
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 33 - 04.05.2023

Paramagnetismo

Teoria macroscopica del magnetismo
nella materia

Magnetizzazione e Correnti di Magnetizzazione
Campo H

Anno Accademico 2022/2023

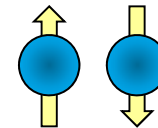
Paramagnetismo

- Abbiamo descritto l'effetto del campo magnetico legato al moto orbitale degli elettroni
- Abbiamo notato che quasi tutte le sostanze (molecole) hanno un momento angolare orbitale nullo
- Abbiamo inoltre notato che gli elettroni posseggono un momento angolare intrinseco (spin) la cui proiezione lungo un asse assume due soli valori: $\pm\hbar/2$
- Il momento magnetico intrinseco dell'elettrone è

$$\mu_B = 9.3 \times 10^{-24} \text{ J/T} \quad m = \pm \frac{e\hbar}{2m_e} = \pm\mu_B$$

μ_B magnetone di Bohr

- Per il principio di esclusione di Pauli gli elettroni tendono a disporsi in coppie con momento angolare totale nullo
 - Anche il momento magnetico totale sarà nullo
- In alcune molecole il numero di elettroni è dispari (ad es. NO) oppure la configurazione elettronica è tale da non avere la cancellazione dello spin per due elettroni (O_2)
- In queste sostanze un campo magnetico esterno può allineare i momenti magnetici e far comparire un momento di dipolo
 - Nello stesso verso del campo magnetico applicato
 - Nel verso opposto rispetto al diamagnetismo



Paramagnetismo

- Abbiamo visto che un dipolo magnetico in un campo magnetico B possiede un'energia potenziale data da

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

- In meccanica quantistica avviene la stessa cosa, ad esempio per lo spin di un elettrone atomico
 - La proiezione del momento magnetico lungo B può avere solo 2 valori: $m = \pm \mu_B$

$$U = \pm \mu_B B$$

- In un materiale a temperatura T gli elettroni hanno un'energia di agitazione termica $\sim kT$
- Il numero di elettroni che hanno un determinato valore del momento magnetico si calcola utilizzando la statistica di Boltzmann

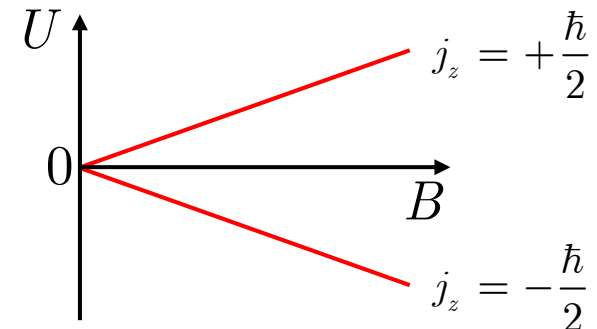
$$n = a \exp[-U / kT]$$

- Introducendo le energie dalla tabella

$$n_{\text{up}} = a \exp[-\mu_B B / kT] \quad n_{\text{down}} = a \exp[+\mu_B B / kT]$$

- a si determina imponendo che il numero totale di elettroni sia N

$$n_{\text{up}} + n_{\text{down}} = N$$



	j_z	m	U
up	$+\hbar/2$	$-\mu_B$	$\mu_B B$
down	$-\hbar/2$	$+\mu_B$	$-\mu_B B$

Paramagnetismo

$$n_{\text{up}} = a \exp\left[-\mu_B B / kT\right]$$

$$n_{\text{down}} = a \exp\left[+\mu_B B / kT\right]$$

- **Calcoliamo la costante a**

$$n_{\text{up}} + n_{\text{down}} = N \quad \longrightarrow \quad a \left(e^{-\mu_B B / kT} + e^{+\mu_B B / kT} \right) = N$$

$$a = \frac{N}{e^{-\mu_B B / kT} + e^{+\mu_B B / kT}}$$

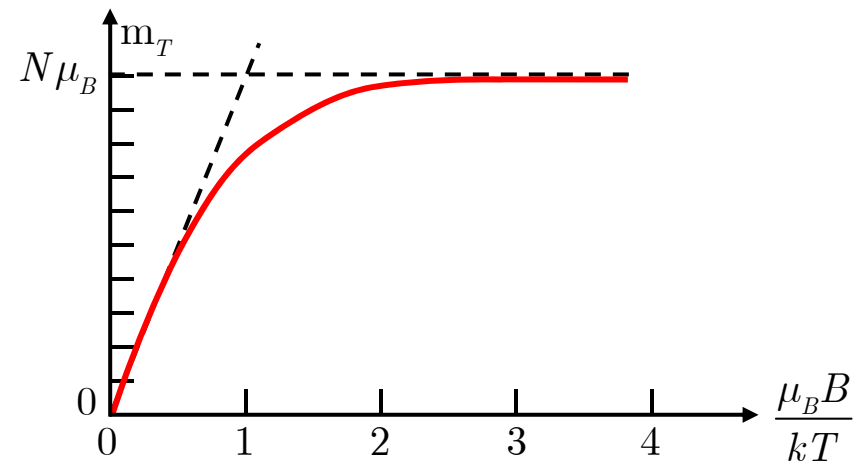
	j_z	m	U
up	$+\hbar/2$	$-\mu_B$	$\mu_B B$
down	$-\hbar/2$	$+\mu_B$	$-\mu_B B$

- **Il momento magnetico totale del sistema di N elettroni[#] si calcola con la somma**

$$m_T = n_{\text{up}} m_{\text{up}} + n_{\text{down}} m_{\text{down}} = n_{\text{up}} (-\mu_B) + n_{\text{down}} (+\mu_B)$$

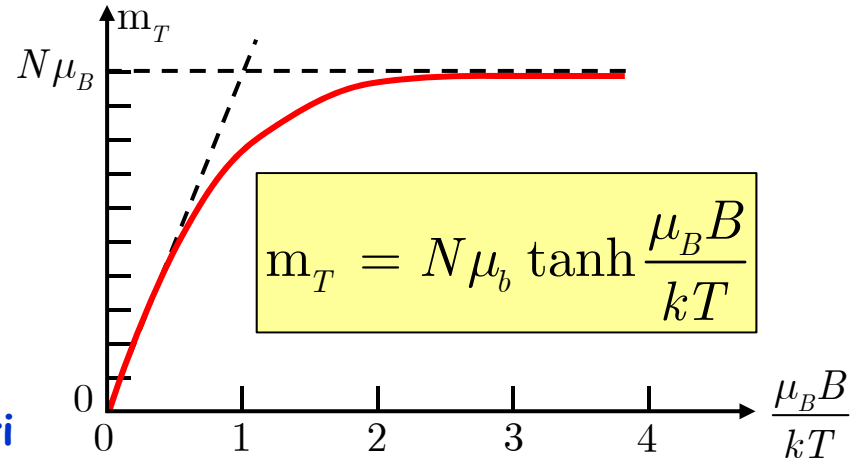
$$m_T = N \mu_b \frac{e^{+\mu_B B / kT} - e^{-\mu_B B / kT}}{e^{-\mu_B B / kT} + e^{+\mu_B B / kT}}$$

$$m_T = N \mu_b \tanh \frac{\mu_B B}{kT}$$



Paramagnetismo

- La formula che abbiamo trovato fornisce il momento magnetico di un blocco di materia con N elettroni
- Ricordiamo che il momento magnetico degli elettroni era "quantizzato" nella direzione del campo magnetico B
- È nello stesso verso di B
- Osserviamo che per campi B molto elevati o temperature basse il momento magnetico indotto satura



