
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 32 - 27.04.2023

Proprietà magnetiche della materia
Momenti angolari e momenti magnetici
Modelli microscopici qualitativi
Diamagnetismo

Anno Accademico 2022/2023

Manca qualcosa

- Nello studio del circuito LC abbiamo visto un esempio di fenomeno in cui le grandezze elettromagnetiche variano nel tempo
- In particolare variavano nel tempo la carica sulle armature e la corrente nel circuito
- Dobbiamo pertanto considerare variabili nel tempo sia la densità di carica ρ che la densità di corrente $\mathbf{J}$
- Abbiamo visto che deve essere soddisfatta la conservazione locale della carica: equazione di continuità

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

- Pertanto nello studio di fenomeni elettromagnetici variabili nel tempo dobbiamo assumere che in generale

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \neq 0$$

- Abbiamo formulato la legge di Ampère in forma differenziale fissando il rotore del campo magnetico

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

- Ma la divergenza di un rotore è sempre nulla
- L'equazione precedente è pertanto inconsistente quando i fenomeni elettromagnetici non sono stazionari

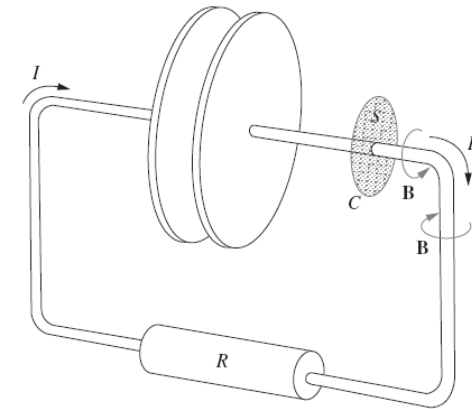
Manca qualcosa

- Lo stesso tipo di contraddizione può essere visto in un altro modo

- Ad esempio durante la scarica (o carica) di un condensatore
- Durante l'evoluzione del fenomeno una corrente scorre nel filo
- La corrente genera un campo magnetico
- Calcoliamo la circuitazione del campo magnetico e applichiamo il Teorema di Stokes

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

- La superficie più ovvia è quella indicata in figura
- Il filo attraversa la superficie
- Nel filo è presente una densità di corrente



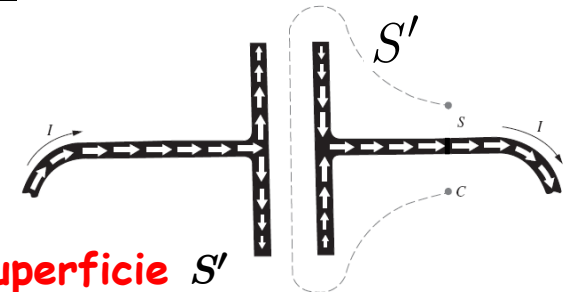
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I$$

- Questa è la legge di Ampère
- Tuttavia abbiamo dimostrato che possiamo scegliere qualunque superficie che abbia lo stesso contorno C

Manca qualcosa

- Possiamo scegliere ad esempio la superficie S'

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S'} \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \int_{S'} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0$$



- Tuttavia nessuna densità di corrente interseca la superficie S'
- Due risultati diversi che mostrano che l'equazione del rotore è incompleta
- Dobbiamo pertanto concludere che qualcos'altro contribuisce al rotore di $\mathbf{B}$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + ?$$

- Deve esistere un termine aggiuntivo il cui flusso attraverso S' non sia nullo
- Occorre aggiungere un termine che compensi il fatto che $\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0$
- Esaminiamo l'equazione di continuità

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

- Ricordiamo che la legge di Gauss vale anche nel caso dinamico

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad \rho(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

Manca qualcosa

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\varepsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

- Pertanto otteniamo

$$\nabla \cdot \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] = 0$$

- La combinazione di campi che abbiamo scritto ha divergenza nulla
 - Può essere uguagliata al rotore di un campo vettoriale senza generare inconsistenze
 - Soddisfa automaticamente l'equazione di continuità
- Modifichiamo pertanto l'equazione del rotore di $\mathbf{B}$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + ? \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

- Notiamo che il campo magnetico può esistere anche se $\mathbf{J} = 0$
 - Può essere generato dalla variazione del campo elettrico
 - L'analogo della legge di Faraday per il campo elettrico

Equazioni di Maxwell

- Scriviamo le equazioni di Maxwell nella loro forma finale

$$\begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array}$$

Diagram illustrating the classification of Maxwell's equations:

- Green arrow labeled "omogenee" points from $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ to $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.
- Black arrow labeled "non omogenee" points from $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ to $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$.

- Vanno completate con

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Dalla quarta equazione discende che

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{equazione di continuità}$$

- Ricordiamo che il teorema di Helmholtz assicura che la conoscenza della divergenza e del rotore definiscono completamente il campo (diapositiva [94](#))
 - Per fissate condizioni al contorno, ad esempio all'infinito
- Nelle condizioni statiche le sorgenti sono
 - La carica elettrica per il campo elettrico
 - La corrente per il campo magnetico
- Quando i campi variano nel tempo
 - Un campo magnetico variabile genera un campo elettrico
 - Un campo elettrico variabile genera un campo magnetico
- L'ultimo contributo è stato introdotto da Maxwell su basi teoriche
 - Vediamo come funziona l'ultimo termine con due esempi

Il termine di Maxwell all'opera

- Supponiamo di avere una sfera di carica Q che genera un flusso di corrente radiale

