
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 34 - 08.05.2023

Il campo H - Discontinuità di H

Ferromagnetismo

Equazioni di Maxwell nella materia

Onde elettromagnetiche

Anno Accademico 2022/2023

Il campo H

- Il campo H ha nomi diversi in letteratura
 - Viene anche chiamato "campo magnetico"
 - Nel nostro corso abbiamo sempre chiamato campo magnetico il campo B
 - Chiameremo il nuovo campo "campo H"
- Il campo H è analogo al campo D introdotto in elettrostatica
 - Lega il campo alle sorgenti esterne (correnti di conduzione) eliminando la dipendenza esplicita dalle sorgenti indotte (correnti di magnetizzazione)
 - A differenza del campo D il campo H è molto utile ed è usato nelle applicazioni e nel lavoro sperimentale
 - La ragione sta nel fatto che la grandezza fisica che si controlla per generare un campo magnetico è la corrente

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_C \quad \longrightarrow \quad \oint_C \mathbf{H} = i_C$$

- Nel caso elettrostatico la grandezza fisica che si controlla sono i potenziali dei conduttori
 - Il campo D è invece legato alle densità di carica reali che non sono facilmente controllabili

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

Il campo H

- Come nel caso del campo elettrostatico anche adesso bisogna sottolineare che il campo H non può sostituire B
- Per determinare completamente un campo vettoriale è necessario definirne sia il rotore sia la divergenza
 - In generale la divergenza di H non è definita
 - Dipende dalla magnetizzazione
- Pertanto le equazioni necessarie per risolvere il problema sono

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{H})$$

- Inoltre le opportune condizioni al contorno
 - Se nel problema sono presenti più materiali occorre imporre le condizioni di raccordo dei campi alle superfici di passaggio da un materiale all'altro
- Ricaviamo le condizioni di discontinuità (raccordo) per il campo H
 - Le condizioni per il campo B sono state ricavate utilizzando le equazioni

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Il rotore di H è formalmente identico al rotore di B e porterà a condizioni sulla componente tangenziale di H analoghe a quelle di B
- Abbiamo bisogno della divergenza di H

Il campo H

- Calcoliamo la divergenza di H

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{B}}{\mu_0} - \nabla \cdot \mathbf{M}$$

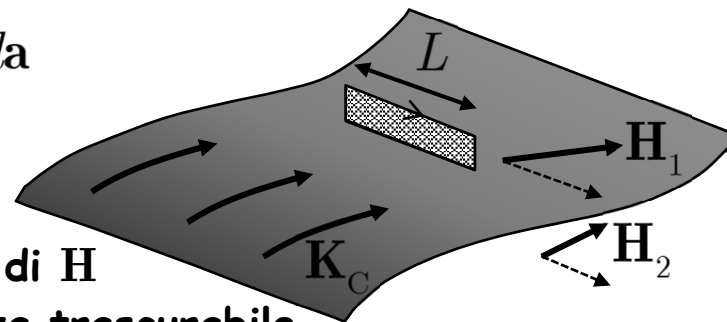
- Otteniamo

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$$

- La condizione sulla componente tangenziale di H si ottiene come nel caso di B

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_C \quad \longrightarrow \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_C \cdot d\mathbf{a}$$

$$H_{1t} - H_{2t} = K_C$$



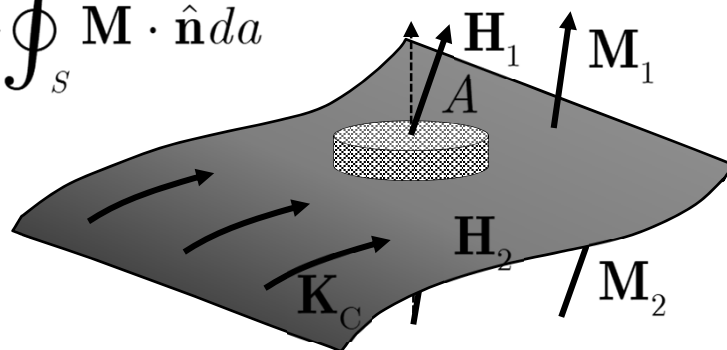
- Per la componente normale calcoliamo il flusso di H attraverso la superficie di un cilindro di altezza trascurabile

- Abbiamo

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad \longrightarrow \quad \oint_S \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = -\oint_S \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

- Contribuiscono solo le superfici circolari A

$$\mathbf{H}_{\text{sopra}}^\perp - \mathbf{H}_{\text{sotto}}^\perp = -(\mathbf{M}_{\text{sopra}}^\perp - \mathbf{M}_{\text{sotto}}^\perp)$$



Suscettività e permeabilità magnetica

- Per risolvere problemi con materiali abbiamo bisogno di conoscere una relazione fra B e H (relazione costitutiva)
- Abbiamo visto la relazione che permette di trovare M in funzione di B
 - Abbiamo preannunciato (diapositiva 332) che la relazione corretta è

$$M = \chi_m \frac{B}{\mu_0} \quad \text{NO!} \qquad M = \chi_m H$$

- Ricordiamo la definizione di H

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M \qquad B = \mu_0 H + \mu_0 M = \mu_0 H + \mu_0 \chi_m H = \mu_0 (1 + \chi_m) H$$