- Tutti i momenti magnetici degli elettroni si allineano nello stesso senso di B

$$n_{\text{up}} = a \exp \left[-\mu_B B / kT \right] \rightarrow 0 \quad \tanh \frac{\mu_B B}{kT} \rightarrow 1$$

$$\mathbf{m} = g \frac{N \mathbf{B} - e}{2m_e} \mathbf{S}$$

- Per campi magnetici dell'ordine di 1T e temperatura ambiente

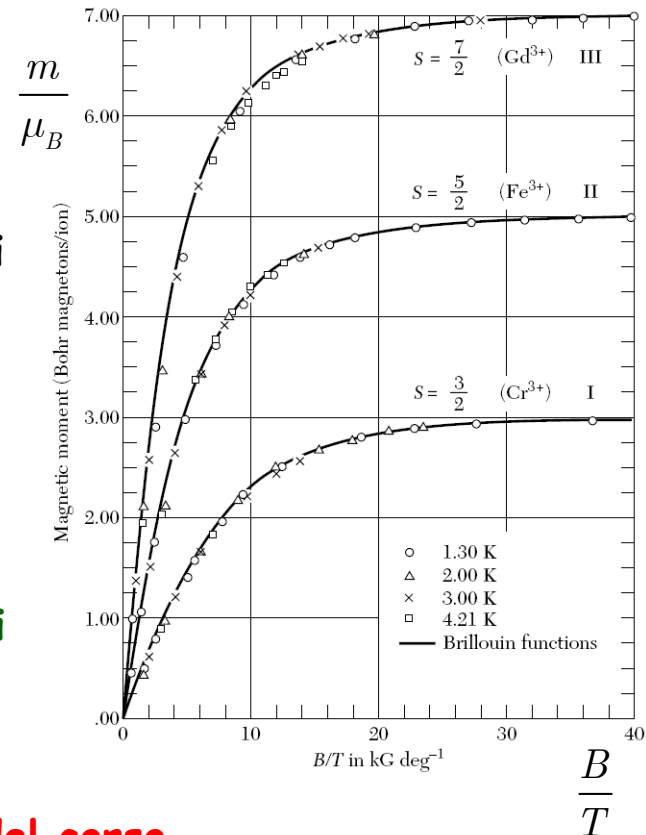
$$\frac{\mu_B B}{kT} \sim 0.02 \quad \tanh \frac{\mu_B B}{kT} \approx \frac{\mu_B B}{kT}$$

$$m \approx \frac{N \mu_B^2 B}{kT}$$

- Questo è il risultato che si ottiene se si assume che il dipolo magnetico può assumere tutti i valori di energia fra $-\mu_B B$ e $+\mu_B B$

Paramagnetismo

- La teoria descritta può essere estesa anche ad atomi e molecole con configurazioni di momento angolare più complicate
- Il grafico mostra l'accordo fra calcoli teorici basati sui concetti descritti e dati sperimentali
 - Per atomi con momento angolare $J = 3/2, 5/2, 7/2$
- Va sottolineato che la teoria che abbiamo discusso descrive i concetti fondamentali necessari per descrivere il paramagnetismo
 - Tuttavia per una trattazione rigorosa che riproduca esattamente i dati sperimentali occorre esaminare in maggiore dettaglio il momento angolare delle sostanze che si vogliono descrivere
- Analisi del genere sono al di là degli obiettivi del corso
- Il ferromagnetismo è un fenomeno legato anch'esso allo spin dell'elettrone
 - La descrizione microscopica del fenomeno è molto complicata
 - Daremo dei cenni dopo la trattazione fenomenologica del magnetismo nella materia



Magnetizzazione e suscettività

- Abbiamo visto che in presenza di campi magnetici esterni nella materia vengono indotti momenti di dipolo magnetico
 - Possono essere paralleli (paramagnetismo, ferromagnetismo) oppure anti-paralleli (diamagnetismo)
- Come nel caso del campo elettrico, per descrivere il magnetismo nella materia si introducono delle quantità macroscopiche
 - Le quantità macroscopiche si calcolano a partire dalle corrispondenti quantità microscopiche realizzando delle medie spaziali
 - Su volumi grandi se confrontati con i volumi atomici
 - Su volumi piccoli se confrontati con i volumi tipici del sistema macroscopico
- La prima quantità importante (Magnetizzazione) viene introdotta per descrivere il momento magnetico indotto in un volume ΔV di materia
 - Si definisce magnetizzazione il momento magnetico totale per unità di volume
 - Il momento magnetico dovuto ai dipoli magnetici atomici

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_k \mathbf{m}_k$$

- Nel caso generale la magnetizzazione è una funzione della posizione: $\mathbf{M}(\mathbf{r})$
- Le unità di misura $[\mathbf{m}] = \text{Am}^2 = \text{JT}^{-1}$ $[\mathbf{M}] = \text{Am}^{-1} = \text{JT}^{-1}\text{m}^{-3}$

Magnetizzazione e suscettività

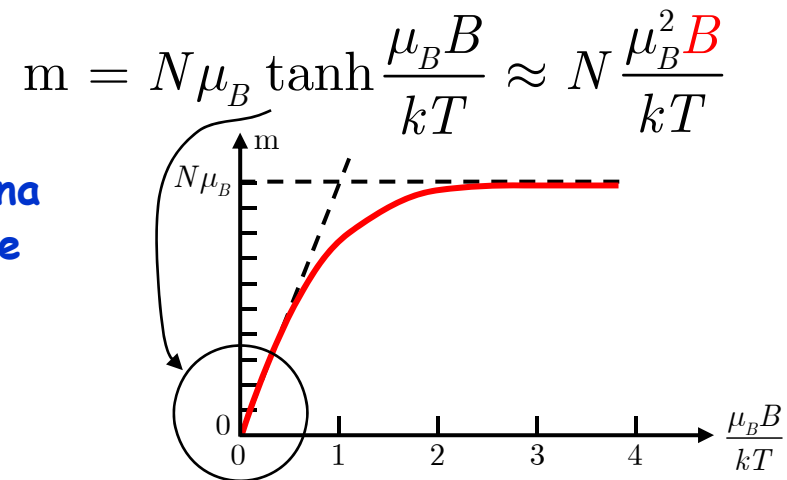
- Consideriamo adesso materiali diamagnetici o paramagnetici
 - A temperature non troppo basse e campi magnetici non troppo intensi
 - Abbiamo visto che in entrambi i casi i momenti di dipolo magnetico indotti dipendono linearmente dal campo B

$$\mathbf{m} = -N \frac{e^2 Z \overline{R_0^2}}{6m_e} \mathbf{B}$$

- Se nelle formule precedenti N diventa una densità di elettroni per unità di volume le espressioni danno la magnetizzazione
- Si definisce suscettività magnetica χ_m di una sostanza

$$\mathbf{M} = \chi_m \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$$

- La definizione precedente è quella "logica" ma è differente da quella in uso che è definita in funzione del campo H
 - Lo vedremo in seguito