- Per l'equazione di continuità in forma integrale

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \quad j(r) 4\pi r^2 = -\frac{dQ(r)}{dt}$$

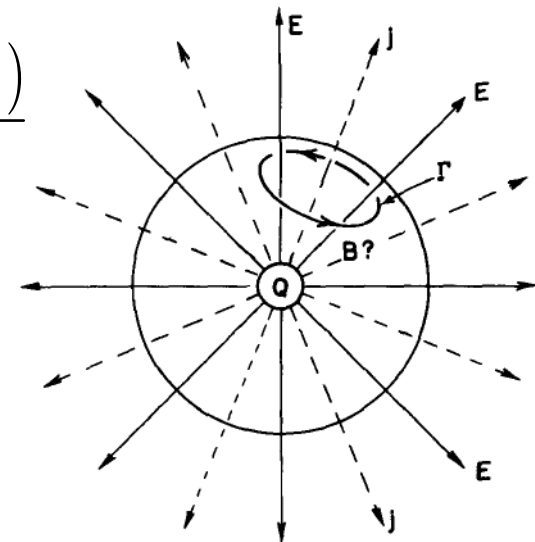
- La corrente dovrebbe generare un campo magnetico
- Se utilizziamo il cammino Γ in figura dovremmo avere

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 j(R) \cdot S$$

- Tuttavia la sfera è simmetrica e $\mathbf{B}$ non può avere una particolare direzione: deve essere nullo
- Il flusso di $\mathbf{J}$ però è diverso da zero
- La contraddizione viene risolta dal termine aggiuntivo di Maxwell
- Infatti la sfera di carica genera un campo elettrico

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(r)}{r^2}$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = j(r) \hat{\mathbf{e}}_r$$



Il termine di Maxwell all'opera

- Dal momento che la carica varia, anche il campo sarà variabile nel tempo

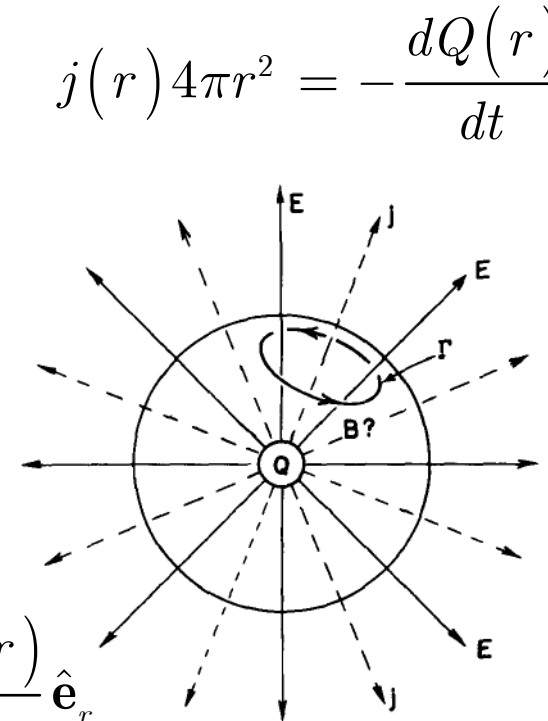
$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\partial Q(r)}{\partial t}$$

- Esaminiamo l'equazione di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- Calcoliamo $\mathbf{J}$ e $\partial \mathbf{E} / \partial t$

$$\mathbf{J}(r) = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{dQ(r)}{dt} \hat{\mathbf{e}}_r \quad \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\partial Q(r)}{\partial t} \hat{\mathbf{e}}_r$$



- Inserendo nell'equazione di Maxwell troviamo

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{4\pi r^2} \frac{dQ(r)}{dt} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{\mu_0 \epsilon_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{dQ(r)}{dt} \hat{\mathbf{e}}_r = 0$$

- Pertanto il campo magnetico è nullo nonostante l'esistenza di una corrente
- Come richiesto dalla simmetria

Il termine di Maxwell all'opera

- Il secondo esempio è quello del condensatore
 - Lo abbiamo utilizzato per convincerci che mancava qualcosa
 - Andando vicino al filo il campo magnetico è

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 i \quad B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

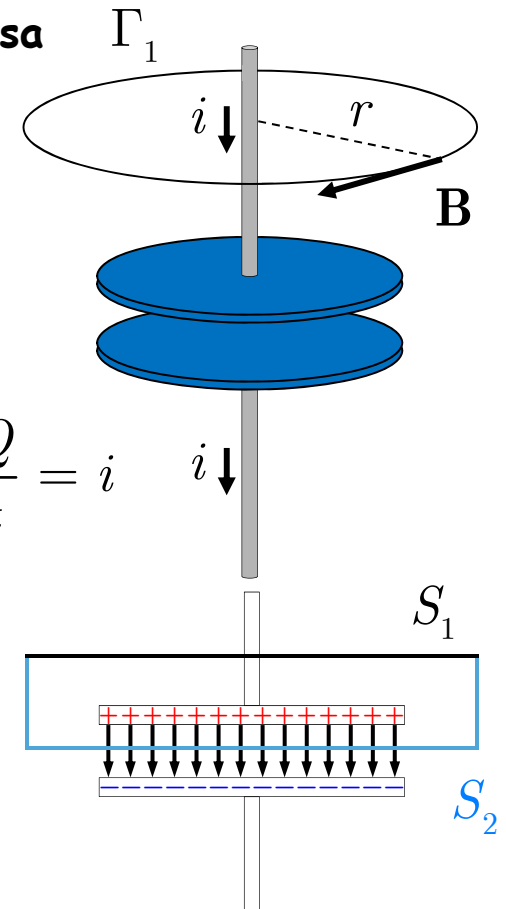
- Tuttavia se si sceglie la superficie S_2 , anch'essa concatenata con Γ_1 si trova ovviamente $i = 0$
- Naturalmente l'esistenza di una corrente implica che anche la carica sulle armature del condensatore cambi
 - Se la carica sulle armature varia nel tempo varia anche il campo elettrico fra le armature
 - Calcoliamo il flusso di $\mathbf{E}$ attraverso S_2

$$\int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \longrightarrow \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{dQ}{dt} = \frac{i}{\varepsilon_0}$$