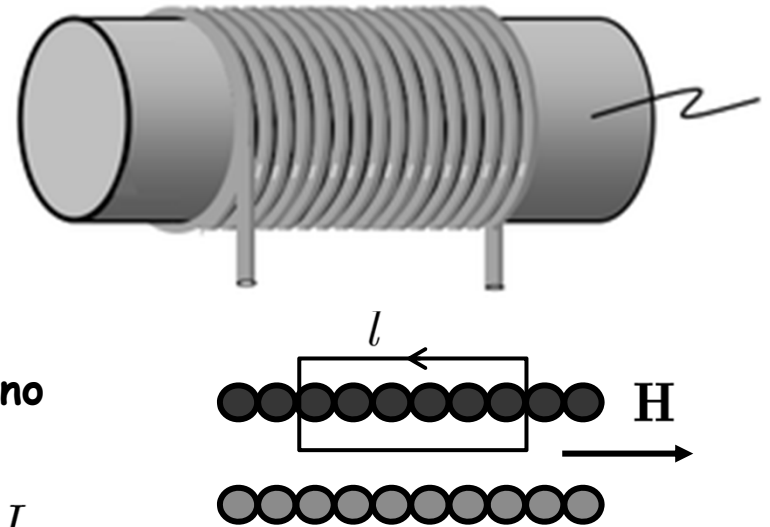
- Definiamo la permeabilità magnetica del materiale $\mu = \mu_0(1 + \chi_m) = \mu_0 \mu_r$
- Otteniamo

$$B = \mu H$$

- Se μ è indipendente dalla posizione il mezzo è omogeneo
- Se μ è indipendente da H il mezzo è lineare
 - Se il mezzo è diamagnetico $\mu/\mu_0 < 1$, $\chi_m < 0$
 - Se il mezzo è paramagnetico $\mu/\mu_0 > 1$, $\chi_m > 0$
- Per i materiali ferromagnetici la relazione è non lineare $\mu = \mu(H)$

Esempio: solenoide con nucleo

- Consideriamo un lungo solenoide avvolto su un materiale lineare con suscettività χ_m
- Le spire per unità di lunghezza sono n
- La corrente è I
 - Per la simmetria del problema le linee del campo H sono parallele all'asse del cilindro
 - Il campo è nullo all'esterno
 - Utilizzando la legge di Ampère con il cammino in figura (la corrente esce dal piano)



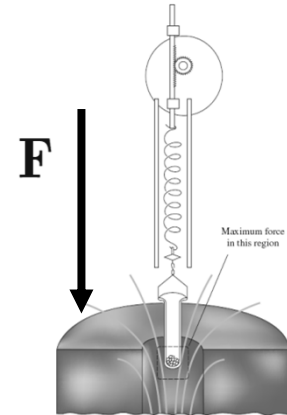
$$\oint_C \mathbf{H} = i_f = n l I = H l \quad H = n I$$

- Usando la permeabilità del mezzo $B = \mu_0 (1 + \chi_m) H = \mu_0 (1 + \chi_m) n I$
 - Osserviamo che nel vuoto si ha $B = \mu_0 n I$
 - L'effetto del mezzo è di generare un campo della stessa forma dovuto a una corrente $\chi_m n I l$
- La magnetizzazione è $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad \mathbf{K} = \mathbf{M} \times \hat{n} \quad K = \chi_m n I$
- Pertanto la corrente di magnetizzazione genera il campo magnetico aggiuntivo
 - Se il materiale è paramagnetico il campo è più intenso
 - Se il materiale è diamagnetico il campo è meno intenso

Ferromagnetismo

- Abbiamo già dato le caratteristiche essenziali delle forze nei materiali ferromagnetici
- Facendo riferimento alle misure con il solenoide
 - La forza è attrattiva e molto intensa
 - La forza dipende linearmente dalla corrente
 - La forza dipende solo dal gradiente del campo
- La forza si calcola utilizzando la formula

$$F = \nabla(m \cdot B)$$



- Per i materiali diamagnetici e paramagnetici abbiamo visto che $m \sim B$
- La dipendenza lineare della forza dalla corrente (dal gradiente del campo) nel caso dei materiali ferromagnetici indica che m non varia più con B
 - Si è raggiunto un limite di saturazione nell'allineamento dei dipoli magnetici
- La forza è attrattiva e quindi i dipoli si allineano nella direzione del campo
- Infine osserviamo che i materiali ferromagnetici possono avere una magnetizzazione anche in assenza di campo
 - È importante notare che il fenomeno dipende dalla temperatura
 - In particolare il ferromagnetismo scompare al di sopra di una certa temperatura caratteristica per ogni sostanza (Temperatura di Curie T_c)

Il campo di un magnete permanente

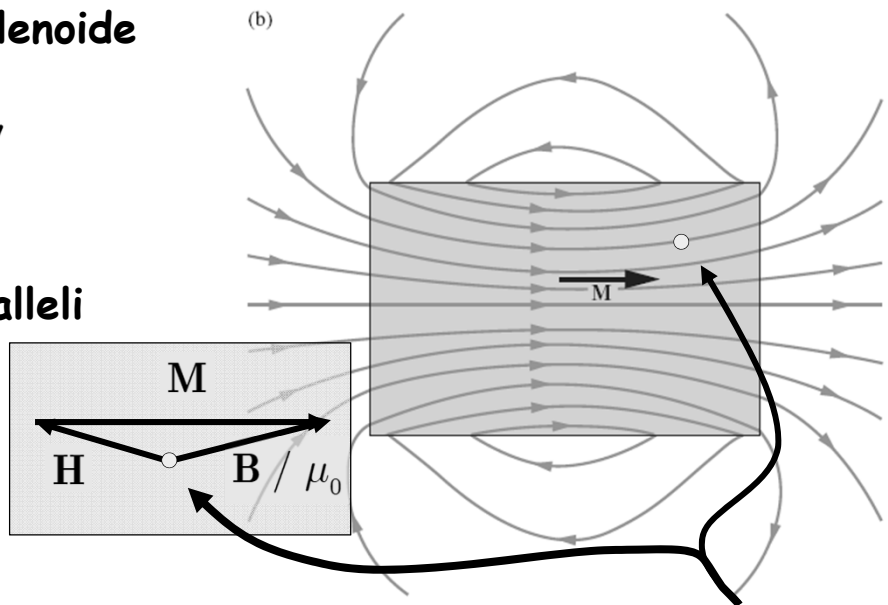
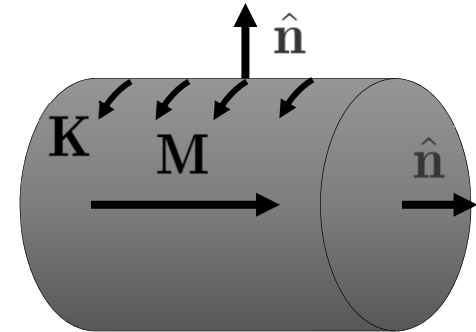
- Consideriamo un magnete permanente: ad esempio un cilindro di materiale magnetizzato uniformemente
- Non ci sono correnti di magnetizzazione all'interno dato che $\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} = 0$
- Le correnti superficiali sono date da