Material	Susceptibility	Material	Susceptibility
<i>Diamagnetic:</i>		<i>Paramagnetic:</i>	
Bismuth	-1.6×10^{-4}	Oxygen	1.9×10^{-6}
Gold	-3.4×10^{-5}	Sodium	8.5×10^{-6}
Silver	-2.4×10^{-5}	Aluminum	2.1×10^{-5}
Copper	-9.7×10^{-6}	Tungsten	7.8×10^{-5}
Water	-9.0×10^{-6}	Platinum	2.8×10^{-4}
Carbon Dioxide	-1.2×10^{-8}	Liquid Oxygen (-200°C)	3.9×10^{-3}
Hydrogen	-2.2×10^{-9}	Gadolinium	4.8×10^{-1}

Densità di corrente superficiali

- Richiamiamo la definizione di densità di corrente superficiale (vedi diapositiva [33](#))

- Per definizione la corrente è il flusso della densità di corrente

$$I = \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

- Supponiamo per semplicità che il conduttore sia un parallelepipedo orientato come in figura
- Per semplicità supponiamo che la densità di corrente $\mathbf{J}$ non vari nella direzione y

- Il flusso di $\mathbf{J}$ attraverso la faccia rettangolare $L \times d$ posta a $y = y_0$ è dato da

$$I = \int_S \mathbf{J}(x, z) \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int_0^L dx \left[\int_0^d \mathbf{J}(x, z) dz \right] \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

- Definiamo la densità superficiale di corrente $\mathbf{K}$

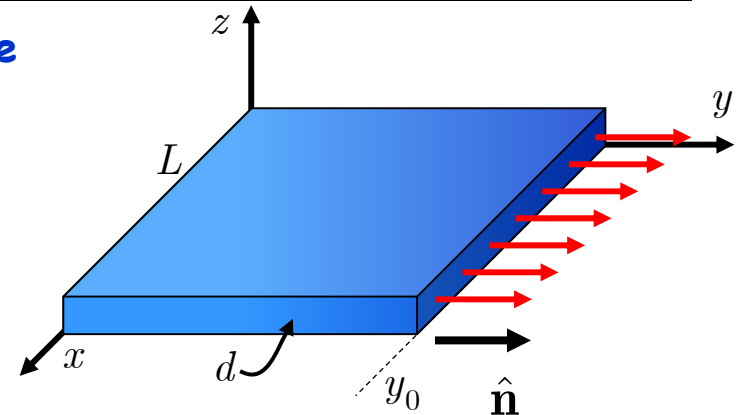
$$\mathbf{K}(x) = \int_0^d \mathbf{J}(x, z) dz$$

- La corrente trasportata dal conduttore è pertanto

$$I = \int_0^L \mathbf{K}(x) \cdot \hat{\mathbf{n}} dx \quad \hat{\mathbf{n}} \text{ è la normale al cammino di integrazione da } 0 \text{ a } L$$

Se $\mathbf{K}$ non dipende da x

$$I = KL$$

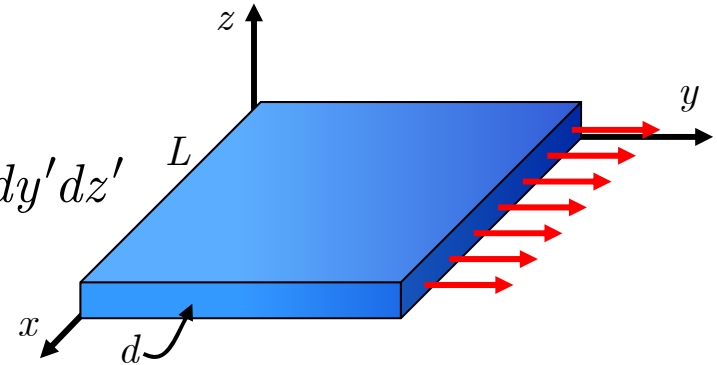


Densità di corrente superficiali

- Riscriviamo la formula per il potenziale vettore in funzione della densità superficiale di corrente (vedi diapositiva [92](#))

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$dV' = dx' dy' dz'$$



- L'integrale è esteso a tutto lo spazio
 - Ovviamente contribuiscono solo le regioni in cui $\mathbf{J} \neq 0$
- Se il conduttore è molto sottile, al limite infinitesimo è conveniente utilizzare la densità superficiale di corrente

$$\mathbf{K}(x) = \int_0^d \mathbf{J}(x, z') dz' \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' \quad da' = dx' dy'$$

- Per completezza diamo anche la formula del potenziale vettore nel caso di una corrente trasportata da un conduttore di sezione infinitesima ($L \rightarrow 0$)

$$\mathbf{I} = \int_S \mathbf{J}(\mathbf{r}) da \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Campo B da materia magnetizzata

- Consideriamo un blocco di materia uniformemente magnetizzato
 - Per semplicità supponiamo che la magnetizzazione M sia diretta lungo l'asse z
 - Non ci preoccupiamo di come la magnetizzazione sia causata o mantenuta
 - Ricordiamo che la magnetizzazione M è la somma dei contributi di tutti i dipoli magnetici elementari contenuti nel blocco di materia
- Suddividiamo adesso il blocco in "fette" di spessore dz e perpendicolari a M
 - Possiamo ulteriormente suddividere la fetta in tanti piccoli "cubetti"
 - Il momento di dipolo magnetico del cubetto è
$$m = MdV = Mdadz$$
 - Sappiamo che ogni momento di dipolo è equivalente ad una spira di area da e corrente i
$$m = ida = (Mdz)da$$
 - Da cui otteniamo $i = Mdz$



Campo B da materia magnetizzata

- Osserviamo che, dato che la magnetizzazione M è costante, tutte le correnti delle piccole spire sono uguali fra di loro

