Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 35 – 11.05.2023

Equazione delle Onde Elettromagnetiche e sue soluzioni
Onde piane - Onde monocromatiche
Polarizzazione delle onde

Anno Accademico 2022/2023

Equazione dell'onda

- Scriviamo adesso l'equazione di propagazione dei campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ dopo che l'onda è stata generata
  - Utilizziamo le equazioni di Maxwell nel vuoto con $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \underbrace{\frac{1}{c^2}}_{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

    - Si tratta di un sistema di equazioni differenziali accoppiate
  - Per disaccoppiare i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ calcoliamo il rotore delle ultime due equazioni
    - Utilizziamo l'identità (diapositiva 82) $\quad \boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{V} \right) = \boldsymbol{\nabla} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{V} \right) - \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{V}$
  - Applichiamola alla terza equazione

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} \right) = \boldsymbol{\nabla} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} \right) - \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}}{\partial t}$$

    - Utilizziamo la quarta equazione

$$-\boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

    - È una forma compatta per indicare le tre equazioni

$$\boldsymbol{\nabla}^2 E_x = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \qquad \boldsymbol{\nabla}^2 E_y = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \qquad \boldsymbol{\nabla}^2 E_z = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

Equazione dell'onda

- Si può dimostrare che anche le componenti B_x, B_y, B_z del campo magnetico soddisfano la stessa equazione del campo $\mathbf{E}$

$$\nabla^2\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}$$

  - Inoltre verificheremo in seguito che anche il potenziale vettore $\mathbf{A}$ e il potenziale scalare ϕ soddisfano la stessa equazione dell'onda

- Da un punto di vista matematico si tratta di una equazione differenziale alle derivate parziali di tipo iperbolico

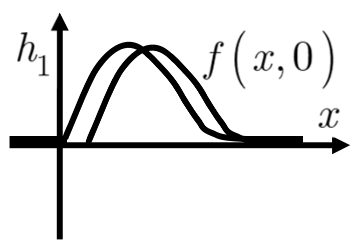
$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

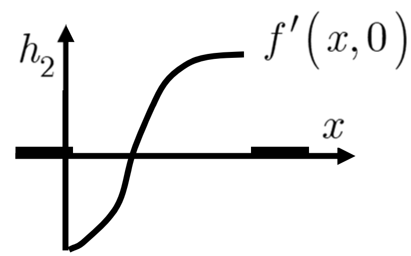
  - Per risolverla occorre definire le condizioni iniziali

$$f\left(\mathbf{r},0\right) = h_1\left(\mathbf{r}\right) \qquad \left.\frac{\partial f\left(\mathbf{r},t\right)}{\partial t}\right|_{t=0} = h_2\left(\mathbf{r}\right)$$

    - Ad esempio nel caso unidimensionale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$





Soluzioni dell'equazione dell'onda

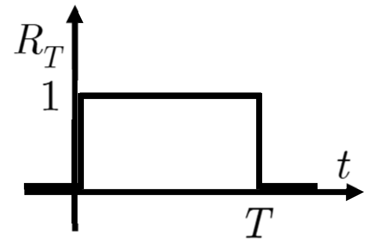
- Le equazioni trovate sono una generalizzazione a tre dimensioni dell'equazione dell'onda in una dimensione

$$\frac{\partial^2 f\left(x,t\right)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f\left(x,t\right)}{\partial t^2} \quad \Longrightarrow \quad \nabla^2 f\left(\mathbf{r},t\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f\left(\mathbf{r},t\right)}{\partial t^2}$$

  - Com'è noto nel caso unidimensionale la soluzione generale è

$$f(x,t) = u(x-ct) + v(x+ct)$$

u,v sono funzioni continue con derivata continua

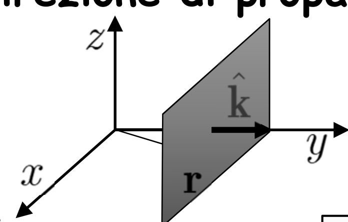


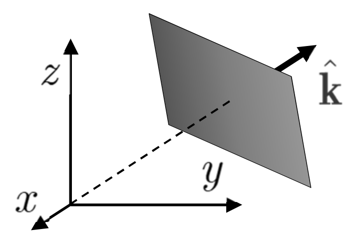
    - Naturalmente la funzione $E_y = -\mu_0 cKR_T(x-ct)$ soddisfa il nostro problema della corrente superficiale infinita
  - Per correnti parallele ai piani $x-y$ e $x-z$ le soluzioni avrebbero potuto essere

$$E_x = -\mu_0 cKR_T(z-ct) \qquad E_z = -\mu_0 cKR_T(y-ct)$$

  - La caratteristica saliente di queste soluzioni è che il campo è costante sui piani perpendicolari alla direzione di propagazione
    - Ad esempio

$$y - ct = \hat{\mathbf{e}}_y \cdot \mathbf{r} - ct$$





    - Nel caso in cui la direzione di propagazione sia arbitraria

$$\hat{\mathbf{e}}_i \rightarrow \hat{\mathbf{k}} \qquad \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{r} - ct \rightarrow \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - ct$$

E è costante in ogni punto del piano

NB: non tutte le soluzioni sono onde piane

Soluzioni dell'equazione dell'onda ***

- **Cerchiamo le soluzioni dell'equazione dell'onda unidimensionale utilizzando la trasformata di Fourier**

$$\frac{\partial^2 f\left(x,t\right)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f\left(x,t\right)}{\partial t^2}$$

  - **La trasformata di Fourier è definita come**

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{+ikx} dk$$

  - **Applicando le formule precedenti alla funzione di due variabili $f(x,t)$**

$$F(k,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t) e^{-ikx} dx \qquad f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(k,t) e^{+ikx} dk$$

    - **Calcoliamo le derivate di $f(x,t)$**

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} -k^2 F(k,t) e^{+ikx} dk \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F(k,t)}{\partial t^2} e^{+ikx} dk$$

  - **Introduciamo nell'equazione**

$$\frac{\partial^2 f\left(x,t\right)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f\left(x,t\right)}{\partial t^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(k^2 F(k,t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F(k,t)}{\partial t^2}\right) e^{+ikx} dk = 0$$

  - **L'integrando deve essere identicamente nullo**

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F(k,t)}{\partial t^2} + k^2 F(k,t) = 0$$