- Esaminiamo l'equazione di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Il nuovo termine contribuisce esattamente come il filo



Proprietà magnetiche della materia

- La materia può esibire proprietà magnetiche molto differenti

- Iniziamo con una classificazione dei materiali sulla base delle loro proprietà

- Supponiamo di avere un solenoide in grado di produrre campi magnetici molto intensi

- Diciamo dell'ordine del Tesla

- Un solenoide del tipo rappresentato in figura potrebbe avere le seguenti caratteristiche:

- Campo massimo. Al centro, di circa 3 Tesla

- Cilindro interno $h = 40 \text{ cm}$ $\varnothing = 10 \text{ cm}$

- Con un simile magnete si possono effettuare misure sulla forza magnetica che agisce su vari materiali in presenza di un campo magnetico esterno B

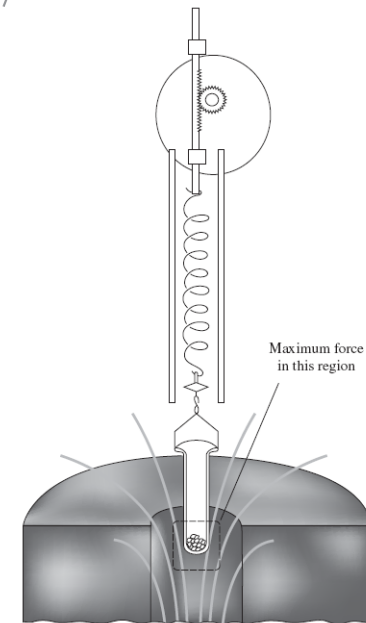
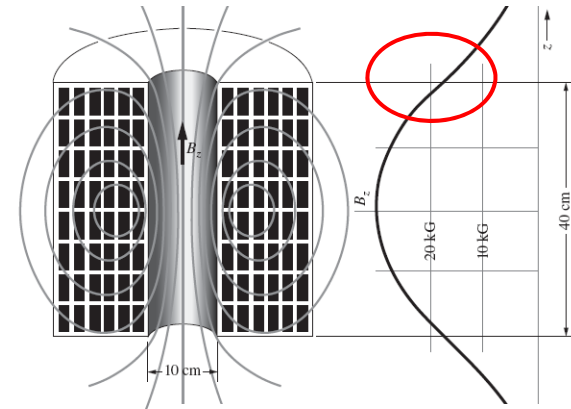
- Si scopre che si esercita una forza solamente quando il campo magnetico non è uniforme

- La forza dipende dal gradiente del campo magnetico

- Nell'esempio, il gradiente è più elevato all'ingresso del magnete

- Si ha un gradiente di circa -17 T/m

- Il campo è di circa 1.8 T

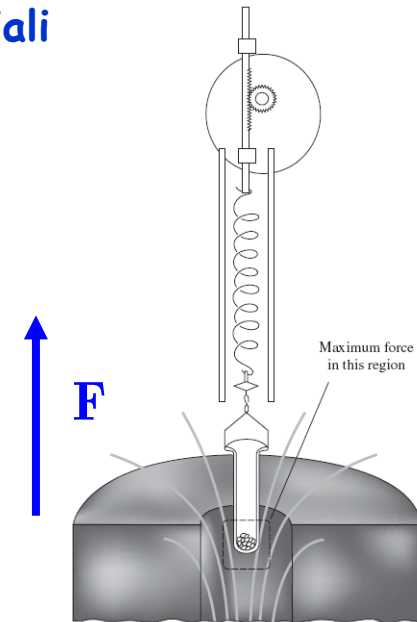


Proprietà magnetiche della materia

- Con l'apparato precedente si possono studiare vari materiali
 - La tabella riporta esercitata su un campione di 1 Kg

Force per kilogram near the upper end of the coil in our experiment, where $B_z = 1.8$ tesla and $dB_z/dz = 17$ tesla/m

Substance	Formula	Force (newtons)
Diamagnetic		
Water	H ₂ O	-0.22
Copper	Cu	-0.026
Sodium chloride	NaCl	-0.15
Sulfur	S	-0.16
Diamond	C	-0.16
Graphite	C	-1.10
Liquid nitrogen	N ₂	-0.10 (78 K)
Paramagnetic		
Sodium	Na	0.20
Aluminum	Al	0.17
Copper chloride	CuCl ₂	2.8
Nickel sulfate	NiSO ₄	8.3
Liquid oxygen	O ₂	75 (90 K)
Ferromagnetic		
Iron	Fe	4000
Magnetite	Fe ₃ O ₄	1200