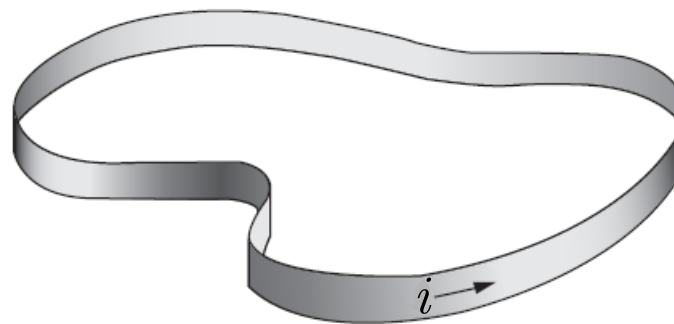
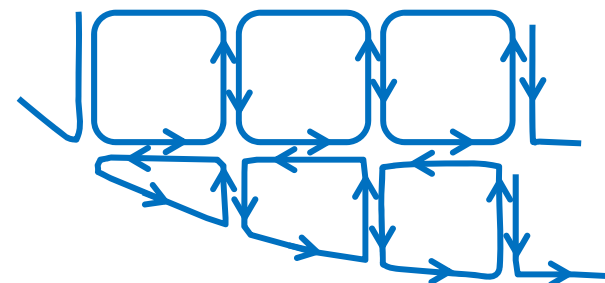
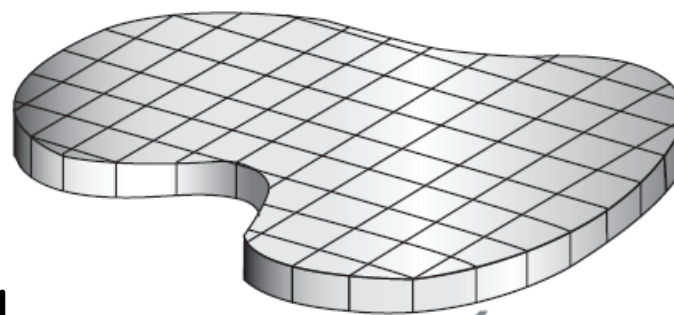
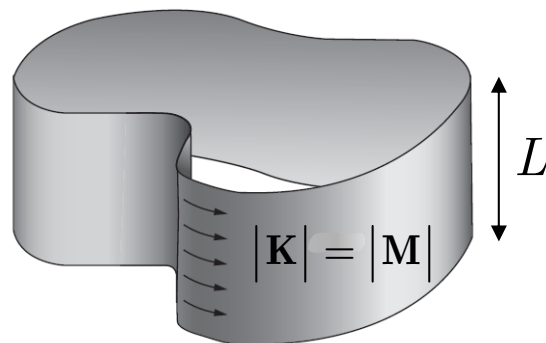
$$i = Mdz$$

- Inoltre osserviamo che nella parte interna del... "fetta" le correnti delle piccole spire si elidono
- Tuttavia le correnti ai bordi non si elidono
 - Per la discontinuità del materiale
- In definitiva l'intera "fetta" di materiale genera lo stesso momento magnetico di un "nastro" di corrente superficiale i
- L'intero blocco è equivalente ad una densità superficiale di corrente

$$I = \int_0^L Mdz$$

$$I = \int_0^L Kdz$$

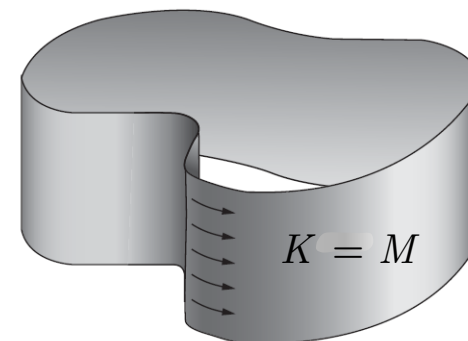
$$|K| = |M|$$



Campo B da materia magnetizzata

- Il campo magnetico generato dal materiale magnetizzato all'esterno del blocco è

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$



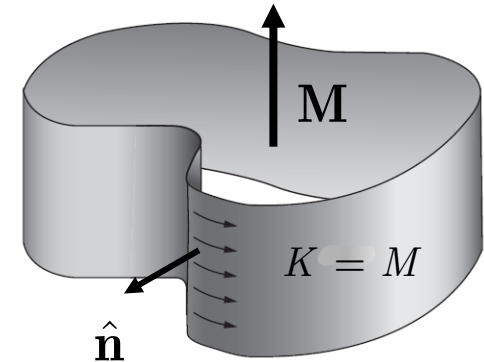
- Si tratta di un campo macroscopico
 - Non bisogna andare molto vicini alla superficie
 - Molto vicino significa a distanze dell'ordine delle dimensioni atomiche
- Consideriamo adesso il campo all'interno del blocco
 - Si tratta di una discussione analoga a quella del campo elettrico all'interno del dielettrico (diapositiva 294, I parte)
 - In quel caso avevamo utilizzato il fatto che il campo elettrostatico è conservativo
- Si potrebbe dimostrare che il campo B generato dalla corrente superficiale K è uguale alla media del campo microscopico B' all'interno del blocco
 - Il campo B' è quello generato dai dipoli magnetici atomici
 - È un campo con forti variazioni spaziali all'interno della materia
 - A livello macroscopico è importante la media spaziale
 - Per questa dimostrazione si utilizza il fatto che B è solenoidale

Correnti di magnetizzazione

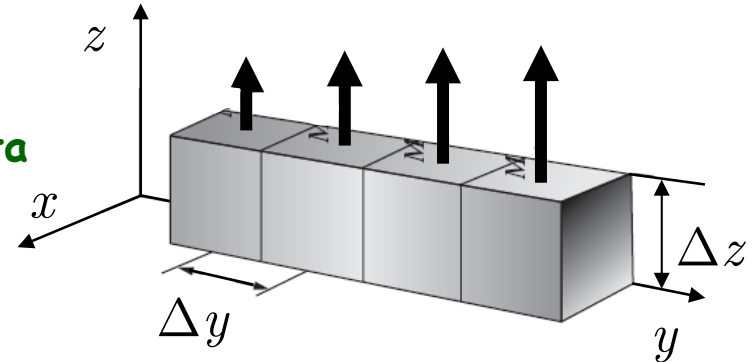
- Abbiamo visto che gli effetti della magnetizzazione possono essere descritti introducendo una densità superficiale di corrente $K = M$
- Dimostreremo che questo risultato si può esprimere in generale come

$$\mathbf{K} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$$

- Il versore $\hat{\mathbf{n}}$ è la normale alla superficie
- È facile verificare che per M costante la formula riproduce il risultato che abbiamo utilizzato fino ad ora



