
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

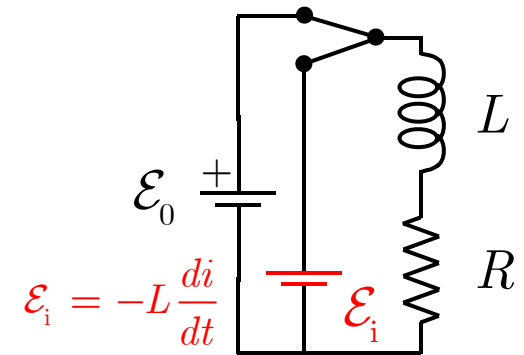
Lezione n. 31 - 18.04.2023

Energia magnetica
Energia potenziale magnetica
Induttanza come elemento di circuito
Oscillatore LC

Anno Accademico 2022/2023

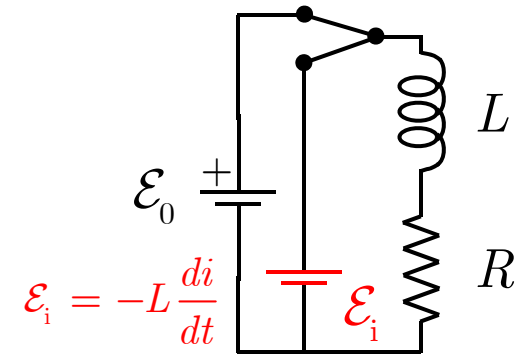
Energia del campo magnetico

- Nell'esempio precedente abbiamo supposto che il solenoide venisse "spento" lentamente
 - Si è "staccata" la batteria ma nello stesso istante si è chiuso il circuito su un altro ramo in modo che l'energia venisse dissipata nella resistenza
- Se invece il circuito venisse aperto di colpo la corrente dovrebbe passare a zero istantaneamente
 - Una discontinuità nella corrente genererebbe una fem infinita
 - In pratica si sviluppa una fem molto elevata che genera scariche elettriche



Energia del campo magnetico

- Nell'esempio precedente abbiamo supposto che il solenoide venisse "spento" lentamente
 - Si è "staccata" la batteria ma nello stesso istante si è chiuso il circuito su un altro ramo in modo che l'energia venisse dissipata nella resistenza
- Se invece il circuito venisse aperto di colpo la corrente dovrebbe passare a zero istantaneamente
 - Una discontinuità nelle corrente genererebbe una fem infinita
 - In pratica si sviluppa una fem molto elevata che genera scariche elettriche



Back "emf" in a
Large Solenoid

MIT Physics Lecture
Demonstration Group

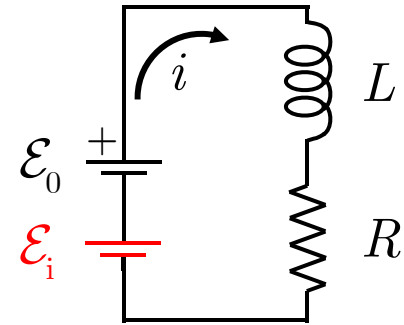


Energia Magnetica

- Abbiamo visto che in un circuito con induttanza e resistenza appare una forza elettromotrice

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_i = RI \quad \mathcal{E}_0 = -\mathcal{E}_i + RI \quad \mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

- Il lavoro che la batteria fa nell'intervallo di tempo dt per trasportare la carica $dq = Idt$ attraverso il circuito è



$$dW_b = \mathcal{E}_0 dq = \mathcal{E}_0 Idt = -\mathcal{E}_i Idt + RI^2 dt = Id\Phi + RI^2 dt$$

- Il lavoro della batteria viene quindi speso
 - Per modificare il campo magnetico: $Id\Phi$
 - Come dissipazione Joule nella resistenza: $RI^2 dt$
- Nel seguito trascuriamo l'effetto Joule ($R \approx 0$) $dW_b = Id\Phi$
- Supponiamo adesso di avere un sistema composto da più circuiti accoppiati (N)
- La formula precedente viene generalizzata in

$$dW_b = \sum_{k=1}^N I_k d\Phi_k$$

- La corrente del circuito k è I_k
- La variazione del flusso del circuito k è $d\Phi_k$

Energia Magnetica

$$dW_b = \sum_{k=1}^N I_k d\Phi_k$$

- Il lavoro dW_b fatto dalla batteria quando le correnti sono mantenute costanti, compensa le forze elettromotrici indotte generate da
 - Eventuali variazioni di flusso dovute a campi magnetici esterni
 - Eventuali variazioni di flusso dovute a spostamenti infinitesimi dei circuiti
- Deriviamo una formula che esprima il lavoro W_{ext} necessario per costruire un sistema composto da
 - N circuiti magnetici
 - Nel circuito k scorre la corrente FINALE I_k
 - Il circuito k è caratterizzato da un flusso FINALE Φ_k
- Durante la costruzione del sistema un agente esterno compie il lavoro W_{ext}
 - A esempio posizionando circuiti nei quali circolano correnti I_k
 - Ancora una volta devono compensare le forze elettromotrici che si manifestano in seguito alle variazioni di flusso
- Il lavoro W_{ext} speso per costruire il sistema costituisce l'energia U_M immagazzinata nel sistema magnetico: $W_{\text{ext}} = U_M$