Soluzioni dell'equazione dell'onda ***

- Abbiamo pertanto ricondotto il problema alla ricerca della soluzione di un'equazione differenziale ordinaria (oscillatore armonico)

$$\frac{d^2F(k,t)}{dt^2} = -\omega^2 F(k,t) \qquad\qquad \omega^2 = k^2c^2$$

  - Per ogni valore di k la soluzione è

$$F(k,t) = U(k)e^{-i\omega t} + V(k)e^{+i\omega t}$$

    - Rimandiamo la discussione delle "costanti" $U(k)$ e $V(k)$ che dipendono dalle condizioni iniziali
  - Inserendo nell'espressione per $f(x,t)$

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[U(k)e^{-i\omega t} + V(k)e^{+i\omega t}\right]e^{+ikx}dk$$

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[U(k)e^{-i\omega t+ikx} + V(k)e^{+i\omega t+ikx}\right]dk$$

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[U(k)e^{-ikct+ikx} + V(k)e^{+ikct+ikx}\right]dk$$

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[U(k)e^{+ik(x-ct)} + V(k)e^{+ik(x+ct)}\right]dk$$

Soluzioni dell'equazione dell'onda

- Esaminiamo la soluzione trovata

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[U(k)e^{+ik(x+ct)} + V(k)e^{+ik(x-ct)}\right]dk$$

$$f(x,t) = u(x+ct) + v(x-ct)$$

  - Abbiamo ritrovato la soluzione di D'Alembert
- La soluzione *generale* dell'equazione è la somma di due onde
  - Un'onda che propaga nel senso negativo delle x
  - Un'onda che propaga nel senso positivo delle x
- È facile verificare che per una arbitraria funzione $h(x)$, due volte continua $h(x \pm ct)$ è soluzione dell'equazione delle onde
- Inoltre osserviamo che le funzioni $\exp[\pm ik(x \pm ct)]$ sono soluzioni dell'equazione delle onde
  - Sono funzioni trigonometriche (seni e coseni)
    - I parametri ω e k non sono indipendenti $\omega = kc$
  - Le funzioni $\exp[\pm ik(x \pm ct)]$ dette anche onde monocromatiche di frequenza $\omega = kc$
- La soluzione *generale*, espressa sotto forma di trasformata, è una sovrapposizione (integrale) di onde monocromatiche con frequenze diverse

Soluzioni dell'equazione dell'onda ***

- Per finire determiniamo $U(k)$ e $V(k)$ in funzione delle condizioni iniziali

$$f\left(x,0\right) = h_1\left(x\right) \qquad H_1(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(x)e^{-ikx}dx \qquad h_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H_1(k)e^{+ikx}dk$$

$$\left.\frac{\partial f\left(x,t\right)}{\partial t}\right|_{t=0} = h_2\left(x\right) \qquad H_2(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(x)e^{-ikx}dx \qquad h_2(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H_2(k)e^{+ikx}dk$$

- Abbiamo

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[U(k)e^{+ik(x+ct)} + V(k)e^{+ik(x-ct)}\right]dk$$

$$f(x,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[U(k) + V(k)\right]e^{+ikx}dk \quad \Longrightarrow \quad H_1(k) = U(k) + V(k)$$

- Inoltre

$$\dot{f}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} ikc\left[U(k)e^{+ik(x+ct)} - V(k)e^{+ik(x-ct)}\right]dk$$

$$\dot{f}(x,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} ikc\left[U(k) - V(k)\right]e^{+ikx}dk \quad \Longrightarrow \quad H_2(k) = ikc\left[U(k) - V(k)\right]$$

- Otteniamo

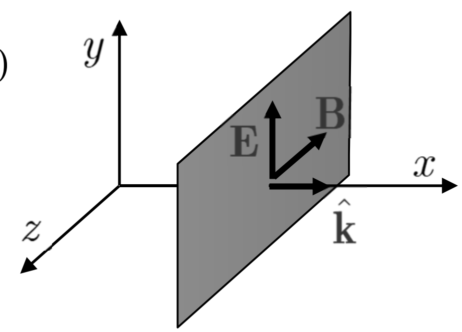
$$\boxed{U(k) = \frac{1}{2}\left[H_1(k) + \frac{H_2(k)}{ikc}\right]} \qquad \boxed{V(k) = \frac{1}{2}\left[H_1(k) - \frac{H_2(k)}{ikc}\right]}$$

Onde piane e monocromatiche

- Ritorniamo alle onde elettromagnetiche
  - Abbiamo visto che i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ soddisfano le equazioni

$$\nabla^2\mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \qquad \nabla^2\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} \qquad \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} = c^2$$

    - In coordinate cartesiane le 6 componenti dei campi soddisfano le equazioni dell'onda
  - Una soluzione dell'equazione dell'onda non soddisfa necessariamente le equazioni di Maxwell (che accoppiano $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$)
    - Le equazioni d'onda per $\mathbf{E}$ e per $\mathbf{B}$ sono disaccoppiate
  - La richiesta che le soluzioni soddisfino anche le equazioni di Maxwell restringe le soluzioni accettabili: onde elettromagnetiche
    - Le equazioni $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$ e $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ impongono che $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ siano perpendicolari alla direzione di propagazione
    - Le equazioni del rotore impongono che i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ siano perpendicolari fra loro e i loro moduli collegati
- Consideriamo soluzioni del tipo $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0\; e^{-i(\omega t\;-\;kx)}$
  - Un'onda che propaga lungo l'asse x
  - I campi $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ hanno lo stesso valore sui piani perpendicolari all'asse x
  - Un'onda di questo tipo si chiama onda piana