- Se la magnetizzazione non è uniforme compaiono anche correnti all'interno del volume della materia magnetizzata
- Per dimostrarlo consideriamo un blocco di materiale suddiviso in tanti blocchetti
 - La magnetizzazione può essere considerata uniforme in ogni blocchetto
 - Assumiamo che sia diretta lungo l'asse z
 - M varia spostandosi lungo l'asse y



Correnti di magnetizzazione

- Ogni blocchetto può essere sostituito da una spira percorsa da una corrente

$$i = M_z \Delta z$$

- La corrente nella prima spira è

$$i(y) = M_z(y) \Delta z$$

- La corrente nella seconda spira è

$$i(y + \Delta y) = M_z(y + \Delta y) \Delta z \approx M_z(y) \Delta z + \frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta y \Delta z$$

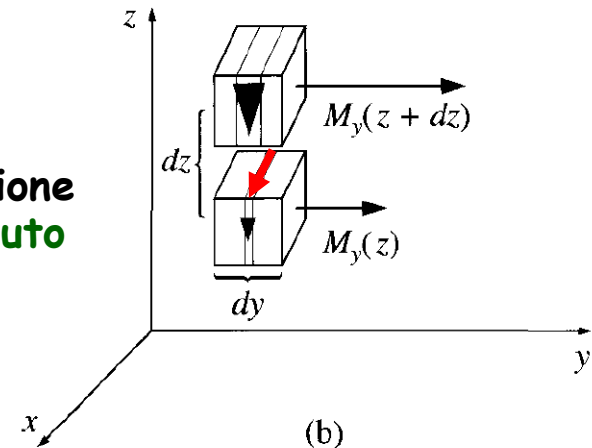
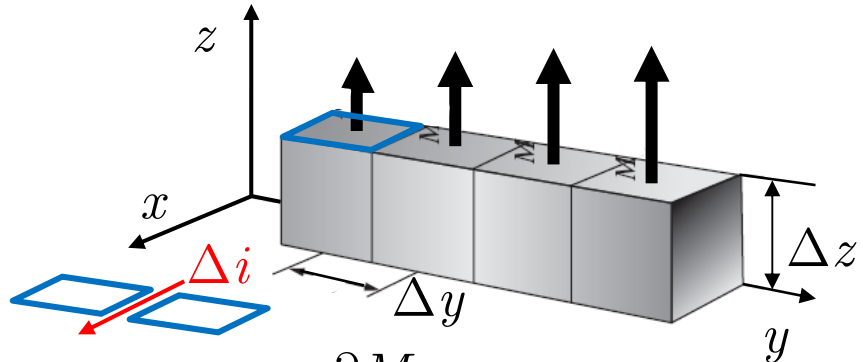
- La differenza fra le correnti delle spire genera una corrente Δi lungo x

$$\Delta i = i(y + \Delta y) - i(y) = M_z(y) \Delta z + \frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta y \Delta z - M_z(y) \Delta z$$

$$\Delta i = \frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta y \Delta z$$

- Analogamente una componente della magnetizzazione lungo y che varia lungo z genera un altro contributo di corrente lungo x

$$\Delta i = -\frac{\partial M_y}{\partial z} \Delta y \Delta z$$



Correnti di magnetizzazione

- Riassumiamo il risultato

$$\Delta i = \frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta y \Delta z - \frac{\partial M_y}{\partial z} \Delta y \Delta z$$

- Sappiamo che una corrente è il risultato del flusso di una densità di corrente attraverso una superficie
- La corrente che abbiamo calcolato è nella direzione x
 - Perpendicolare alla superficie $\Delta y \Delta z$
 - Definisce la componente x del vettore densità di corrente

$$\Delta i = \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right) \Delta y \Delta z = J_x \Delta y \Delta z \quad J_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_M$$

- Occorre osservare che questa corrente è il risultato dell'orientamento dei dipoli atomici
 - Una situazione analoga a quanto avveniva in elettrostatica per le cariche di volume $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$
 - A volte si usa anche l'aggettivo legato (bound) $\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_b$

Campo B da materia magnetizzata

- Anche nel caso appena descritto il campo magnetico generato dalla magnetizzazione si può calcolare utilizzando le formule introdotte per il campo magnetico generato da correnti reali
- Ricaviamo adesso in modo più formale (matematico) le relazioni che abbiamo ricavato con ragionamenti fisici
 - Supponiamo di avere un blocco di materia magnetizzata caratterizzata con un vettore di magnetizzazione $\mathbf{M}(\mathbf{r})$
 - Consideriamo un elemento di volume dv'
 - Ha un momento magnetico

$$d\mathbf{m} = \mathbf{M}(\mathbf{r}') dv'$$

- Ricordiamo il potenziale vettore di un dipolo nella approssimazione di grande distanza (dia. 103)

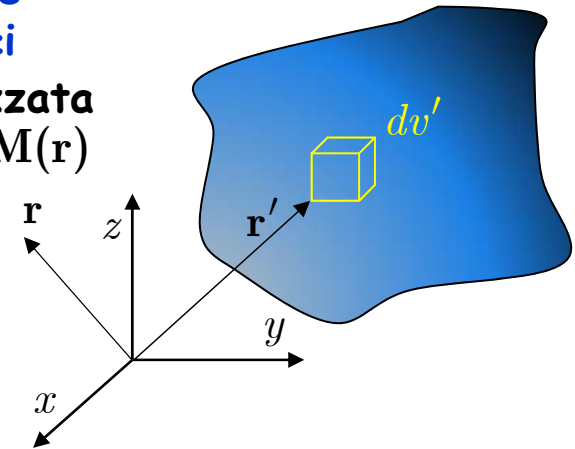
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \longrightarrow \quad d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} d\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Dipolo nell'origine

Dipolo in $\mathbf{r}'$

- Il potenziale vettore di tutto il corpo si calcola integrando

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$



Campo B da materia magnetizzata

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

- Utilizziamo la relazione

- L'operatore ∇' agisce sulla variabile $\mathbf{r}'$

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

- Otteniamo

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

- Utilizziamo l'identità (vedi diapositiva 55)

$$\nabla \times (f\mathbf{C}) = f(\nabla \times \mathbf{C}) - \mathbf{C} \times (\nabla f) \quad \mathbf{C} \times (\nabla f) = f(\nabla \times \mathbf{C}) - \nabla \times (f\mathbf{C})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')) dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla' \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

- La forma del primo integrale suggerisce di introdurre

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$$

- Ha la forma del potenziale vettore generato da una densità di corrente volumica

- Otteniamo, per il primo termine

$$\int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')) dv' = \int \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

Campo B da materia magnetizzata

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla' \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

- Per il secondo integrale utilizziamo la relazione[†]

$$\int \nabla \times \mathbf{A} dv' = \oint_s \mathbf{n} \times \mathbf{A} da$$

- Otteniamo

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla' \times \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_s \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da'$$