$$\mathbf{K} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$$

- Non ci sono correnti superficiali sulle basi del cilindro: $\mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} = 0$
- C'è una corrente sulla superficie laterale: $K = M$
- Il campo magnetico generato dalla corrente superficiale è quello generato da un solenoide di lunghezza finita

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da'$$

- Osserviamo che $\mathbf{B}$ e $\mathbf{M}$ non sono paralleli
- Inoltre $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu_0 - \mathbf{M}$
- Neppure $\mathbf{H}$ e $\mathbf{M}$ sono paralleli
- Evidentemente non è solo $\mathbf{B}$ a determinare la direzione dei dipoli



Ferromagnetismo

- È interessante interpretare numericamente i dati della tabella, diapositiva **306**
 - 1 Kg di ferro subisce una forza di 4000 N con $|\partial B/\partial z| = 17 \text{ T/m}$

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \rightarrow |\mathbf{F}| = m \left| \frac{\partial B}{\partial z} \right| \quad m = \frac{4000}{17} = 235 \text{ J/Tesla} \quad \text{NB: 1 Kg}$$

- La magnetizzazione $|\mathbf{M}|$ corrispondente al momento magnetico m è

$$m = |\mathbf{M}| V \quad V = \frac{1 \text{ Kg}}{\rho (\text{Kg/m}^3)} \quad |\mathbf{M}| = \frac{m}{V} = m \frac{\rho}{1 \text{ Kg}} \quad \rho = 7800 \text{ Kg m}^{-3}$$

$$|\mathbf{M}| = 235 \cdot 7800 \frac{\text{J}}{\text{T m}^3} = 1.83 \times 10^6 \frac{\text{J}}{\text{T m}^3}$$

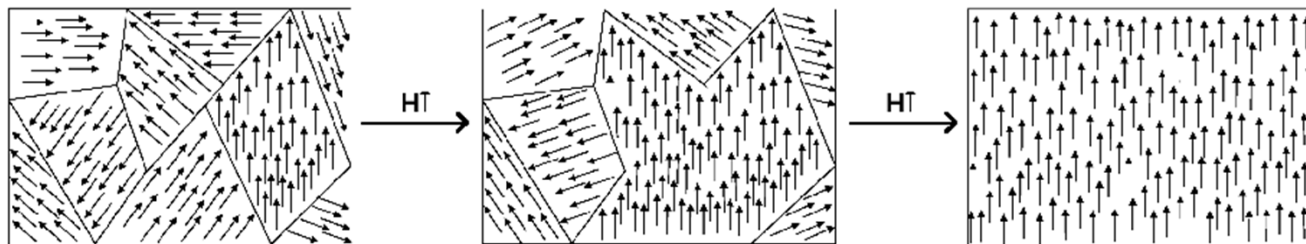
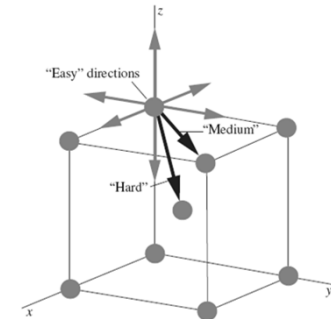
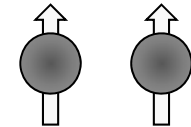
- Questo è il massimo valore della magnetizzazione del ferro (saturazione)
- Abbiamo anche detto che $\mathbf{M} = n\mu_B$

$$\text{Noto } \mu_B \quad n = \frac{1.83 \times 10^6}{9.3 \times 10^{-24}} \approx 2 \times 10^{29} \quad \text{elettroni per m}^3$$

- Dato che nel ferro ci sono circa $1 \times 10^{29} \text{ atomi/m}^3$ concludiamo che ogni atomo contribuisce con due elettroni