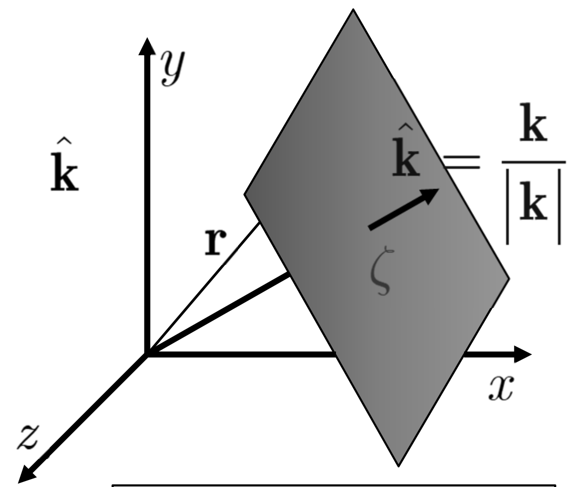


Soluzioni: onde piane

- In un'onda piana i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ non cambiano spostandosi sul piano
  - Non necessariamente il piano deve essere perpendicolare ad uno degli assi delle coordinate
    I campi dipendono solo dalla lunghezza ζ della proiezione di $\mathbf{r}$ nella direzione della normale al piano $\hat{\mathbf{k}}$

$$\zeta = \mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{k}_x x + \hat{k}_y y + \hat{k}_z z$$

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t\right) = \mathbf{E}\left(\zeta,t\right) \qquad \mathbf{B}\left(\mathbf{r},t\right) = \mathbf{B}\left(\zeta,t\right)$$



ζ è la distanza del piano dall'origine

  - Il fatto che il campo dipenda solo da ζ implica che le derivate assumano una forma particolare

$$\frac{\partial\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t\right)}{\partial x} = \frac{\partial\mathbf{E}\left(\zeta,t\right)}{\partial x} = \frac{\partial\mathbf{E}\left(\zeta,t\right)}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \hat{k}_x\frac{\partial\mathbf{E}\left(\zeta,t\right)}{\partial\zeta}$$

    - Espressioni analoghe per le altre derivate
  - Specializziamo queste considerazioni all'operatore ∇ applicato a un'onda piana (in coordinate cartesiane) o a una sua componente $f(\zeta)$

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{\mathbf{e}}_x\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z\frac{\partial}{\partial z} = \hat{k}_x\hat{\mathbf{e}}_x\frac{\partial}{\partial\zeta} + \hat{k}_y\hat{\mathbf{e}}_y\frac{\partial}{\partial\zeta} + \hat{k}_z\hat{\mathbf{e}}_z\frac{\partial}{\partial\zeta}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} = \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial\zeta}}$$

Soluzioni: onde piane

- Utilizzando l'espressione dell'operatore ∇ trovata per l'onda piana possiamo riscrivere le equazioni di Maxwell nel vuoto $\quad \nabla = \hat{\mathrm{k}}\dfrac{\partial}{\partial\zeta}$

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 0 \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla\times\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\hat{\mathbf{k}}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\zeta} = 0 \qquad \hat{\mathbf{k}}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\zeta} = 0 \qquad \hat{\mathbf{k}}\times\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\zeta} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \hat{\mathbf{k}}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\zeta} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

- Ricaviamo la proprietà di trasversalità dell'onda piana
  - Moltiplichiamo per $\hat{\mathrm{k}}$ la quarta equazione

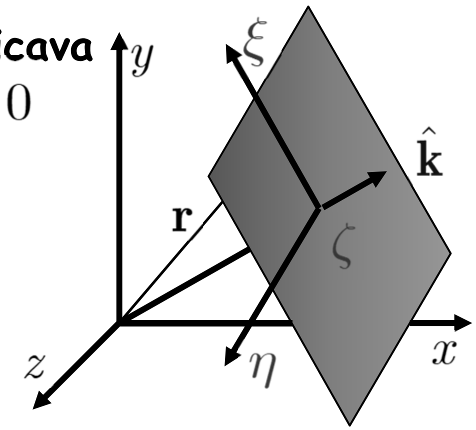
$$\hat{\mathbf{k}}\cdot\left(\hat{\mathbf{k}}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\zeta}\right) = \frac{1}{c^2}\hat{\mathbf{k}}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \Longrightarrow \hat{\mathbf{k}}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = 0 \Longrightarrow \hat{\mathbf{k}}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}dt = 0$$

  - Analogamente per la prima equazione si ha $\quad \hat{\mathbf{k}}\cdot\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial\zeta}d\zeta = 0$
  - Sommando le due equazioni

$$\hat{\mathbf{k}}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}dt + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\zeta}d\zeta\right) = 0 \qquad \text{definiamo} \qquad d\mathbf{E} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}dt + \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\zeta}d\zeta$$

- Il differenziale $d\mathbf{E}$ è la variazione del campo elettrico se ci si muove nella direzione di propagazione o se varia il tempo
  - L'onda è trasversale alla direzione di propagazione $\quad \boxed{\hat{\mathbf{k}}\cdot d\mathbf{E} = 0}$

Soluzioni: onde piane



- Analogamente dalla seconda e dalla terza equazione si ricava
  $\hat{\mathbf{k}} \cdot d\mathbf{B} = 0$ ricordiamo la precedente $\hat{\mathbf{k}} \cdot d\mathbf{E} = 0$
- Il significato di queste equazioni è il seguente
  - In un'onda piana le variazioni $d\mathbf{E}$ e $d\mathbf{B}$ dovute a spostamenti lungo ζ e/o a variazioni nel tempo sono perpendicolari a $\hat{\mathbf{k}}$
    - È possibile che la condizione sia verificata anche per campi con componente lungo ζ
    - Ad esempio, il campo $\mathbf{E}$ potrebbe avere una componente uniforme lungo ζ

$$\frac{\partial E_\zeta}{\partial \zeta} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \hat{\mathbf{k}} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{inoltre} \quad dE_\zeta = \frac{\partial E_\zeta}{\partial t} dt + \frac{\partial E_\zeta}{\partial \zeta} d\zeta = 0$$

- Implica che anche $\dfrac{\partial E_\zeta}{\partial t} = 0$ Significa che sarebbero campi statici
- Non sono onde che propagano
- Quindi i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ di un'onda piana *giacciono* sul piano perpendicolare a $\hat{\mathbf{k}}$
  - Utilizziamo un sistema di riferimento locale $\xi - \eta$
    - I campi possono essere scomposti nelle componenti E_ξ e E_η, B_ξ e B_η
  - Verifichiamo adesso che queste componenti soddisfano l'equazione dell'onda

Soluzioni: onde piane

- Ricaviamo l'equazione dell'onda nella coordinata ζ

$$\hat{\mathbf{k}}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\zeta}=0 \qquad \hat{\mathbf{k}}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\zeta}=0 \qquad \hat{\mathbf{k}}\times\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\zeta}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \hat{\mathbf{k}}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\zeta}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