Energia Magnetica

- Calcoliamo l'energia magnetica U_M immagazzinata in un sistema descritto da N correnti I_k e N flussi Φ_k
- L'energia è indipendente dal particolare modo con il quale si raggiunge la condizione finale
 - Partiamo dalla geometria finale, e passiamo dalla condizione iniziale (correnti nulle) alla condizione finale in cui le correnti sono I_k
- Scegliamo di farlo facendo cambiare tutte le correnti in modo proporzionale
 - In un dato istante tutte le correnti e tutti i flussi sono pari ad una frazione del loro valore finale: $I_k(\alpha) = \alpha I_k$ $d\Phi_k(\alpha) = \Phi_k d\alpha$

• Otteniamo

$$dU_M = \sum_{k=1}^N \alpha I_k d\Phi_k = \sum_{k=1}^N \alpha I_k \Phi_k d\alpha$$
$$U_M = \int_0^1 \sum_{k=1}^N \alpha I_k \Phi_k d\alpha = \sum_{k=1}^N I_k \Phi_k \int_0^1 \alpha d\alpha$$

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N I_k \Phi_k$$

- La relazione trovata è generale
- Vale anche in presenza di materiali magnetici purché lineari
- Osserviamo infine che $dW_b = 2dU_M$
 - Il lavoro fatto dalla batteria per mantenere costanti le correnti per variazioni $d\Phi_k$ è il doppio del lavoro necessario per costruire il sistema

Energia potenziale magnetica

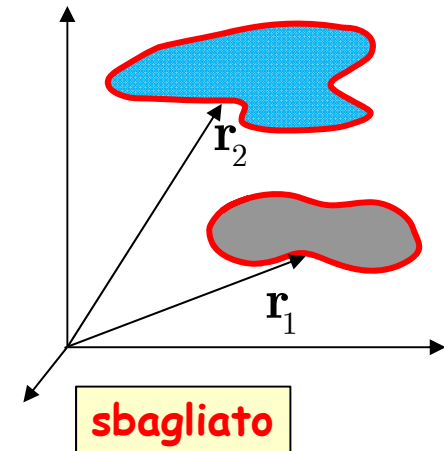
- L'energia magnetica U_M che abbiamo trattato finora è il lavoro che un agente esterno ha fatto per costruire un sistema magnetico

- È anche l'energia immagazzinata nel campo
- Tuttavia non è un'energia potenziale da cui si possono derivare le forze
- In particolare se U_M è una funzione che dipende dalle posizioni dei circuiti magnetici

$$U_M = U_M(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

- Non risulta vero che

$$\mathbf{F}_1 = -\nabla_1 U_M(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad \mathbf{F}_2 = -\nabla_2 U_M(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$



- Supponiamo di spostare la spira 2 di $d\mathbf{r}_2$ mantenendo costanti le correnti

- Sulla spira 2 agisce la forza $\mathbf{F}_2$ che compie un lavoro $dW = \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = -\mathbf{F}_{m2} \cdot d\mathbf{r}_2$
- La batteria compie un lavoro dW_b per mantenere costanti le correnti
- L'energia magnetica del sistema varia di una quantità dU_M

- Il bilancio energetico è

$$dW + dW_b = dU_M \quad dW = dU_M - dW_b = -dU_M \equiv dV_M$$

$dW_b = 2dU_M$

Energia potenziale magnetica

- In definitiva

$$-\mathbf{F}_{m2} \cdot d\mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_{e2} \cdot d\mathbf{r}_2 = dV_M \quad \mathbf{F}_m = -\nabla V_M$$

$$V_M = -U_M$$

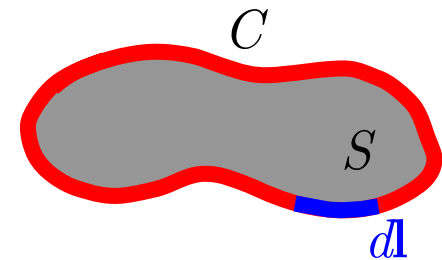
Energia del campo magnetico

- Abbiamo espresso l'energia immagazzinata in una spira di induttanza L nella quale circola una corrente I come

$$U_M = \frac{1}{2} L I^2$$

- Troviamo adesso un'espressione che esprima l'energia direttamente in funzione del campo magnetico B
- Iniziamo ancora dall'espressione del flusso $\Phi = LI$
- Dalla definizione di flusso