Ferromagnetismo

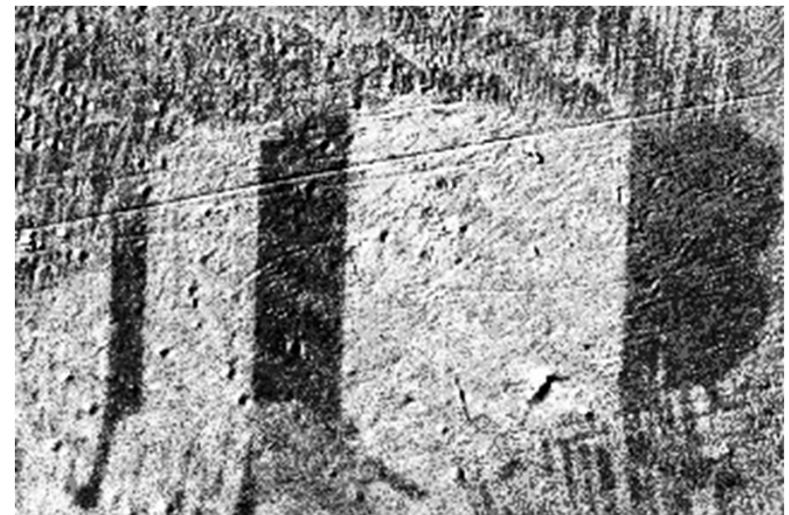
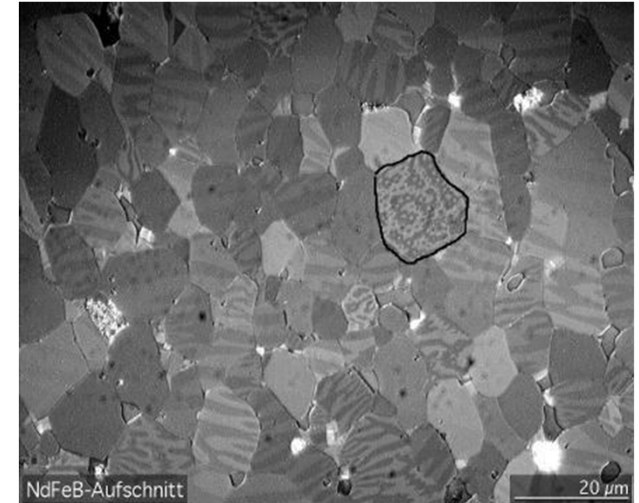
- Il fenomeno che stiamo descrivendo è molto complesso
- Diamo adesso alcune spiegazioni qualitative
 - Per motivi connessi alla struttura quantistica dell'atomo di ferro due elettroni di atomi adiacenti si trovano in uno stato energeticamente conveniente quando i loro spin sono allineati
 - Questa circostanza tende ad allineare gli spin di tanti atomi
 - Si tratta di un fenomeno collettivo
- La direzione in cui si allineano è casuale
 - In realtà la simmetria del reticolo impone alcune direzioni
 - Alcune sono più favorite di altre
- L'allineamento dei momenti magnetici avviene in regioni macroscopiche chiamate domini



- <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2172444>

Ferromagnetismo

- È possibile vedere i domini al microscopio
 - Microscopi basati sull'effetto Kerr Magneto-Ottico
 - Riflessione della luce da superfici magnetizzate
 - Nella foto i domini magnetici sono le regioni chiare e scure
- Se è presente un campo esterno i momenti magnetici dei domini si allineano
 - Succede anche che si modificano i confini dei domini
 - L'animazione mostra l'evoluzione dei domini al crescere dell'intensità di un campo esterno entrante nello schermo
 - Le regione bianche indicano una magnetizzazione uscente
 - Le regioni scure magnetizzazione entrante
- © By Zureks, Chris Vardon - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5154811>



Esempio: toroide con nucleo

- Consideriamo un toroide avvolto intorno ad un nucleo di materiale lineare con permittività magnetica $\mu = (1 + \chi_m)\mu_0$
- Il numero di spire è N , la corrente I
- Le linee del campo H sono delle circonferenze
- Utilizziamo la legge di Ampère per il campo H
 - Consideriamo un circonferenza C di raggio r

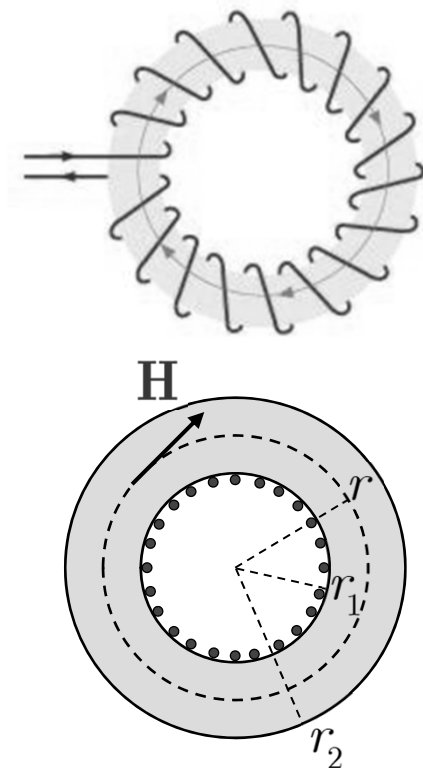
$$\oint_C \mathbf{H} = NI = H 2\pi r \quad H(r) = \frac{NI}{2\pi r}$$

- Il campo B e la magnetizzazione M sono

$$B = \mu H \quad M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} H$$

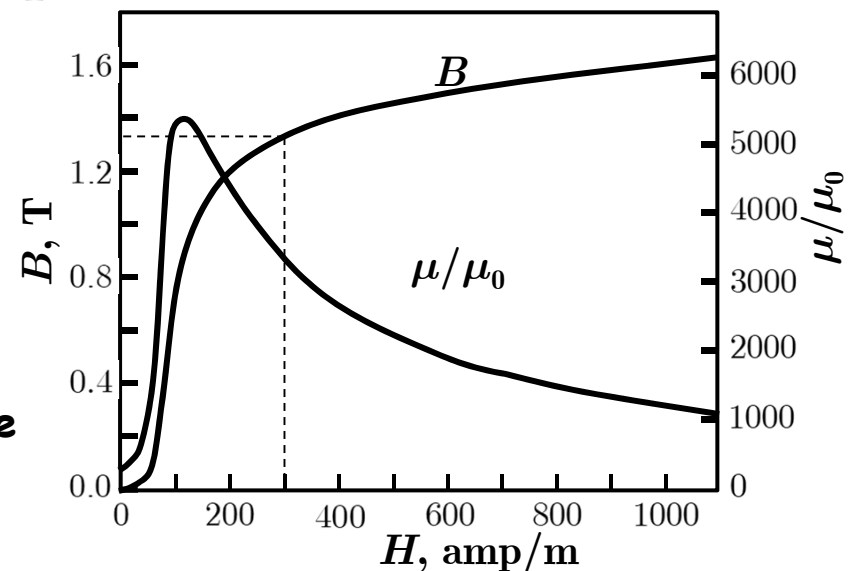
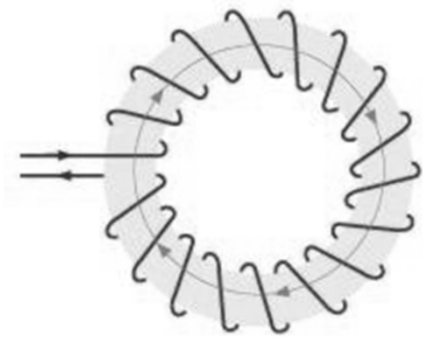
$$\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} = \chi_m \quad M = \chi_m \frac{NI}{2\pi r} \quad K = \chi_m \frac{NI}{2\pi r}$$