- Utilizziamo la terza e la quarta equazione
  - Moltiplichiamo vettorialmente la terza per $\hat{\mathbf{k}}$

$$\hat{\mathbf{k}}\times\left(\hat{\mathbf{k}}\times\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\zeta}\right)=-\hat{\mathbf{k}}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\hat{\mathbf{k}}\times\left(\hat{\mathbf{k}}\times\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\zeta}\right)=\hat{\mathbf{k}}\left(\cancel{\hat{\mathbf{k}}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\zeta}}\right)-\left(\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}}\right)\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\zeta}\quad=-\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\zeta}=-\hat{\mathbf{k}}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

  - Deriviamo rispetto a ζ l'equazione ottenuta e rispetto a t la quarta

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial\zeta^2}=\hat{\mathbf{k}}\times\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t\partial\zeta} \qquad\qquad \hat{\mathbf{k}}\times\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t\partial\zeta}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$$

  - Eliminiamo $\mathbf{B}$

$$\boxed{\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial\zeta^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}}$$

Ci siamo ricondotti all'equazione dell'onda unidimensionale

  - Analogamente per il campo $\mathbf{B}$

Soluzioni: onde piane

- **Le equazioni trovate sono quelle dell'onda unidimensionale**
  - **Utilizziamo le soluzioni trovate precedentemente (vedi diapositiva 383)**

$$f(\zeta,t) = e^{\pm i\left(k\zeta \pm \omega t\right)} = e^{\pm i\left(\omega t \pm k\zeta\right)}$$

  - **Pertanto ci sono due soluzioni che descrivono**
    - **Un'onda che viaggia verso "destra": $\omega t - k\zeta$**
    - **Un'onda che viaggia verso "sinistra": $\omega t + k\zeta$**
- **Per ciascuno dei due tipi di onda esistono ancora due soluzioni $e^{\pm i(\dots)}$**
  - **La soluzione generale sarà data da**

$$Ae^{+i\phi} + Be^{-i\phi} \qquad \phi \text{ può essere } \omega t - k\zeta \text{ oppure } \omega t + k\zeta$$

  - **Le costanti A e B sono scelte in modo che la soluzione sia reale: $B = A^*$**
    - **Definiamo $\rho = |A| = |B|$ e $\delta = \arg(A) = -\arg(B)$**

$$Ae^{+i\phi} + Be^{-i\phi} = \rho e^{+i\delta}e^{+i\phi} + \rho e^{-i\delta}e^{-i\phi} = \rho\left[e^{+i\left(\phi+\delta\right)} + e^{-i\left(\phi+\delta\right)}\right]$$
$$= 2\rho\cos\left(\phi + \delta\right)$$

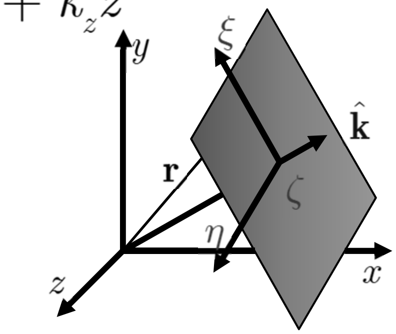
    - **Sia la fase δ che l'ampiezza ρ sono arbitrarie (ρ o 2ρ è la stessa cosa)**
    - **Una differenza di $\pi/2$ in δ fa passare da un seno a un coseno**
  - **Le soluzioni sono pertanto onde sinusoidali che viaggiano in due direzioni**

$$\rho\sin\left(\omega t \pm k\zeta + \delta\right) \qquad \rho\cos\left(\omega t \pm k\zeta + \delta\right)$$ **sono anche monocromatiche**

Soluzioni: onde piane

- Abbiamo visto che le soluzioni sono onde sinusoidali
  - Tuttavia è molto più semplice utilizzare gli esponenziali complessi
    - Per tale motivo si indica la soluzione nella forma $Ae^{i(\omega t \pm k\zeta)}$
    - La costante A è in generale complessa: contiene eventuali sfasamenti δ
    - Alla fine del calcolo (lineare) si prende la parte reale
- Usiamo il vettore d'onda $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}$ $\quad k\zeta = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$
- Consideriamo un'onda generale $Ae^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} + Be^{i(\omega t + \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$

progressiva | regressiva



- Ritornando alla soluzione per il campo elettrico troviamo

$$E_\xi(\mathbf{r},t) = E_{1\xi}e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + E_{2\xi}e^{i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

  - Le costanti $E_{1\xi}$ e $E_{2\xi}$ sono, in generale, complesse
    - Per la componente E_η del campo si trova una soluzione analoga

$$E_\eta(\mathbf{r},t) = E_{1\eta}e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + E_{2\eta}e^{i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

    - In forma vettoriale

$$\boxed{\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{E}}_1 e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{E}}_2 e^{i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}$$

    - Il simbolo $\sim$ (tilde) utilizzato per i vettori sottolinea che, in generale, si tratta di grandezze complesse
      - I vettori complessi sono necessari per permettere una fase arbitraria

Soluzioni: onde piane

- Per il campo magnetico si trova una soluzione analoga

$$\boxed{\mathbf{B}\left(\mathbf{r},t\right) = \tilde{\mathbf{B}}_1 e^{i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{B}}_2 e^{i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}$$

- Troviamo una relazione fra i vettori $\tilde{\mathrm{E}}_1$ e $\tilde{\mathrm{E}}_2$ e i vettori $\tilde{\mathrm{B}}_1$ e $\tilde{\mathrm{B}}_2$
- Utilizziamo l'equazione (vedi diapositiva 387)

$$\hat{\mathbf{k}} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$ ricordiamo il campo E $$\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t\right) = \tilde{\mathbf{E}}_1 e^{i\omega t - ik\zeta} + \tilde{\mathbf{E}}_2 e^{i\omega t + ik\zeta}$$

- Calcoliamo le derivate

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = -ik\tilde{\mathbf{E}}_1 e^{i\omega t - ik\zeta} + ik\tilde{\mathbf{E}}_2 e^{i\omega t + ik\zeta} \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = i\omega\left(\tilde{\mathbf{B}}_1 e^{i\omega t - ik\zeta} + \tilde{\mathbf{B}}_2 e^{i\omega t + ik\zeta}\right)$$