Proprietà magnetiche della materia

- È evidente che una teoria degli effetti magnetici della materia deve essere piuttosto complessa
 - Per una classe di materiali le forze sono deboli
 - Le forze sono proporzionali al quadrato del campo
 - Per i materiali diamagnetici
 - Vengono "respinti" dal magnete
 - Per i materiali paramagnetici
 - Vengono "attratti" dal magnete
 - Nella tabella precedente le forze sono riferite a una massa di 1 Kg
 - Forze di 0.1 - 1 N contro una forza peso di 9.8 N
 - L'ossigeno liquido è una tipologia differente (bassa temperatura)
- Per una classe di materiali le forze sono molto intense
- Le forze sono lineari con l'intensità del campo
 - Materiali ferromagnetici
 - Sono "attratti" dal magnete
 - Un Kg di ferro risente di una forza magnetica di 4000 N
 - Pari ad una forza peso di 400 Kg

Proprietà magnetiche della materia

- **Materiali** diamagnetici
 - Si scopre che tutte le sostanze sono soggette a questo tipo di forza repulsiva
 - Dipende dal quadrato della corrente del solenoide
 - È l'unico effetto per le sostanze organiche e per molti composti inorganici
 - Praticamente indipendente dalla temperatura
- **Materiali** paramagnetici
 - Per molte sostanze questa forza attrattiva risulta comunque debole
 - Dipende dal quadrato della corrente del solenoide
 - Ad esempio per metalli come sodio, alluminio
 - Per alcuni composti è un po' più intensa
 - NiSO_4 , CuCl_2
 - La forza aumenta se la temperatura diminuisce
- **Materiali** ferromagnetici
 - La forza è attrattiva ed è molto intensa
 - Dipende linearmente dalla corrente del solenoide
 - Fra i principali materiali ferromagnetici sono il ferro, il nichel e il cobalto

Proprietà magnetiche della materia

- Vale la pena fare una considerazione sugli aspetti di natura energetica
 - Le energie in gioco per i fenomeni diamagnetici e paramagnetici sono piuttosto piccole
 - Questo è vero anche a livello microscopico
 - Consideriamo ad esempio i dati dell'ossigeno liquido riportati in tabella
 - Facciamo riferimento al metodo di misura descritto
 - Supponiamo di volere allontanare il campione (1 Kg di sostanza) per portarlo fuori dall'effetto del campo magnetico
 - Diciamo allontanarlo di 10 cm
 - Per opporsi alla forza di 75 N il lavoro necessario è circa 7.5 Joules (~ 10 J)
 - In 1 Kg di O_2 ci sono circa 2×10^{25} molecole
 - L'ordine di grandezza dell'energia per molecola è 10^{-24} Joules
 - Per confronto, per vaporizzare 1 Kg di O_2 liquido occorrono $\sim 2.1 \times 10^5$ Joules
 - Circa 10^{-20} Joules per molecola
- Si vede pertanto che i fenomeni diamagnetici o paramagnetici mettono in gioco energie molto più piccole di una transizione di fase
 - Non influenzano reazioni chimiche o processi biochimici
- Un esame NMR non ha nessun effetto collaterale (occorre però prestare attenzione a impianti/protesi ferromagnetiche)

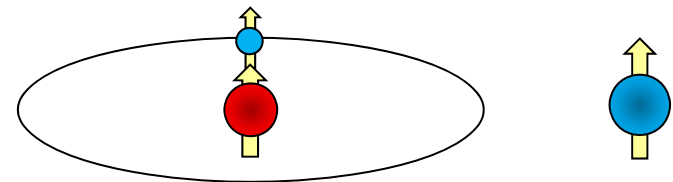
Proprietà magnetiche della materia

- Abbiamo già sottolineato che non si sono mai trovate cariche magnetiche
 - Abbiamo finora studiato il magnetismo nel vuoto
 - Anche studiando il magnetismo nella materia non si è mai trovata evidenza di monopoli magnetici
 - I monopoli sono stati cercati in molti modi e il risultato di queste ricerche è che se esistono sono molto rari
- Assumiamo pertanto che nella materia non esistano cariche magnetiche
 - Le equazioni del campo $\mathbf{B}$ sono pertanto

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$

Nel caso statico
 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$
 - Pertanto l'origine delle proprietà magnetiche della materia è da ricercare nell'esistenza di correnti a livello microscopico
 - Correnti atomiche dovute al moto orbitale degli elettroni
 - Classicamente l'elettrone orbita intorno al nucleo e si può rappresentare come una spira percorsa da corrente
 - Un dipolo magnetico
 - C'è anche il momento magnetico intrinseco dell'elettrone, legato allo spin
 - Un effetto puramente quantistico
 - L'elettrone ha un momento angolare intrinseco



Correnti atomiche

- Vogliamo adesso utilizzare questo semplice modello atomico per cercare di comprendere qualitativamente le forze diamagnetiche

- Una trattazione rigorosa richiederebbe la meccanica quantistica

- Assumiamo, anche se questo non è completamente corretto, che l'elettrone ($q = -e$) si muova in un'orbita circolare di raggio r intorno al nucleo

- La frequenza di rivoluzione è

$$f = \frac{v}{2\pi r}$$

- Pertanto la quantità di carica al secondo che attraversa un punto dell'orbita è

$$i = ef = e \frac{v}{2\pi r}$$

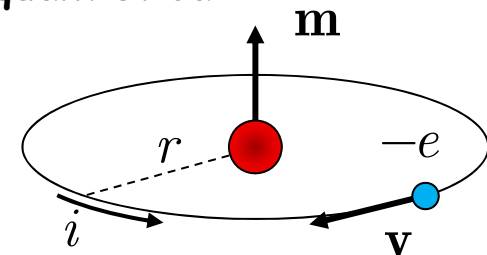
- Nel fissare il verso della corrente abbiamo tenuto conto del fatto che la carica dell'elettrone è negativa