- Le densità superficiale di corrente nei punti $r = r_1$ e $r = r_2$ è differente
 - La corrente di magnetizzazione è ovviamente costante: $i_m = K 2\pi r = \chi_m NI$



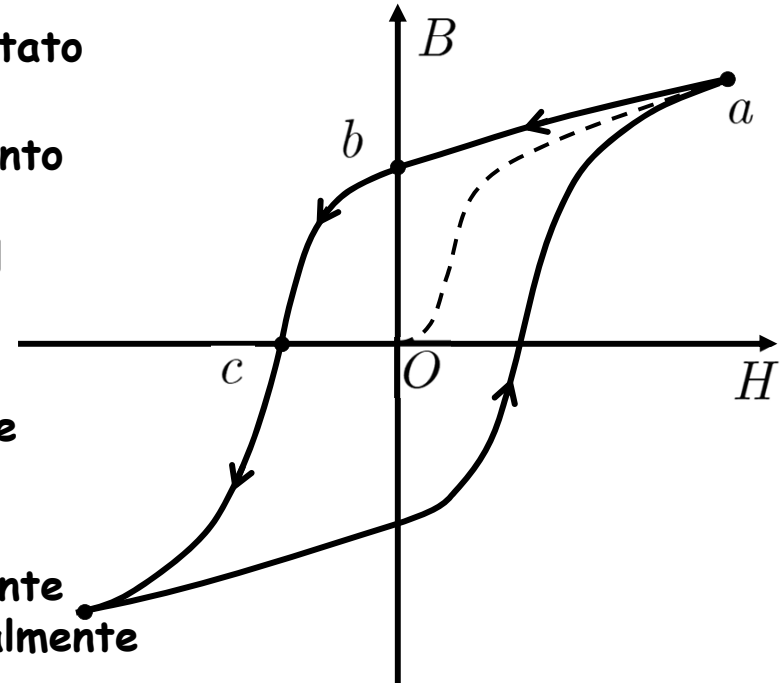
Curva di magnetizzazione

- Supponiamo adesso che il nucleo sia ferromagnetico
- Studiamo sperimentalmente la curva di magnetizzazione
 - Per ogni valore di I conosciamo H
 - Con uno strumento adatto (sonda Hall) misuriamo B
 - Possiamo anche determinare μ definito come $\mu = B/H$
- Potremmo ottenere un grafico del genere
 - Osserviamo che le due scale verticali hanno unità diverse
 - Se nel toroide non ci fosse il ferro $B = \mu_0 H$
 - $H \approx 300 \text{ A/m} \rightarrow B = \mu_0 H = 4 \times 10^{-4} \text{ T}$
 - Invece $B \approx 1.3 \text{ T}$, circa 3000 volte più intenso rispetto al toroide vuoto
 - Dato che $B = \mu_0 (H + M)$ e dato che $\mu_0 H$ è piccolissimo, il campo B è praticamente dovuto tutto alla magnetizzazione del ferro
 - Orientamento dei domini
 - Osserviamo che si raggiunge un regime in cui la magnetizzazione cresce più lentamente
 - Si raggiunge una saturazione



Isteresi

- Supponiamo adesso di volere ritornare allo stato iniziale O , cioè lo stato $H = 0$, $B = 0$
- Riduciamo quindi la corrente nell'avvolgimento fino a raggiungere il valore $H = 0$
- Si raggiunge lo stato b e si scopre che il campo magnetico B non è tornato a zero
- Ricordiamo che $B = \mu_0 (H + M)$
- Il materiale rimane magnetizzato anche senza eccitazione esterna: $M = B / \mu_0$
- Per riportare a zero la magnetizzazione bisogna eccitare il toroide con una corrente di segno opposto a quella utilizzata inizialmente
- In questo modo si può riportare a zero la magnetizzazione quando si raggiunge lo stato c in cui $\mu_0(H+M) = 0$
- Continuando a ridurre H si raggiunge un'altra regione di saturazione
- Se a questo punto si fa crescere di nuovo H si raggiunge nuovamente la regione di saturazione nello stato a ma succede che la traiettoria nel piano $H - B$ è diversa da quella precedente
- Si ha pertanto un comportamento in cui lo stato del sistema dipende dalla sua storia precedente



Energia magnetica in presenza di materia

- Come abbiamo visto nella diapositiva **277** al campo magnetico $\mathbf{B}$ è associata un'energia (e una densità di energia u_M)

$$U_M = \int_V u_M dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV$$

- Come nell'elettrostatica, in presenza di materia occorre considerare anche l'energia di magnetizzazione
 - Nel caso magnetico il problema è più complicato[†]
- Per materiali lineari si giunge ad una formula analoga al caso elettrostatico

$$U'_M = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dV$$

- La formula precedente contiene
 - L'energia associata al campo magnetico
 - L'energia che è stata necessaria per magnetizzare la materia
- Ricordare che l'energia potenziale è l'energia magnetica cambiata di segno
 - La forza si ottiene come

$$\mathbf{F} = +\nabla U'_M$$

- [†]Vedi Zangwill A. - Modern Electrodynamics - Cambridge University Press 2012 cap. 13.7