- Introduciamo nell'equazione di Maxwell

$$-ik\,\hat{\mathbf{k}} \times \left(\tilde{\mathbf{E}}_1 e^{i\omega t - ik\zeta} - \tilde{\mathbf{E}}_2 e^{i\omega t + ik\zeta}\right) = -i\omega\left(\tilde{\mathbf{B}}_1 e^{i\omega t - ik\zeta} + \tilde{\mathbf{B}}_2 e^{i\omega t + ik\zeta}\right)$$

- Uguagliamo i coefficienti dei due esponenziali (ricordiamo $\omega = kc$)

$$ik\,\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}_1 = i\omega\tilde{\mathbf{B}}_1 \qquad \tilde{\mathbf{B}}_1 = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}_1$$

progressiva

$$\tilde{\mathbf{E}}_1 = -c\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{B}}_1$$

$$ik\,\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}_2 = -i\omega\tilde{\mathbf{B}}_2 \qquad \tilde{\mathbf{B}}_2 = \frac{1}{c}(-\hat{\mathbf{k}}) \times \tilde{\mathbf{E}}_2$$

regressiva

$$\tilde{\mathbf{E}}_2 = -c(-\hat{\mathbf{k}}) \times \tilde{\mathbf{B}}_2$$

Soluzioni: onde piane

- **Consideriamo un'onda che viaggia nella direzione positiva z** $\quad \mathbf{k} = k\,\hat{\mathbf{e}}_z$
  - **Supponiamo il vettore $\tilde{\mathrm{E}}_1$ nella direzione x** $\quad \tilde{\mathbf{E}}_1 = E\,\hat{\mathbf{e}}_x$
  - **Il vettore $\tilde{\mathrm{B}}_1$ punta nella direzione y**

$$\tilde{\mathbf{B}}_1 = \frac{1}{c}\hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}_1 = \frac{E}{c}\hat{\mathbf{e}}_z \times \hat{\mathbf{e}}_x = \frac{E}{c}\hat{\mathbf{e}}_y$$

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{r},t\right) = \tilde{\mathbf{E}}_1 e^{i\omega t - ikz}$$

$$\mathbf{B}\left(\mathbf{r},t\right) = \tilde{\mathbf{B}}_1 e^{i\omega t - ikz}$$

- **Il periodo dell'onda**

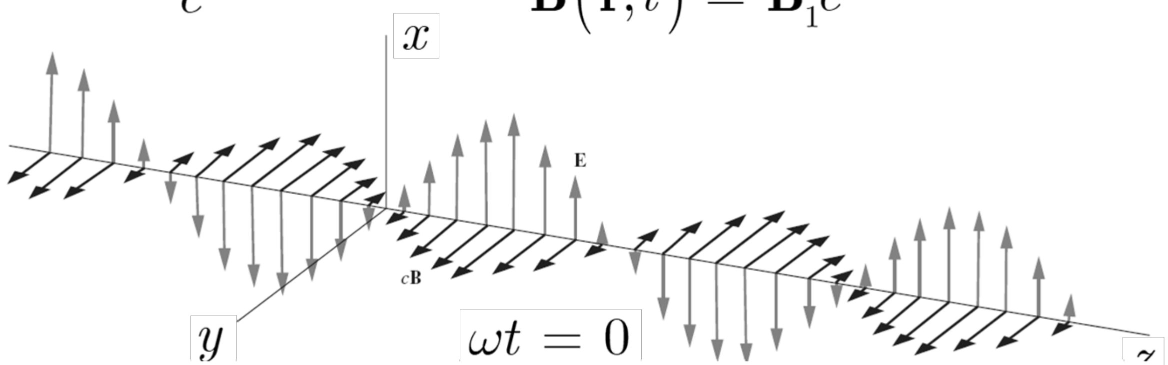
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

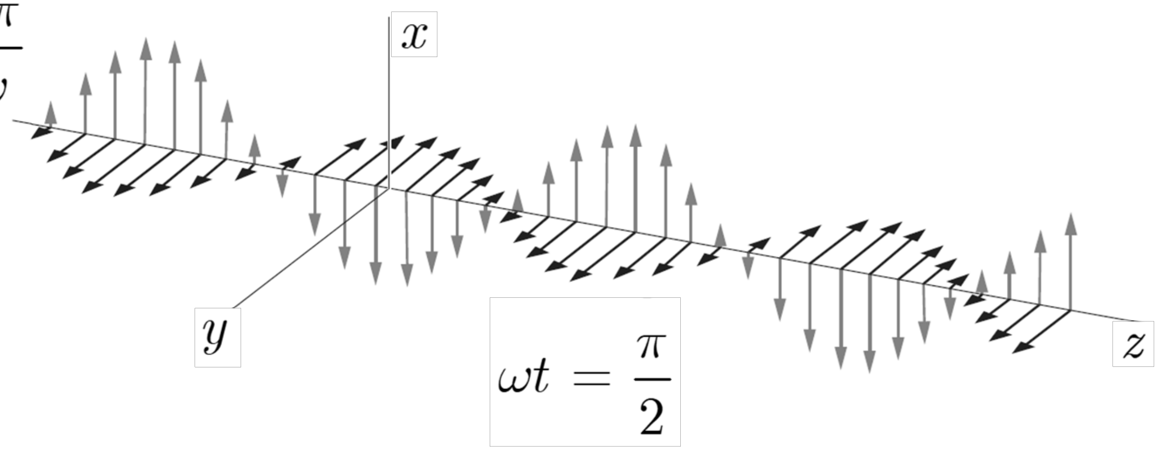
- **La lunghezza d'onda**

$$\lambda = cT = \frac{\omega}{k}T = \frac{\omega}{k}\frac{2\pi}{\omega}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$





Lo spettro delle onde elettromagnetiche

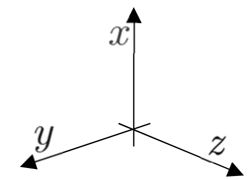
The Electromagnetic Spectrum		
Frequency (Hz)	Type	Wavelength (m)
10^{22}		10^{-13}
10^{21}	gamma rays	10^{-12}
10^{20}		10^{-11}
10^{19}		10^{-10}
10^{18}	x-rays	10^{-9}
10^{17}		10^{-8}
10^{16}	ultraviolet	10^{-7}
10^{15}	visible	10^{-6}
10^{14}	infrared	10^{-5}
10^{13}		10^{-4}
10^{12}		10^{-3}
10^{11}		10^{-2}
10^{10}	microwave	10^{-1}
10^{9}		1
10^{8}	TV, FM	10
10^{7}		10^{2}
10^{6}	AM	10^{3}
10^{5}		10^{4}
10^{4}	RF	10^{5}
10^{3}		10^{6}