- Inoltre abbiamo trascurato il fatto che la carica sia puntiforme e l'abbiamo considerata uniformemente distribuita sulla circonferenza

- La corrente atomica descritta costituisce un dipolo magnetico

$$m = i\pi r^2 = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{e}{2} vr$$

- Il momento magnetico m è perpendicolare al piano dell'orbita



Correnti atomiche

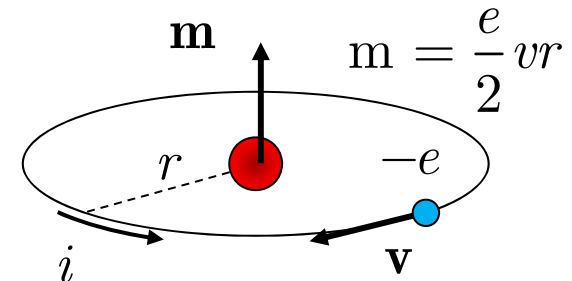
- Detta m_e la massa dell'elettrone il suo momento angolare orbitale è

$$L = r m_e v$$

- **Attenzione a non confondere la massa (m_e) con il momento magnetico m**
- **Anche il momento angolare orbitale L è perpendicolare al piano dell'orbita**
- Confrontando le due espressioni si ottiene

$$m = \frac{-e}{2m_e} L$$

- **Questa relazione vale anche quando l'orbita non è circolare**
 - Vale anche in meccanica quantistica quando l'orbita classica non ha più senso
 - Notiamo che se la carica fosse positiva il momento magnetico e il momento angolare sarebbero paralleli
 - La carica dell'elettrone è negativa e L e m sono anti-paralleli
- Alcuni autori chiamano la quantità $e/2m_e$ rapporto giromagnetico dell'elettrone
 - **La nomenclatura è confusa**



Momenti angolari e momenti magnetici

- Anche al momento angolare intrinseco dell'elettrone è associato un momento magnetico

- Tuttavia la costante di proporzionalità è differente

$$\mathbf{m} = g \frac{-e}{2m_e} \mathbf{S} \quad g = 2$$

- Si tratta di un effetto puramente quantistico non spiegabile classicamente

- In particolare il fattore $g = 2$

- Una cosa molto importante che va detta a proposito dei momenti angolari atomici è che non possono assumere tutti i valori con continuità

- I valori possibili sono discreti (quantizzati)

- La proiezione lungo un asse del momento angolare orbitale è un multiplo della costante di Planck

$$L_z = m\hbar \quad m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l \quad |\mathbf{L}|^2 = l(l + 1)\hbar^2$$

- Il momento angolare intrinseco può assumere solo due valori

$$S_z = \pm \frac{1}{2} \hbar$$

- Di conseguenza anche i momenti magnetici atomici possono assumere solo valori discreti (quantizzati)

Momenti angolari e momenti magnetici

- Quando parliamo dell'atomo dobbiamo tenere conto che è un sistema composto da elettroni e nucleoni

- Tuttavia i nucleoni sono molto più pesanti degli elettroni

$$m_p \approx m_n \sim 2000 m_e$$

- Pertanto è di solito una buona approssimazione considerare l'elettrone sotto l'effetto di un campo coulombiano generato da una carica fissa in un punto dello spazio

- Equivale a considerare infinita la massa del nucleone

- Per quanto riguarda lo spin dei nucleoni e il momento magnetico associato

- Il momento magnetico del protone è ($g = 2$)

$$\mu = \mu_p g \frac{e}{2m_p} S$$

- Notiamo che il rapporto giromagnetico del protone è circa 2000 volte più piccolo di quello dell'elettrone

- Inoltre $\mu_p = 2.793$

- Deriva dal fatto che il protone è una particella composta di quark

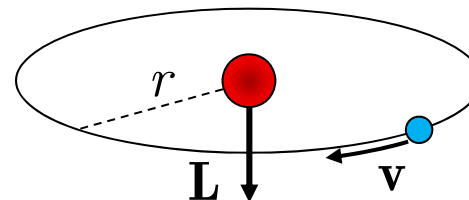
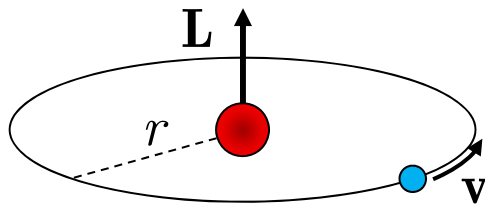
- Per il neutrone $\mu_n = -1.913$

- Nonostante il neutrone sia neutro!