- Ha la forma del potenziale A generato da una densità di corrente superficiale

- Definiamo

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}'$$

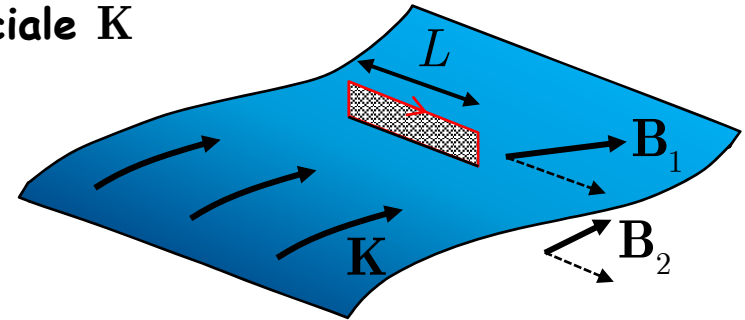
- Otteniamo infine

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_s \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da'$$

- [†]Vedi Griffiths D. - Introduction to electrodynamics, 3° ed. - esercizio 1.60b

Discontinuità del campo magnetico

- Nello studio del campo elettrico avevamo osservato che il campo elettrico è discontinuo quando si attraversa una densità superficiale di carica σ
 - La componente normale del campo è discontinua: $E_{1n} - E_{2n} = \sigma/\epsilon_0$
- Anche il campo magnetico ha delle discontinuità
 - Quando si attraversa una densità superficiale di corrente
 - Per il campo magnetico la discontinuità riguarda la componente tangenziale
- Consideriamo una densità di corrente superficiale K
 - Consideriamo il cammino chiuso in figura
 - Il senso di percorrenza del cammino e il verso di K sono legati dalla regola della vite destrorsa
 - Appliciamo la legge di Ampère



$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

- Assumiamo che il tratto verticale sia di lunghezza trascurabile

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B_{1t}L - B_{2t}L \quad \text{inoltre} \quad \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_0^L K dl = KL$$

- Otteniamo pertanto

$$B_{1t}L - B_{2t}L = \mu_0 KL$$



$$B_{1t} - B_{2t} = \mu_0 K$$

Discontinuità del campo magnetico

- Studiamo adesso il comportamento della componente normale
 - Dimostriamo che la componente normale si conserva
 - Ricordiamo che nel caso del campo elettrostatico era la componente tangenziale che si conservava
- Consideriamo ancora una volta una densità di corrente superficiale K
 - In questo caso consideriamo la superficie chiusa indicata in figura
 - Utilizziamo la proprietà che il flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa è nullo

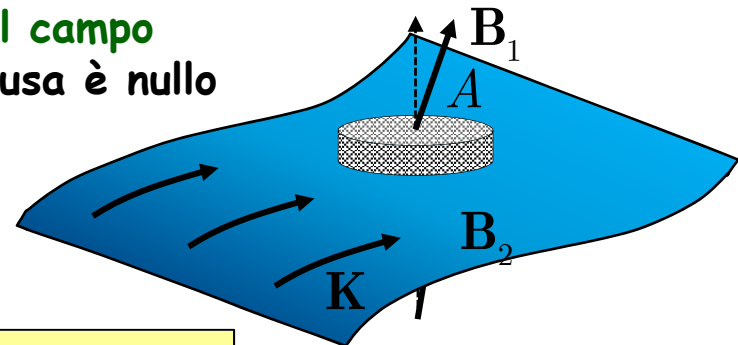
$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

- Assumiamo che il contributo della superficie laterale sia trascurabile

$$B_{1n}A - B_{2n}A = 0$$



$$B_{1n} = B_{2n}$$



- Le due condizioni che abbiamo visto possono essere sintetizzate in un'unica relazione vettoriale

$$\mathbf{B}_{\text{sopra}} - \mathbf{B}_{\text{sotto}} = \mu_0 \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}} \quad \text{Il verso di } \hat{\mathbf{n}} \text{ definisce "sopra" e "sotto"}$$

- Osserviamo che $\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}$ non ha una componente normale alla superficie

- $(\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ La componente normale di $\mathbf{B}$ è continua

Discontinuità del campo magnetico

- Illustriamo la relazione che lega la discontinuità alla eventuale densità di corrente superficiale

$$\mathbf{B}_{\text{sopra}} - \mathbf{B}_{\text{sotto}} = \mu_0 \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}$$

- Possiamo costruire localmente una terna di vettori

- La normale alla superficie $\hat{\mathbf{n}}$
- La direzione dell'eventuale corrente superficiale $\hat{\mathbf{s}}$
- Il vettore $\hat{\mathbf{p}}$ perpendicolare agli altri due

- Il prodotto

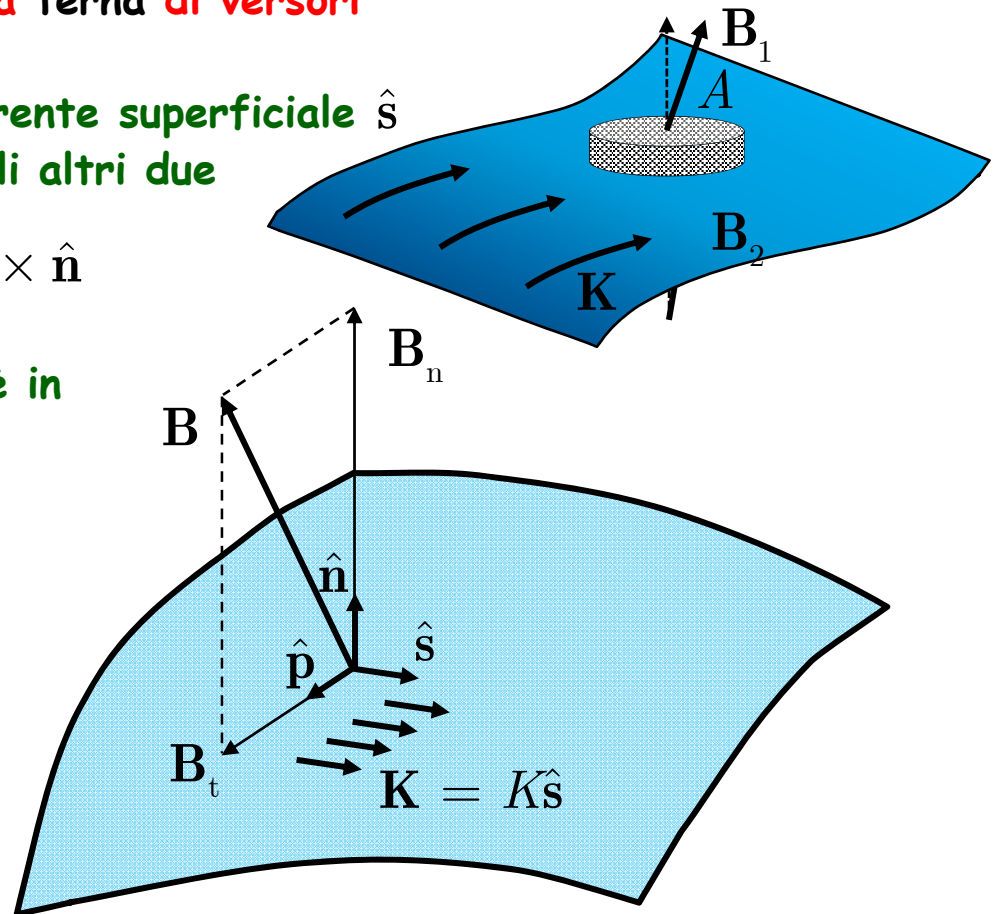
$$\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}} = K \hat{\mathbf{s}} \times \hat{\mathbf{n}}$$