Lo spettro visibile

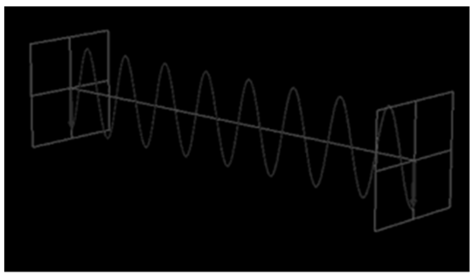
The Visible Range		
Frequency (Hz)	Color	Wavelength (m)
1.0×10^{15}	near ultraviolet	3.0×10^{-7}
7.5×10^{14}	shortest visible blue	4.0×10^{-7}
6.5×10^{14}	blue	4.6×10^{-7}
5.6×10^{14}	green	5.4×10^{-7}
5.1×10^{14}	yellow	5.9×10^{-7}
4.9×10^{14}	orange	6.1×10^{-7}
3.9×10^{14}	longest visible red	7.6×10^{-7}
3.0×10^{14}	near infrared	1.0×10^{-6}

Polarizzazione dell'onda

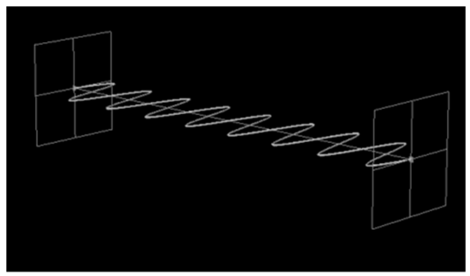
- L'onda che abbiamo visto ha il vettore campo elettrico che oscilla parallelamente alla direzione x
  - Si definisce questo tipo di onda "polarizzata linearmente"
  - Naturalmente il vettore $\mathbf{E}$ può puntare in qualsiasi direzione
  - La direzione del vettore $\mathbf{E}$ è la direzione in cui è polarizzata l'onda
    - Ad esempio …



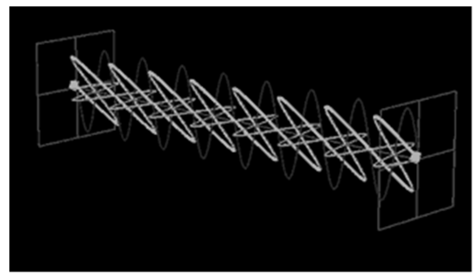
polarizzazione verticale



polarizzazione orizzontale



polarizzazione obliqua



- Vediamo in dettaglio come costruire un'onda polarizzata obliquamente tramite la sovrapposizione di altre due onde
  - Utilizziamo due onde con polarizzazione Verticale e Orizzontale $\mathbf{E}_x$ e $\mathbf{E}_y$

$$\mathbf{E}_x\left(\mathbf{r},t\right) = \tilde{\mathbf{E}}_a e^{i\omega t - ikz} \qquad \mathbf{E}_y\left(\mathbf{r},t\right) = \tilde{\mathbf{E}}_b e^{i\omega t - ikz}$$

  - Scegliamo i due vettori $\tilde{\mathbf{E}}_a$ e $\tilde{\mathbf{E}}_b$ nel modo seguente

$$\tilde{\mathbf{E}}_a = E\,\hat{\mathbf{e}}_x \qquad \tilde{\mathbf{E}}_b = E\,\hat{\mathbf{e}}_y$$

Polarizzazione dell'onda

- Sommiamo le due onde

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r},t) = \tilde{\mathbf{E}}_a e^{i\omega t - ikz} + \tilde{\mathbf{E}}_b e^{i\omega t - ikz} = E(\hat{\mathbf{e}}_x e^{i\omega t - ikz} + \hat{\mathbf{e}}_y e^{i\omega t - ikz})$$

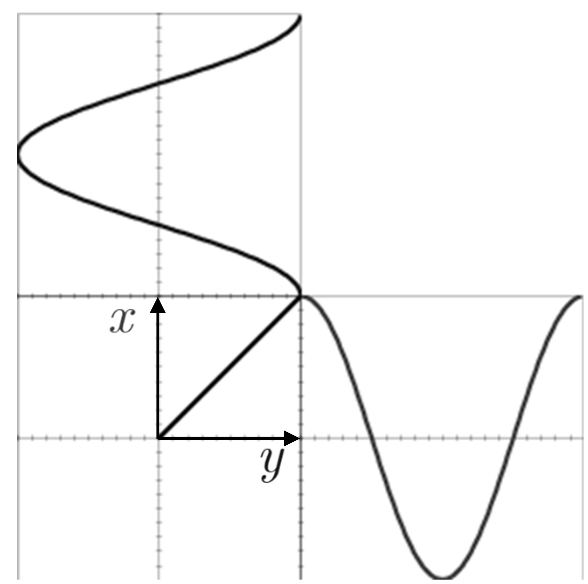
- Anziché scegliere opportunamente i vettori complessi $\tilde{\mathbf{E}}_a$ e $\tilde{\mathbf{E}}_b$ abbiamo scelto la costante E reale e di prendere la parte reale del vettore complesso $\mathbf{E}_s$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z,t) &= \mathrm{Re}\,\mathbf{E}_s(z,t) = E\hat{\mathbf{e}}_y \cos(\omega t - kz) + E\hat{\mathbf{e}}_x \cos(\omega t - kz) \\ &= E\left[\hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_y\right]\cos(\omega t - kz)\end{aligned}$$

- Abbiamo ottenuto un'onda polarizzata linearmente con polarizzazione obliqua
- Visualizziamo il campo $\mathbf{E}$ per $z = 0$ in funzione del tempo

$$\mathbf{E}(0,t) = E\left[\hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_y\right]\cos\omega t$$

- È l'andamento temporale del campo sul piano $z = 0$
  - La direzione del vettore è sempre la stessa
  - La lunghezza del vettore oscilla