- Nello studio del magnetismo nella materia i momenti magnetici nucleari sono trascurati

Momenti angolari e momenti magnetici

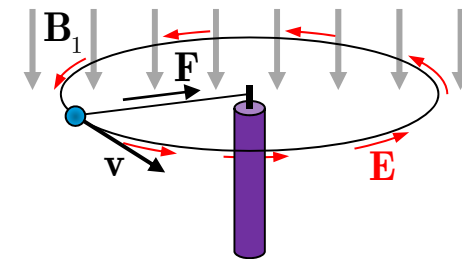
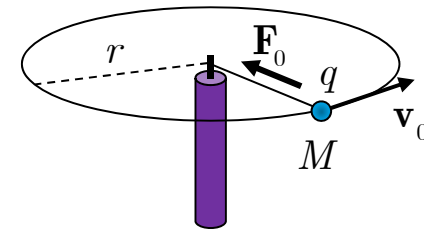
- La meccanica quantistica permetterà di formulare un modello dell'atomo che descrive in modo molto preciso le proprietà degli atomi
 - In particolare il momento angolare totale dell'atomo
 - E quindi anche il momento magnetico
 - Risulta che gli atomi e le molecole tendono ad avere un momento angolare nullo
 - I momenti angolari orbitali si cancellano
 - I momenti angolari intrinseci si cancellano (principio di Pauli)
 - In realtà questo avviene nelle molecole o quando il numero degli elettroni è pari
- In pratica la maggior parte delle sostanze hanno un momento angolare nullo
 - Per queste sostanze l'unico fenomeno magnetico è il diamagnetismo
- Cercheremo di capire il diamagnetismo studiando gli effetti di un campo magnetico esterno su un elettrone in un'orbita classica



- Si ha momento angolare nullo con due orbite percorse in verso opposto

Modello qualitativo del diamagnetismo

- Supponiamo di avere una particella di massa M e carica q che compie un moto circolare uniforme in un'orbita di raggio r
 - La forza centripeta è fornita da una fune
 - La tensione della fune è F_0 , la velocità v_0
 - Inizialmente $B = 0$ $F_0 = M \frac{v_0^2}{r}$
- Supponiamo adesso di stabilire nella regione un campo magnetico B_1 diretto come in figura
 - Naturalmente dobbiamo passare da $B = 0$ a B_1
 - Avremo un campo magnetico variabile nel tempo
 - Avremo anche un campo elettrico indotto
 - La variazione del flusso sull'orbita determina la circuitazione del campo elettrico indotto
 - Trascuriamo il segno che fisseremo alla fine con la legge di Lenz



$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt} \quad \mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r E \quad 2\pi r E = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$
$$E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

Modello qualitativo del diamagnetismo

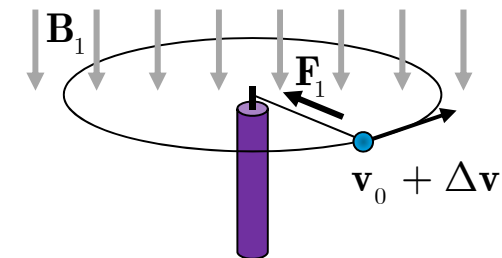
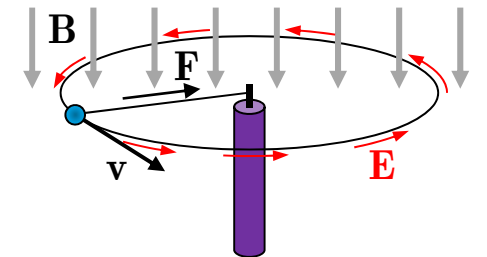
- Il campo elettrico indotto accelera l'elettrone

$$E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad M \frac{dv}{dt} = qE \quad M \frac{dv}{dt} = \frac{r}{2} q \frac{dB}{dt}$$

- L'equazione si integra facilmente

$$M dv = \frac{r}{2} q dB \quad \int_v^{v+\Delta v} dv = \frac{r}{2M} q \int_0^{B_1} dB$$

$$\Delta v = \frac{qr}{2M} B_1$$



- La velocità è aumentata
- Se la velocità aumenta deve aumentare anche la forza centripeta

$$F_0 \rightarrow F_1 = M \frac{(v_0 + \Delta v)^2}{r} \approx M \frac{v_0^2}{r} + M \frac{2v_0 \Delta v}{r} + O(\Delta v^2)$$

- Nei casi di interesse $\Delta v \ll v_0$

Modello qualitativo del diamagnetismo

- Oltre alla tensione della fune abbiamo anche la forza di Lorentz: $F_1 = F_0 + F_m$

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \longrightarrow \quad F_m = q(v_0 + \Delta v) B_1$$

$$F_m = (v_0 + \Delta v) \frac{2M\Delta v}{r}$$

ricordiamo che

$$\Delta v = \frac{qr}{2M} B_1$$

- Trascuriamo ancora una volta i termini in Δv^2

$$F_m = \frac{2Mv_0\Delta v}{r}$$

$$qB_1 = \frac{2M\Delta v}{r}$$

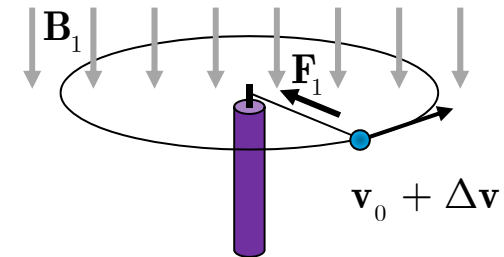
- Confrontiamo con il risultato della diapositiva precedente

$$F_1 \approx M \frac{v_0^2}{r} + M \frac{2v_0\Delta v}{r}$$

- Vediamo l'interessante circostanza che il campo magnetico fornisce anche la necessaria forza centripeta aggiuntiva
 - Necessaria per mantenere il raggio dell'orbita costante
 - La tensione della fune non è cambiata
 - Non dipende dal tipo di forza che lega la particella
 - Funziona allo stesso modo con la legge di Coulomb