è nella direzione del vettore $\hat{\mathbf{p}}$

- La componente tangenziale $\mathbf{B}_t$ è in questa direzione

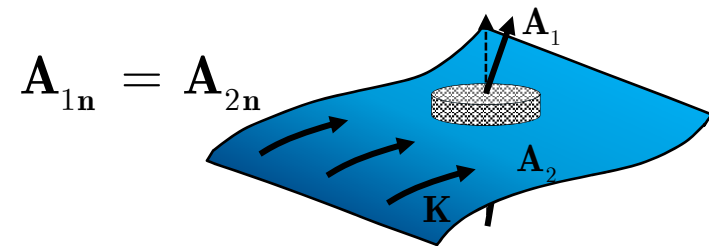
- Nella differenza $\mathbf{B}_{\text{sopra}} - \mathbf{B}_{\text{sotto}}$ le componenti normali si elidono

- Sono uguali (continue)
- L'eventuale discontinuità di $\mathbf{B}$ è nella componente tangenziale
- È determinata dalla densità di corrente superficiale $\mathbf{K}$



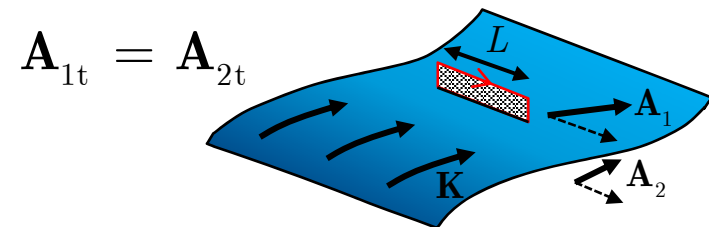
Discontinuità del campo magnetico

- Come per il campo elettrico anche per il campo magnetico si ha che il potenziale vettore è continuo
- In realtà c'è un'arbitrarietà
 - Infatti abbiamo visto che il potenziale vettore A non è univocamente determinato
 - La sostituzione $A \rightarrow A + \nabla f$ dà lo stesso campo B
 - Utilizzando questa arbitrarietà si può sempre richiedere che $\nabla \cdot A = 0$
- In questo caso si dimostra facilmente che la componente normale è continua
- Anche la componente tangenziale è continua
 - Infatti per il teorema di Stokes



$$\oint_C A \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times A \cdot d\mathbf{a} = \int_S B \cdot d\mathbf{a} = \Phi$$

- Se l'altezza del rettangolo scelto come cammino è infinitesima allora $\Phi = 0$
- Si dimostra come di consueto che
- Per finire si può dimostrare che

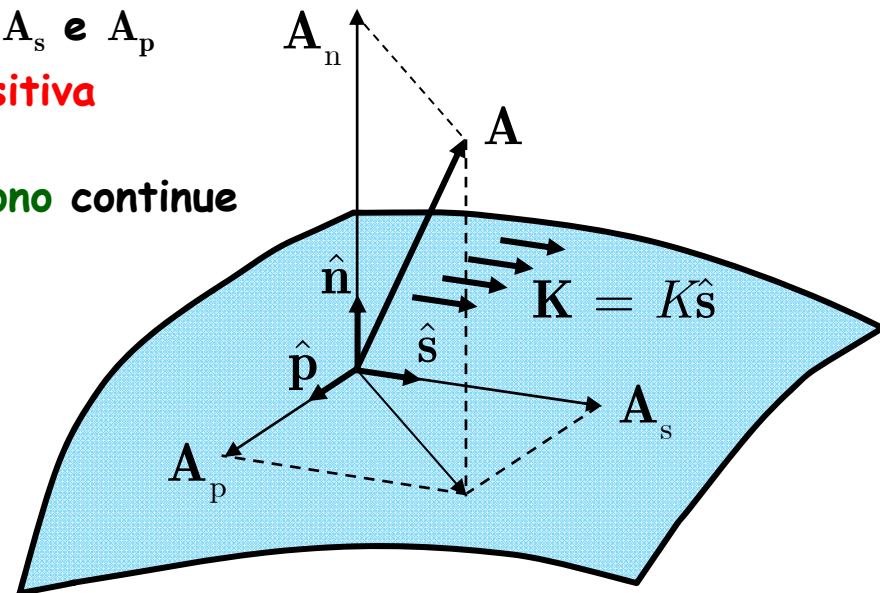


$$\frac{\partial A_1}{\partial n} - \frac{\partial A_2}{\partial n} = -\mu_0 K$$

Boundary conditions su A

- Illustriamo l'ultima condizione sulla derivata normale
- Il vettore A può essere scomposto lungo tre direzioni perpendicolari
 - La normale alla superficie $\hat{n}$
 - Due direzioni tangenti alla superficie
 - La direzione $\hat{s}$ di una eventuale densità superficiale di corrente K
 - La direzione $\hat{p}$ perpendicolare a $\hat{n}$ e $\hat{s}$
- Il vettore A ha tre componenti: A_n , A_s e A_p
 - La condizione enunciata nella diapositiva precedente dice che
 - Le derivate normali di A_n e A_p sono continue
 - La derivata normale di A è discontinua e nella direzione s
 - È la direzione della densità di corrente superficiale K
 - Si ha pertanto

$$\frac{\partial A_{1s}}{\partial n} - \frac{\partial A_{2s}}{\partial n} = -\mu_0 K$$



Esempio: campo B del solenoide

- Verifichiamo le condizioni di discontinuità appena enunciate per un solenoide

- Consideriamo un solenoide infinito

- Ci sono n spire per unità di lunghezza
- La corrente di una spira I

- Il campo di induzione magnetica B è nullo all'esterno

- All'interno vale $B = \mu_0 n I \hat{e}_z$

- La corrente trasportata dalle spire può essere considerata una corrente superficiale parallela alla superficie del cilindro