Polarizzazione dell'onda

- **Utilizziamo adesso altre due onde** $\tilde{\mathbf{E}}_a = E\, e^{i\pi/2}\, \hat{\mathbf{e}}_x \quad \tilde{\mathbf{E}}_b = E\hat{\mathbf{e}}_y$
  - **Il vettore $\tilde{\mathrm{E}}_a$ ha una parte immaginaria che introduce una fase $(+\frac{\pi}{2})$**
  - **Sommiamo le due onde**

$$\mathbf{E}_s(z,t) = \tilde{\mathbf{E}}_a e^{i\omega t - ikz} + \tilde{\mathbf{E}}_b e^{i\omega t - ikz} = E(\hat{\mathbf{e}}_x e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\omega t - ikz} + \hat{\mathbf{e}}_y e^{i\omega t - ikz})$$

$$\mathbf{E}_s\left(z,t\right) = E\left(\hat{\mathbf{e}}_x e^{i\omega t - ikz + i\pi/2} + \hat{\mathbf{e}}_y e^{i\omega t - ikz}\right)$$

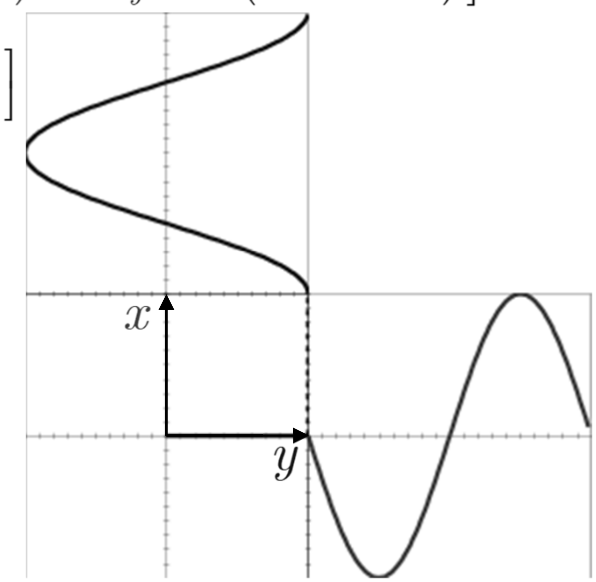
  - **Calcoliamo la parte reale**

$$\mathbf{E}_s\left(z,t\right) = \mathrm{Re}\,\mathbf{E}\left(z,t\right) = E\left[\hat{\mathbf{e}}_z \cos\left(\omega t - kz + \pi / 2\right) + \hat{\mathbf{e}}_y \cos\left(\omega t - kz\right)\right]$$

$$\mathbf{E}_s\left(z,t\right) = E\left[-\hat{\mathbf{e}}_x \sin\left(\omega t - kz\right) + \hat{\mathbf{e}}_y \cos\left(\omega t - kz\right)\right]$$

  - **In questo caso la polarizzazione è circolare**
  - **Studiamo il campo sul piano $z = 0$**

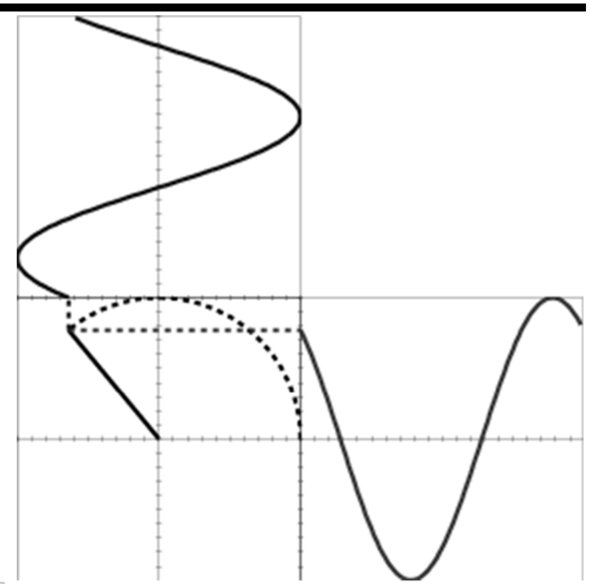
$$\mathbf{E}_s\left(0,t\right) = E\left[-\hat{\mathbf{e}}_z \sin\omega t + \hat{\mathbf{e}}_y \cos\omega t\right]$$



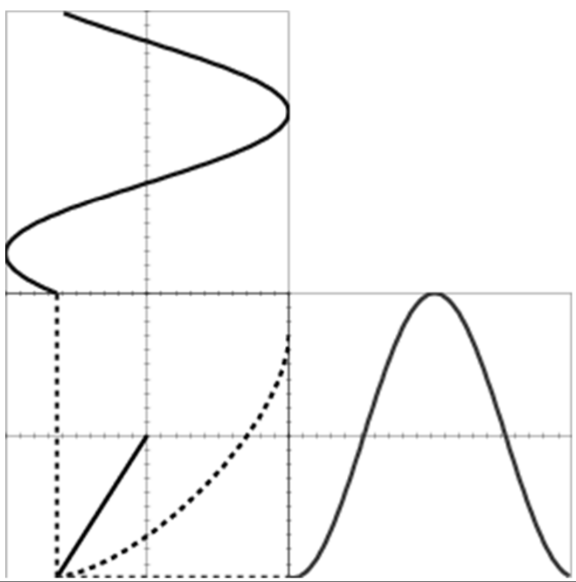
  - **Guardando verso la sorgente il vettore E ruota in senso antiorario: polarizzazione destrorsa**
    - **L'onda rappresentata viaggia "entrando" nella figura**