Equazioni di Maxwell nella materia

- Vogliamo riformulare le equazioni di Maxwell nel caso in cui ci sia materia
 - Naturalmente le equazioni nel vuoto sono sempre valide
 - Tuttavia diventa molto complesso tenere conto di tutte le sorgenti
 - Cariche e correnti dovute a fenomeni di polarizzazione e magnetizzazione
 - Risulta conveniente utilizzare i campi $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$
- Abbiamo già visto la legge di Gauss quando si tiene conto della polarizzazione

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \qquad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

- Avevamo inoltre visto che la polarizzazione fa comparire cariche di volume e cariche superficiali

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} \qquad \sigma_P = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}$$

- Quando la polarizzazione $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ è funzione del tempo le cariche di polarizzazione fanno comparire delle correnti

- Consideriamo un cilindretto di materia polarizzata

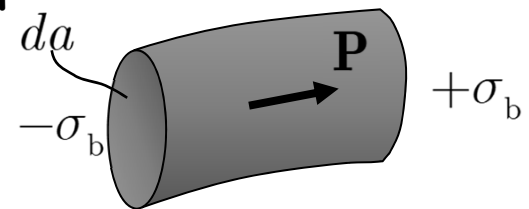
- Per costruzione le basi siano perpendicolari a $\mathbf{P}$

- Sulle due basi c'è una densità di carica $\pm \sigma_P = \pm P$

- La carica sulle due basi è $q = \pm \sigma_P da = \pm P da$

- Se il campo elettrico varia nel tempo varierà anche la polarizzazione

- La carica varia nel tempo $\frac{dq}{dt} = \pm da \frac{\partial P}{\partial t}$



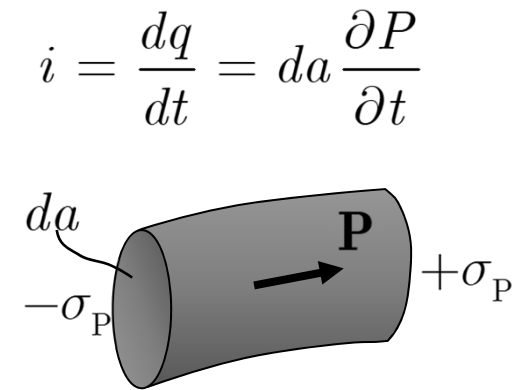
Equazioni di Maxwell nella materia

- Se la carica sulle basi varia vuol dire che c'è una corrente che trasporta carica da una base all'altra
- La corrente è il flusso di una densità di corrente

$$\mathbf{J}_P = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad i = \mathbf{J}_P \cdot d\mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial t} da$$

- Il vettore $\mathbf{J}_P$ ha le proprietà di una densità di corrente
- In particolare soddisfa l'equazione di continuità

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_P = \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{P}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_P}{\partial t}$$



$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{J}_P = -\frac{\partial \rho_P}{\partial t}}$$

- Pertanto in presenza di materia le cariche e le correnti totali sono

$$\rho = \rho_f + \rho_P = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P} \quad \mathbf{J} = \mathbf{J}_C + \mathbf{J}_M + \mathbf{J}_P = \mathbf{J}_C + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

- Come abbiamo già visto per il campo elettrico si tiene conto di ρ_P introducendo il campo $\mathbf{D}$ nella legge di Gauss

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = \rho_f + \rho_P = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{P} = \rho_f \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f}$$

Equazioni di Maxwell nella materia

- Si può procedere analogamente per la legge di Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \left(\mathbf{J}_C + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_C + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_C + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{P} + \varepsilon_0 \mathbf{E})$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_C + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

- Non richiedono modifiche le equazioni omogenee

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Infatti in queste equazioni non appaiono le sorgenti ρ e $\mathbf{J}$

Equazioni di Maxwell nella materia

- Riassumiamo le equazioni di Maxwell nella materia

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

- Queste equazioni devono essere complementate
 - Dalle relazioni fenomenologiche che definiscono i campi $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$
 - Ad esempio per i mezzi lineari omogenei

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$$

- Dalle condizioni al contorno nel passaggio da un materiale all'altro

mezzo lineare

$\sigma_f = 0$	$\mathbf{K}_f = 0$
----------------	--------------------

$$D_{1\perp} - D_{2\perp} = \sigma_f$$

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} - \varepsilon_2 E_{2\perp} = \sigma_f$$

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp}$$

$$\mathbf{E}_{1\parallel} = \mathbf{E}_{2\parallel}$$

$$\mathbf{E}_{1\parallel} = \mathbf{E}_{2\parallel}$$

$$\mathbf{E}_{1\parallel} = \mathbf{E}_{2\parallel}$$

$$\mathbf{H}_{1\parallel} - \mathbf{H}_{2\parallel} = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}$$

$$\frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_{1\parallel} - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_{2\parallel} = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}$$

$$\frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_{1\parallel} = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_{2\parallel}$$

$$B_{1\perp} = B_{2\perp}$$

$$B_{1\perp} = B_{2\perp}$$

$$B_{1\perp} = B_{2\perp}$$

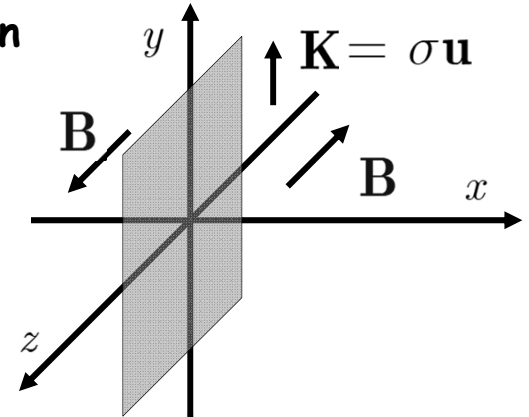
Corrente superficiale

- Una densità di corrente superficiale infinita genera un campo magnetico parallelo al piano della corrente e perpendicolare alla direzione della stessa (vedi [124](#))
- La legge di Biot e Savart implica che B non possa essere parallelo a K e quindi $B_y = 0$
- La componente B_x deve essere nulla per simmetria
 - Infatti se $u \rightarrow -u$ deve anche essere $B \rightarrow -B$
 - Ma la trasformazione della velocità può essere ottenuta da una rotazione di π intorno all'asse x
 - Non cambia il segno di B_x e quindi $B_x = 0$
- Pertanto il campo magnetico è diretto lungo l'asse z
- Sempre utilizzando la legge di Biot e Savart ci si può convincere che