- La normale alla superficie è il versore $\hat{e}_\rho$

- Abbiamo pertanto

$$\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}} = nI\hat{e}_\phi \times \hat{e}_\rho = -nI\hat{e}_z$$

$$\mathbf{K} = nI\hat{e}_\phi$$

- La componente di B perpendicolare alla superficie è nulla: $B_\rho = 0$

- È nulla sia all'interno che all'esterno: è continua

- La componente di B parallela alla superficie è B_z

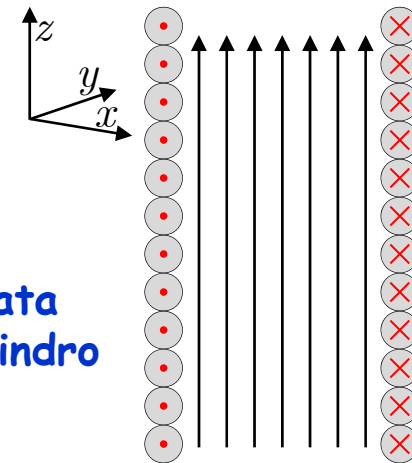
- È nulla all'esterno ($B_z = 0$) e vale $B_z = \mu_0 n I$ all'interno

$$B_{z \text{ ext}} - B_{z \text{ int}} = -\mu_0 n I$$

- Verso positivo di $\hat{\mathbf{n}}$ indica "sopra"

- Abbiamo pertanto verificato che

$$B_{\text{sopra}} - B_{\text{sotto}} = \mu_0 \mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}$$



Il campo $\mathbf{M}$ è discontinuo

- Il formalismo che abbiamo sviluppato fino ad ora permette di calcolare il campo magnetico quando si conosce la magnetizzazione $\mathbf{M}$ di un corpo

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' \quad \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_M \quad \mathbf{K}(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}'$$

- In questa espressione l'integrale di superficie è calcolato sulla superficie del materiale magnetizzato
- La magnetizzazione $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ è diversa da zero all'interno del corpo
- Nella derivazione avremmo potuto estendere l'integrale a tutto lo spazio
 - In particolare in regioni in cui $\mathbf{M}(\mathbf{r}) = 0$
 - In questo caso l'integrale di superficie diventa nullo
- La formula si riduce a

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

- Osserviamo che in questo caso l'integrando non è sempre continuo
- Sulla superficie dei corpi magnetizzati la magnetizzazione $\mathbf{M}$ è discontinua
 - Le derivate di una funzione discontinua producono delle funzioni singolari (δ di Dirac) che riproducono il contributo delle correnti superficiali

Il campo H

- Il campo generato dalla magnetizzazione ha la stessa espressione matematica del campo generato da una corrente reale (vedi diapositiva [92](#))

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad \mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$$

- Possiamo pertanto includere il contributo della magnetizzazione nell'equazione di Maxwell che lega il campo alle correnti di conduzione (cariche libere)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_C \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J}_C + \mathbf{J}_M)$$

- Abbiamo aggiunto il suffisso "C" per explicitare quali sono le correnti dovute ad un reale trasposto di carica elettrica
- Introducendo l'espressione per $\mathbf{J}_M$ otteniamo

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}_C + \nabla \times \mathbf{M} \quad \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_C \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_C$$

- Definiamo il campo H

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_C$$

- Notiamo che H non ha le dimensioni di B
- Ha le dimensioni della magnetizzazione (A m⁻¹)

Il campo H

- Il campo H ha nomi diversi in letteratura
 - Viene anche chiamato "campo magnetico"
 - Nel nostro corso abbiamo sempre chiamato campo magnetico il campo B
 - Chiameremo il nuovo campo "campo H"
- Il campo H è analogo al campo D introdotto in elettrostatica
 - Lega il campo alle sorgenti esterne (correnti di conduzione) eliminando la dipendenza esplicita dalle sorgenti indotte (correnti di magnetizzazione)
 - A differenza del campo D il campo H è molto utile ed è usato nelle applicazioni e nel lavoro sperimentale
 - La ragione sta nel fatto che la grandezza fisica che si controlla per generare un campo magnetico è la corrente

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_C \quad \longrightarrow \quad \oint_C \mathbf{H} = i_C$$

- Nel caso elettrostatico la grandezza fisica che si controlla sono i potenziali dei conduttori
 - Il campo D è invece legato alle densità di carica reali che non sono facilmente controllabili

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

Il campo H

- Come nel caso del campo elettrostatico anche adesso bisogna sottolineare che il campo H non può sostituire B
- Per determinare completamente un campo vettoriale è necessario definirne sia il rotore sia la divergenza
 - In generale la divergenza di H non è definita
 - Dipende dalla magnetizzazione
- Pertanto le equazioni necessarie per risolvere il problema sono

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \mathbf{B} = \mathbf{f}(\mathbf{H})$$

- Inoltre le opportune condizioni al contorno
- Se nel problema sono presenti più materiali occorre imporre le condizioni di raccordo dei campi alle superfici di passaggio da un materiale all'altro
- Ricaviamo le condizioni di discontinuità (raccordo) per il campo H
 - Le condizioni per il campo B sono state ricavate utilizzando le equazioni

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Il rotore di H è formalmente identico al rotore di B e porterà a condizioni sulla componente tangenziale di H analoghe a quelle di B
- Abbiamo bisogno della divergenza di H

Il campo H

- Calcoliamo la divergenza di H

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{B}}{\mu_0} - \nabla \cdot \mathbf{M}$$

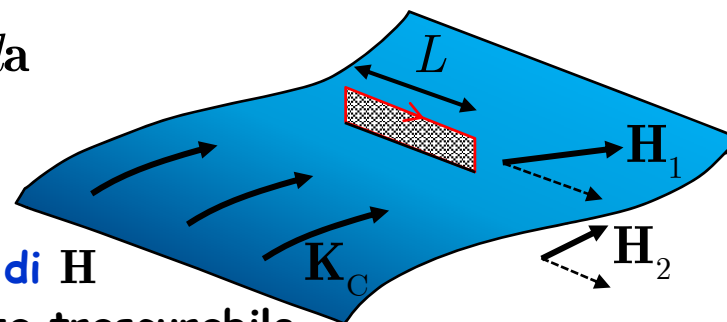
- Otteniamo

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$$

- La condizione sulla componente tangenziale si ottiene come nel caso di B

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_C \quad \longrightarrow \quad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J}_C \cdot d\mathbf{a}$$

$$H_{1t} - H_{2t} = K_C$$



- Per la componente normale calcoliamo il flusso di H attraverso la superficie di un cilindro di altezza trascurabile

- Abbiamo

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad \longrightarrow \quad \oint_S \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = -\oint_S \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

- Contribuiscono solo le superfici circolari A

$$\mathbf{H}_{\text{sopra}}^\perp - \mathbf{H}_{\text{sotto}}^\perp = -(\mathbf{M}_{\text{sopra}}^\perp - \mathbf{M}_{\text{sotto}}^\perp)$$