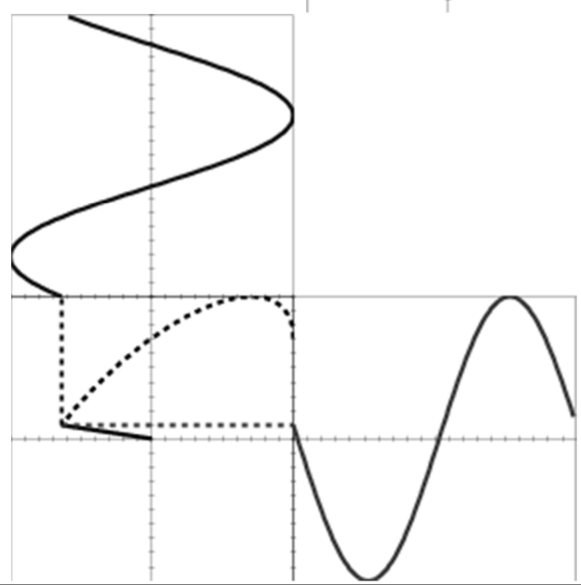
Polarizzazione dell'onda

- Se lo sfasamento è $-\pi/2$ $\mathbf{E}$ (visto dalla sorgente) ruota in senso orario: polarizzazione destra
- Infine consideriamo due ulteriori sfasamenti
  - $\phi = \pm\pi/4$
  - In questo caso le onde sono polarizzate ellitticamente
    - ϕ positivo polarizzazione sinistra
    - ϕ negativo polarizzazione destra



$$\mathbf{E}_s(0,t) = E\left[\hat{\mathbf{e}}_z \cos\left(\omega t + \pi / 4\right) + \hat{\mathbf{e}}_y \cos\left(\omega t\right)\right]$$





Teorema di Poynting

- Abbiamo scritto l'energia associata ai campi elettrici e magnetici con le seguenti espressioni

$$U_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 dV \qquad\qquad U_M = \frac{1}{2\mu_0}\int B^2 dV$$

  - Queste espressioni valgono anche per campi variabili nel tempo
  - Per un campo elettromagnetico si scrive

$$U_{EM} = \frac{1}{2}\int (\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2)dV$$

- Supponiamo che una distribuzione di cariche ρ e di correnti $\mathbf{J}$ generi un campo elettromagnetico descritto dai campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$
  - Supponiamo che le cariche si muovano
    - $\mathbf{v}$ è la velocità dell'elemento di carica contenuto in dV
  - Calcoliamo il lavoro fatto dal campo elettromagnetico su di esse nel tempo dt
    - Consideriamo un elemento di volume dV

$$dq = \rho dV \qquad\qquad \mathbf{J}dV = \rho\mathbf{v}dV = dq\mathbf{v}$$

    - Su questa carica (infinitesima) agisce la forza di Lorentz $\mathbf{f}$ (infinitesima)
    - Il lavoro fatto nel volume dV (w densità di lavoro) è dato da

$$dwdV = \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s} = \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}dt = dq\Big(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\Big)\cdot\mathbf{v}dt = dq\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}dt$$

$$dwdV = \rho dV\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}dt = \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}dtdV = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}dtdV$$

Teorema di Poynting

- Pertanto la potenza erogata nel volume dV è data da

$$\frac{dw}{dt}dV = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}dV$$

  - Integrando sul volume

$$\frac{dW}{dt} = \int\frac{dw}{dt}dV = \int\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}dV$$

- Consideriamo l'equazione di Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

  - Introducendo nell'equazione per la potenza

$$\frac{dW}{dt} = \int\left(\frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} - \varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)dV$$

  - Sviluppiamo il primo termine utilizzando (vedi diapositiva 55)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\mathbf{A}\times\mathbf{C}\right) = \mathbf{C}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\right) - \mathbf{A}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{C}\right)$$

$$\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right) + \mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right) - \mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

Teorema di Poynting

$$\mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{B} = -\nabla\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right) - \mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

- Inseriamo nella espressione della potenza

$$\frac{dW}{dt} = \int\left(\frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{B} - \varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)dV$$

$$\frac{dW}{dt} = \int\left(-\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right) - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)dV$$

- Osserviamo che

$$\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t} \qquad \mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial B^2}{\partial t}$$

- Sostituendo

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\mu_0}\int\nabla\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)dV - \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\mu_0}B^2 + \varepsilon_0 E^2\right)dV$$

- Il secondo integrale è l'energia elettromagnetica
- Trasformiamo il primo integrale con il teorema della divergenza

Teorema di Poynting

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\mu_0}\int \nabla\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)dV - \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\mu_0}B^2 + \varepsilon_0 E^2\right)dV$$

- **Utilizzando il teorema della divergenza**

$$\int_V \nabla\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)dV = \oint_{\partial V}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)\cdot d\mathbf{a}$$

  - **Il simbolo ∂V indica la superficie che delimita il volume V**
- **Sostituendo**

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\mu_0}\oint_{\partial V}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)\cdot d\mathbf{a} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int_V\left(\frac{1}{\mu_0}B^2 + \varepsilon_0 E^2\right)dV$$

  - **Definiamo il vettore di Poynting**

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \qquad \frac{dW}{dt} = -\oint_{\partial V}\mathbf{S}\cdot d\mathbf{a} - \frac{\partial U_{EM}}{\partial t} \qquad \left[\mathbf{S}\right] = \mathrm{Js^{-1}m^{-2}}$$

- **Interpretiamo l'equazione trovata**

Il lavoro fatto sulle cariche e sulle correnti dalle forze elettromagnetiche è uguale alla diminuzione dell'energia del campo meno l'energia che fluisce attraverso la superficie che delimita il sistema

Teorema di Poynting

$$\frac{dW}{dt} = -\oint_{\partial V} \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a} - \frac{\partial U_{EM}}{\partial t}$$

- **La relazione precedente può essere messa in forma differenziale**
  - **Definiamo delle quantità per unità di volume: densità**

Lavoro per unità di volume w $\quad W = \int_V w dV$ $\qquad$ **Densità di energia del campo u_{EM}** $\quad U_{EM} = \int_V u_{EM} dV$

  - **Utilizziamo il teorema della divergenza** $\quad \oint_{\partial V} \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a} = \int_V \mathbf{\nabla}\cdot\mathbf{S} dV$
  - **Sostituendo nella relazione iniziale**

$$\int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = -\int_V \mathbf{\nabla}\cdot\mathbf{S} dV - \int_V \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} dV$$

  - **Uguagliamo gli integrandi**

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\mathbf{\nabla}\cdot\mathbf{S} - \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} \ \rightarrow \mathbf{\nabla}\cdot\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t}(w + u_{EM})$$

  - **Attraverso una superficie che racchiude un sistema elettromagnetico può fluire energia verso l'esterno:** $\mathbf{\nabla}\cdot\mathrm{S} > 0$
    - **a) Se la potenza dw/dt è negativa: le cariche cedono energia al campo**
    - **b) L'energia immagazzinata nel campo diminuisce: $du_{EM}/dt < 0$**