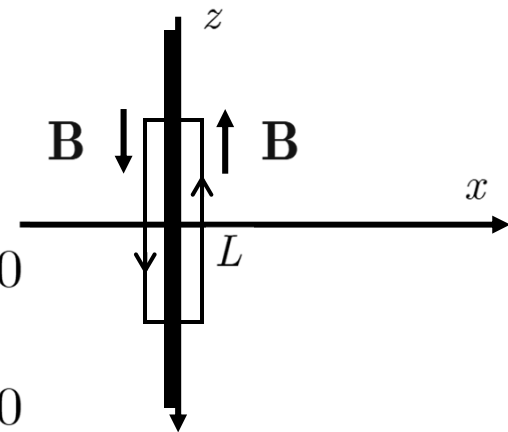
$$B = -B\hat{e}_z \quad x > 0 \quad B = +B\hat{e}_z \quad x < 0$$

• Utilizziamo la legge di Ampère

$$2BL = \mu_0 KL \quad B = \begin{cases} -\frac{\mu_0 K}{2} \hat{e}_z & x > 0 \\ +\frac{\mu_0 K}{2} \hat{e}_z & x < 0 \end{cases}$$

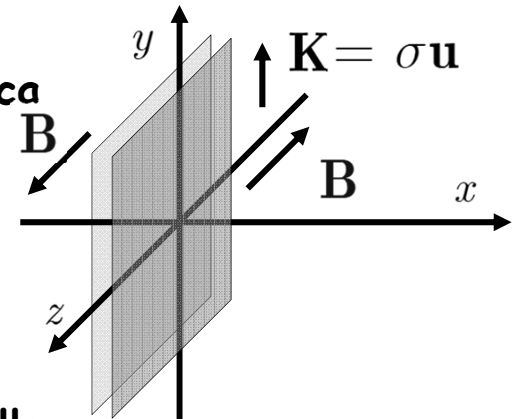


$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

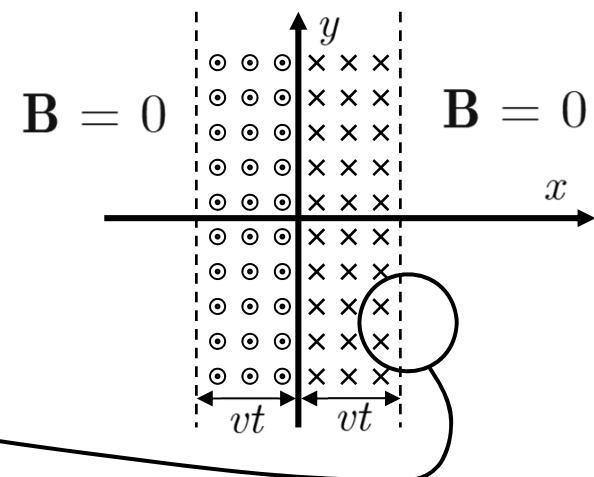
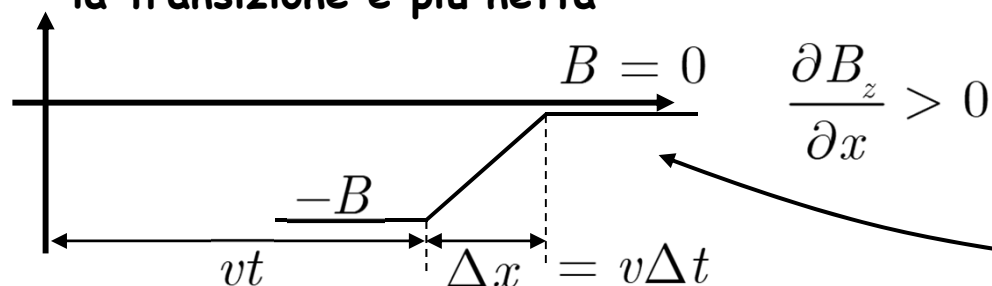


Un'onda elettromagnetica

- Consideriamo ancora l'esempio precedente
 - Ignoriamo il campo elettrico generato dal piano di carica
 - Possiamo sempre immaginare che ci sia un altro piano di densità $-\sigma$ che si muove con velocità $-u$
- Il piano è fermo per $t < 0$, inizia a muoversi a $t = 0$
 - Per $t < 0$ il campo magnetico è nullo
 - Per $t > 0$ il campo diventa $B = \mu_0 K/2$
 - Tuttavia per distanze $x > vt$ il campo deve essere nullo
 - Chiamiamo v la velocità di propagazione del campo magnetico
- Visto dall'alto il campo magnetico appare come in figura
 - La regione di transizione fra $B \neq 0$ e $B = 0$ è determinata dal modo in cui il piano di carica passa dallo stato di quiete al moto
 - Se l'accelerazione è molto rapida la transizione è più netta



$\times$ entrante
 $\odot$ uscente



Un'onda elettromagnetica

- Nella regione di transizione c'è una variazione del campo magnetico nello spazio e nel tempo
- Studiamo la transizione con l'equazione di Maxwell

