$dq = \rho dV \qquad \mathbf{J} dV = \rho \mathbf{v} dV = dq \mathbf{v}$$

- Su questa carica (infinitesima) agisce la forza di Lorentz  $\mathbf{f}$  (infinitesima)

- Il lavoro fatto nel volume  $dV$  ( $w$  densità di lavoro) è dato da

$$dw dV = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dt = dq (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = dq \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt$$

$$dw dV = \rho dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} dt dV = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dt dV$$

# Teorema di Poynting

---

- Pertanto la potenza erogata nel volume  $dV$  è data da

$$\frac{dw}{dt} dV = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV$$

- Integrando sul volume

$$\frac{dW}{dt} = \int \frac{dw}{dt} dV = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} dV$$

- Consideriamo l'equazione di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- Introducendo nell'equazione per la potenza

$$\frac{dW}{dt} = \int \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) dV$$

- Sviluppiamo il primo termine utilizzando (vedi diapositiva [55](#))

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{C})$$

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

# Teorema di Poynting

---

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Inseriamo nella espressione della potenza

$$\frac{dW}{dt} = \int \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) dV$$

$$\frac{dW}{dt} = \int \left( -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) dV$$

- Osserviamo che

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t} \quad \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial B^2}{\partial t}$$

- Sostituendo

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\mu_0} \int \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{\mu_0} B^2 + \varepsilon_0 E^2 \right) dV$$

- Il secondo integrale è l'energia elettromagnetica
- Trasformiamo il primo integrale con il teorema della divergenza

# Teorema di Poynting

---

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\mu_0} \int \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{\mu_0} B^2 + \varepsilon_0 E^2 \right) dV$$

- Utilizzando il teorema della divergenza

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV = \oint_{\partial V} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}$$

- Il simbolo  $\partial V$  indica la superficie che delimita il volume  $V$
- Sostituendo

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\mu_0} \oint_{\partial V} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int_V \left( \frac{1}{\mu_0} B^2 + \varepsilon_0 E^2 \right) dV$$

- Definiamo il vettore di Poynting

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad \frac{dW}{dt} = -\oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} - \frac{\partial U_{EM}}{\partial t} \quad [\mathbf{S}] = \text{Js}^{-1}\text{m}^{-2}$$

- Interpretiamo l'equazione trovata

*Il lavoro fatto sulle cariche e sulle correnti dalle forze elettromagnetiche è uguale alla diminuzione dell'energia del campo meno l'energia che fluisce attraverso la superficie che delimita il sistema*

# Teorema di Poynting

---

$$\frac{dW}{dt} = -\oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} - \frac{\partial U_{EM}}{\partial t}$$

- La relazione precedente può essere messa in forma differenziale

- Definiamo delle quantità per unità di volume: densità

Lavoro per unità di volume  $w$        $W = \int_V w dV$       Densità di energia del campo  $u_{EM}$        $U_{EM} = \int_V u_{EM} dV$

- Utilizziamo il teorema della divergenza

- Sostituendo nella relazione iniziale

$$\oint_{\partial V} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV$$

$$\int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = -\int_V \nabla \cdot \mathbf{S} dV - \int_V \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} dV$$

- Uguagliamo gli integrandi

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{S} - \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t}(w + u_{EM})$$

- Attraverso una superficie che racchiude un sistema elettromagnetico può fluire energia verso l'esterno:  $\nabla \cdot \mathbf{S} > 0$

- a) Se la potenza  $dw/dt$  è negativa: le cariche cedono energia al campo
- b) L'energia immagazzinata nel campo diminuisce:  $du_{EM}/dt < 0$