Modello qualitativo del diamagnetismo

- Veniamo al segno della forza elettromotrice
 - In linea di principio Δv potrebbe essere negativa indicando una decelerazione della carica
- Utilizziamo la legge di Lenz
 - La variazione velocità deve generare una variazione di flusso che si oppone alla variazione del flusso di B_1
 - Se $q > 0$ la variazione di velocità deve essere positiva: $\Delta v > 0$
- In termini di momento di dipolo magnetico
 - Inizialmente il momento di dipolo è (vedi diapositiva [311](#))

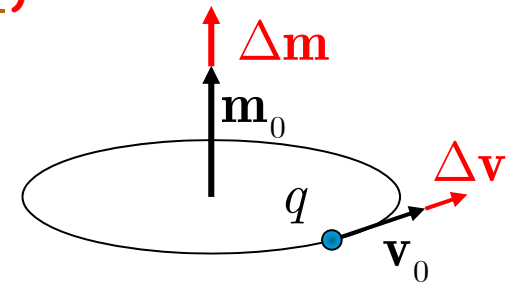


$$m_0 = \frac{qr}{2} v_0$$

- Dopo l'accelerazione il momento è aumentato

$$m_0 \rightarrow m_0 + \Delta m \quad \Delta m = \frac{qr}{2} \Delta v$$

- Dalle diapositive precedenti



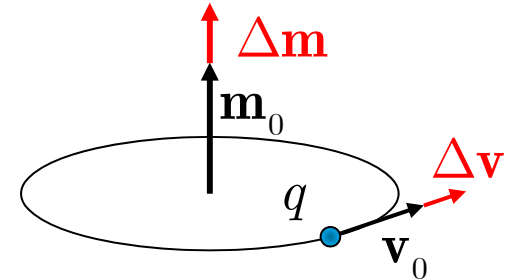
$$\Delta v = \frac{qr}{2M} B_1$$

$$\Delta m = \frac{q^2 r^2}{4M} B_1$$

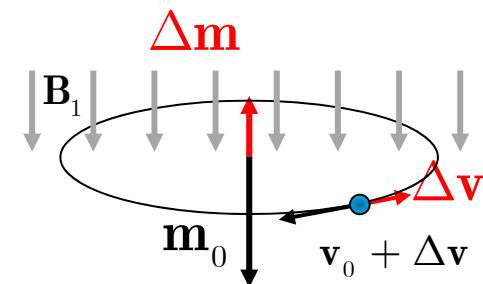
$$\Delta m = \frac{q^2 r^2}{4M} B_1$$

Modello qualitativo del diamagnetismo

- Vediamo pertanto che l'elettrone acquista un momento di dipolo magnetico aggiuntivo
 - L'aumento Δm è anti-parallelo al campo applicato B_1
- Il momento di dipolo aggiuntivo è nel verso opposto a quello di B_1 anche quando l'elettrone ruota in senso inverso
 - Succede per la legge di Lenz
 - Per la legge di Lenz la variazione di velocità deve generare una variazione di flusso opposta a quella causata da B_1
 - Δv e Δm come nel caso precedente
- Concludiamo che per entrambi i versi della velocità dell'elettrone c'è un momento di dipolo aggiuntivo
 - Anche per un atomo con due elettroni con due orbite percorse in senso opposto
 - Un atomo che inizialmente ha momento angolare e momento magnetico nulli
 - Acquista un momento di dipolo magnetico pari a $2 \Delta m$
 - Analogo all'atomo sferico che si deforma e acquista un dipolo elettrico



$$\Delta m = -\frac{q^2 r^2}{4M} B_1$$



$$\Delta m = -\frac{q^2 r^2}{4M} B_1$$

Modello qualitativo del diamagnetismo

- **Abbandoniamo l'ipotesi che l'orbita sia perpendicolare al campo magnetico**
 - **La proiezione del campo magnetico sull'asse perpendicolare al piano dell'orbita è $B \cos \theta$**

$$\Delta m = \frac{q^2 r^2}{4M} |B| \cos \theta$$

- **Nella somma dei momenti magnetici aggiuntivi rimane solo la componente z di Δm**

$$\Delta m_z = \Delta m \cos \theta = \frac{q^2 r^2}{4M} |B| \cos^2 \theta$$

- **La grandezza $r \cos \theta$ è la proiezione del raggio dell'orbita sul piano $x-y$**

- **Mediando su tanti atomi**

$$\overline{r^2 \cos^2 \theta} = \overline{x^2 + y^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2}$$

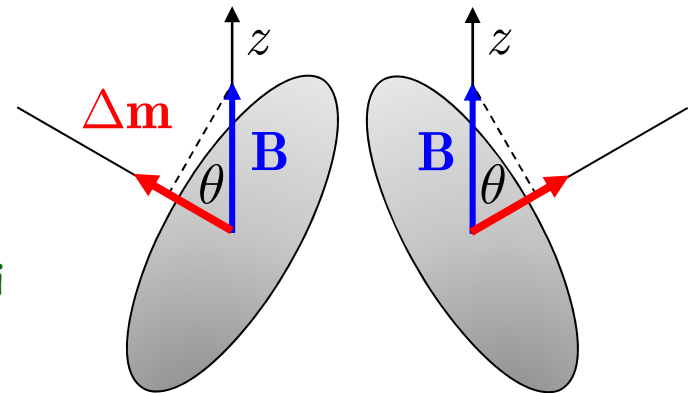
- **D'altro canto**

$$\overline{r^2} = \overline{x^2 + y^2 + z^2} \quad \overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} \quad \overline{r^2} = 3\overline{x^2} \quad \overline{x^2} = \frac{\overline{r^2}}{3}$$