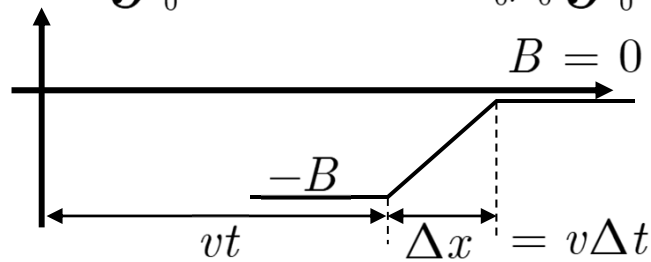
$$\nabla \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \mathbf{J} \neq 0 \text{ solo per } z = 0$$

- Il rotore ha una sola componente non nulla
- Le componenti B_x e B_y sono nulle

$$(\nabla \times \mathbf{B})_y = -\frac{\partial B_z}{\partial x} \quad \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial B_z}{\partial x}$$

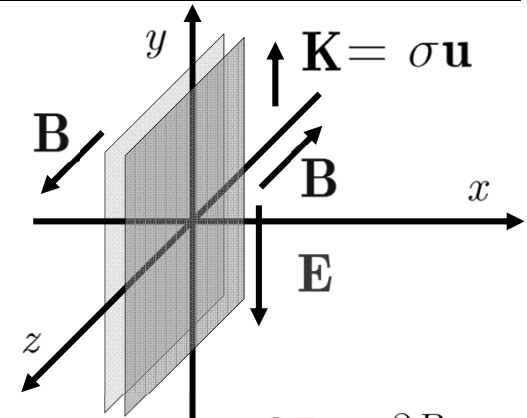
- Pertanto nella regione di transizione compare un campo elettrico

$$E_y = \int_0^{\Delta t} \frac{\partial E_y}{\partial t} dt = -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \int_0^{\Delta t} \frac{\partial B_z}{\partial x} dt = -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \int_0^{\Delta x} \frac{\partial B_z}{\partial x} \frac{dx}{v} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 v} \int_0^{\Delta B} dB_z$$



$$E_y = -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 v} \Delta B$$

$$E_y = -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 v} B_z$$



$$(\nabla \times \mathbf{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}$$

$$(\nabla \times \mathbf{B})_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}$$

Un'onda elettromagnetica

- Possiamo utilizzare anche l'altra equazione di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Dato che solo la componente z di $\mathbf{B}$ è diversa da zero $\rightarrow$ solo $(\nabla \times \mathbf{E})_z \neq 0$

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

- La componente E_x potrebbe essere costante. La assumiamo nulla
 - Tutto il nostro ragionamento è definito a meno di campi costanti
- Possiamo calcolare il campo magnetico

$$B_z = \int_0^{\Delta t} \frac{\partial B_z}{\partial t} dt = -\int_0^{\Delta t} \frac{\partial E_y}{\partial x} dt = -\int_0^{\Delta x} \frac{\partial E_y}{\partial x} \frac{dx}{v} = -\frac{1}{v} \int_0^{\Delta E} dE_y = -\frac{1}{v} E_y$$

- La variazione del campo elettrico genera a sua volta un campo magnetico
- Le due relazioni trovate devono essere compatibili

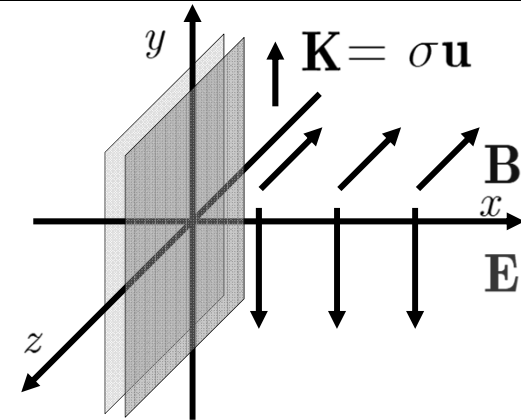
$$B_z = -\frac{1}{v} E_y \quad E_y = -\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 v} B_z \quad \longrightarrow \quad v = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 v} \quad \boxed{v^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

- La velocità di propagazione è determinata dalle costanti ε_0 e μ_0

Un'onda elettromagnetica

- Riassumiamo quanto abbiamo capito
 - Il passaggio dallo stato di quiete allo stato di moto del piano di carica genera un'onda elettromagnetica
 - L'onda viaggia con velocità

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad v \text{ risulta essere la velocità della luce} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$



- Nelle immediate vicinanze della corrente superficiale il campo magnetico è generato dalla corrente superficiale
- Allontanandosi dalla sorgente i campi sono generati dalle loro variazioni spazio-temporali

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- Le variazioni del campo B generano localmente il campo E (Faraday)
- Le variazioni del campo E generano localmente il campo B (Maxwell)
- I campi sono perpendicolari fra di loro
 - Perpendicolarità imposta dalle equazioni di Maxwell (introdotta dal rotore)
- I campi sono perpendicolari alla direzione di propagazione
 - Vedremo che dipende dalle equazioni $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Un'onda elettromagnetica

- Supponiamo che dopo un tempo T lo strato di carica venga arrestato
 - L'andamento della corrente nel tempo è stato come in figura
 - La corrente non genera più il campo magnetico
 - Si forma una zona senza campo
 - Il campo generato nell'intervallo $0 \leq t \leq T$ continua a viaggiare nelle due direzioni
- Complessivamente il fenomeno è stato
 - La corrente ha generato un'onda elettromagnetica
 - Radiazione
 - Il campo si è disaccoppiato dalla sorgente
 - I campi E e B si sostengono a vicenda
 - Propagazione
- Nelle regioni in cui i campi sono diversi da zero è immagazzinata energia

$$U_E = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV \quad U_M = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV$$

- Questa energia proviene dal lavoro fatto per generare l'onda
 - Nello "spingere" la carica si deve vincere una "resistenza" di radiazione