- **Utilizzando questo risultato**

$$\overline{r^2 \cos^2 \theta} = 2\overline{x^2} \quad \overline{r^2 \cos^2 \theta} = \frac{2}{3} \overline{r^2}$$

$$\Delta m = -\frac{q^2 \overline{r^2}}{6M} B$$



Modello qualitativo del diamagnetismo

- Infine consideriamo un atomo in cui ci sono Z elettroni ($q = e$, $M = m_e$)

- Il momento magnetico che l'atomo acquista è

$$\overline{R_0^2} = \frac{1}{Z} \sum_{k=1}^Z \overline{r_k^2}$$

$$\Delta \mathbf{m} = \sum_{k=1}^Z \Delta \mathbf{m}_k = - \sum_{k=1}^Z \frac{e^2 \overline{r_k^2}}{6m_e} \mathbf{B} = - \frac{e^2}{6m_e} \mathbf{B} \sum_{k=1}^Z \overline{r_k^2} = - \frac{e^2 Z \overline{R_0^2}}{6m_e} \mathbf{B}$$

- Possiamo adesso calcolare il momento magnetico che acquista un volume V di materia che contiene n atomi per unità di volume

$$n = \frac{\rho}{A} N_{Av}$$

- Il numero di atomi è

$$N = nV = \frac{\rho}{A} N_{Av} V = \frac{M}{A} N_{Av} \quad M \text{ è la massa del volume } V \text{ in g}$$

- Il momento magnetico è

$$\mathbf{m} = N \Delta \mathbf{m} = - \frac{M}{A} N_{Av} \frac{e^2 Z \overline{R_0^2}}{6m_e} \mathbf{B} \quad \frac{Z}{A} \approx \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{m} = - \frac{1}{2} M N_{Av} \frac{e^2 \overline{R_0^2}}{6m_e} \mathbf{B}$$

- Ricordiamo che la forza su un momento magnetico $\mathbf{m}$ è (diapositiva [121](#))

$$\mathbf{F} = \nabla (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

- Notiamo che il verso della forza dipende dal segno di $\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$

Modello qualitativo del diamagnetismo

- Calcoliamo la forza per le sostanze citate nella diapositiva **306**

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \quad \mathbf{m} = -\frac{1}{2} MN_{Av} \frac{e^2 \overline{R_0^2}}{6m_e} \mathbf{B} \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = -\frac{1}{2} MN_{Av} \frac{e^2 \overline{R_0^2}}{6m_e} B^2$$

$$F_z = -MN_{Av} \frac{e^2 \overline{R_0^2}}{6m_e} B \frac{\partial B}{\partial z}$$

- Osserviamo che

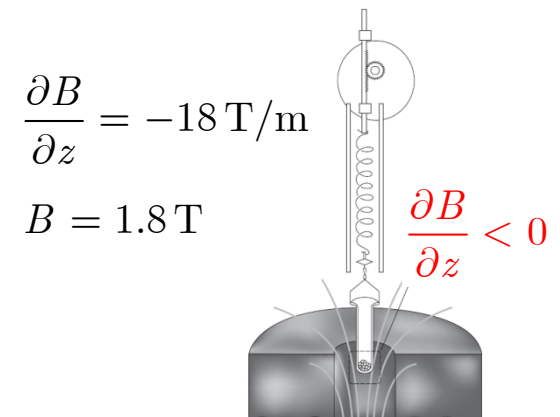
- La forza è proporzionale alla massa e a I^2
- Il gradiente del campo è negativo, la forza è diretta lungo il verso positivo dell'asse z
 - È una forza repulsiva

- Calcoliamo il modulo

$$F_z = \frac{10^3 \cdot 6.02 \cdot 10^{23} \cdot 1.6^2 \cdot 10^{-38} \cdot 0.53^2 \cdot 10^{-20} \cdot 1.8 \cdot 17}{6 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}}$$

$$F_z = \frac{6.02 \cdot 1.6^2 \cdot 0.53^2 \cdot 1.8 \cdot 17}{6 \cdot 9.1} 10^{-1} = \frac{132.4}{54.6} 10^{-1} = 0.24 \text{ N}$$

- Riproduce molto bene l'ordine di grandezza delle forze
 - Per valori più accurati occorre il valore esatto di R_0



$$R_0 = 0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$N_{Av} = 6.02 \times 10^{23}$$

$$m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ Kg}$$

$$M = 1 \text{ Kg}$$

Teoria di Langevin del diamagnetismo

- La teoria del diamagnetismo descritta è adottata in molti testi

- È adottata da Purcell ma non da Mazzoldi
- Mazzoldi presenta la teoria classica di Langevin basata sulla precessione del momento angolare L
- Il momento della forza sull'elettrone orbitante ne fa precessare il momento angolare

$$\vec{\omega}_L = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B}$$

- La rotazione aggiuntiva genera una corrente Δi

$$\Delta i = -ef_L = -e \frac{\omega_L}{2\pi}$$

- L'atomo acquista un momento magnetico aggiuntivo Δm

$$\Delta m = \Delta i \pi r^2 = e \frac{\omega_L}{2\pi} \pi r^2 = e \frac{1}{2} r^2 \frac{e}{2m_e} B$$

$$\Delta \mathbf{m} = -\frac{e^2 r^2}{4m_e} \mathbf{B}$$

- Osserviamo che in entrambi i casi si tratta di teorie qualitative che presentano anche una serie di inconsistenze di natura termodinamica
- Una teoria rigorosa richiede la meccanica quantistica