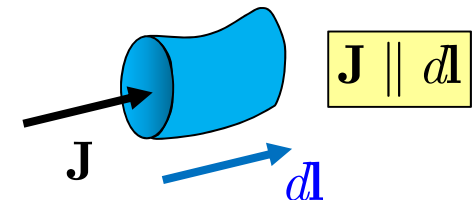
$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$



$$LI = \Phi = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

- Introduciamo nell'espressione dell'energia

$$U_M = \frac{1}{2} L I I = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$



- Consideriamo adesso un tratto del circuito C

$$I d\mathbf{l} = (\mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}) d\mathbf{l} = \mathbf{J} da dl \quad \longrightarrow \quad U_M = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} da dl$$

Energia del campo magnetico

$$U_M = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} d\mathbf{a} dl$$

- Osserviamo che $d\mathbf{a} dl = dV$
- Se $d\mathbf{a}$ è una sezione costante la circuitazione diventa un integrale di volume
- Se la sezione del circuito non è infinitesima si può ripetere il ragionamento considerando $I = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \rightarrow I = \int_A \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$
- In entrambi i casi otteniamo

$$U_M = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV$$

- L'integrale è esteso a tutto il volume del circuito ($\mathbf{J} \neq 0$)
- Si può generalizzare estendendo a tutto lo spazio
- Ricaviamo un'altra espressione importante
- Esprimiamo $\mathbf{J}$ in funzione di $\mathbf{B}$
- Usiamo l'equazione di Maxwell $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$
- Inseriamo nell'espressione dell'energia U_M

$$U_M = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) dV$$

Energia del campo magnetico

$$U_M = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) dV$$

- Utilizziamo la relazione (diapositiva **55**)

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$U_M = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dV - \frac{1}{2\mu_0} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) dV$$

- Nel secondo integrale utilizziamo il Teorema della divergenza

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) dV = \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}$$

- L'integrale è esteso a tutto lo spazio
- La superficie S può essere molto distante dal sistema
 - I campi $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ vanno a zero a grandi distanze pertanto l'integrale è nullo
- In definitiva otteniamo

$$U_M = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} dV$$

$$U_M = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV$$

Energia del campo magnetico

- Interpretiamo il risultato appena trovato

$$U_M = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV$$

- Al campo magnetico B è associata una densità di energia magnetica ρ_M

$$\rho_M = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

- L'energia totale è l'integrale di volume della densità di energia
- È interessante notare la stretta analogia con il caso elettrostatico

$$\rho_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \qquad W_E = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dV$$

- Sottolineiamo ancora una volta che non è stato fatto lavoro contro la forza magnetica
 - Il lavoro della forza magnetica è nullo
 - L'energia immagazzinata nel campo magnetico B deriva dal lavoro fatto contro la forza elettromotrice indotta che si oppone alle variazioni di flusso

Energia elettrica e magnetica

- Per finire interpretiamo anche un importante risultato intermedio (diap. 276)

$$U_M = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV \quad V_M = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{J} dV$$

- La seconda relazione è importante perché esprime l'energia potenziale magnetica in funzione del potenziale vettore
- È analoga alla corrispondente relazione elettrostatica che esprime l'energia potenziale elettrica in funzione del potenziale

$$V_E = \frac{1}{2} \int_V \phi \rho dV \quad V_{EM} = V_E + V_M = \frac{1}{2} \int_V \phi \rho dV - \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV$$

- I potenziali sono un quadrivettore $A^\mu = (\phi / c, A_x, A_y, A_z)$

- Anche le densità di carica e corrente $J^\mu = (c\rho, J_x, J_y, J_z)$

- La densità di energia potenziale di un campo elettromagnetico in interazione con particelle cariche può essere espresso in modo covariante

$$V_{EM} = V_E + V_M = \int_V \left(\frac{1}{2} \rho \phi - \frac{1}{2} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \right) dV = \frac{1}{2} \int J^\mu A_\mu dV$$

- Questa è la forma dell'interazione elettromagnetica nella Lagrangiana

Relazione fra auto e mutua induttanza

- Specializziamo al caso di circuiti accoppiati nei quali il flusso del circuito k è dovuto alle correnti di tutti i circuiti

$$\Phi_k = \sum_{l=1}^N \frac{\partial \Phi_k}{\partial I_l} I_l = \sum_{l=1}^N M_{kl} I_l \quad M_{kk} = L_k$$

- Sostituendo nella formula dell'energia

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^N M_{kl} I_k I_l$$

- Troviamo adesso una relazione fra L_1 , L_2 e $M_{12} = M$ nel caso di due circuiti accoppiati ($n = 2$, $M_{12} = M_{21} = M$)

$$U_M = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

- Il termine $M I_1 I_2$ può essere positivo o negativo
- Gli altri due termini sono sempre positivi
- U_M è positiva o nulla per qualunque valore di I_1 o I_2

- Posto $x = \frac{I_1}{I_2}$ l'energia diventa $U_M = \frac{1}{2} I_2^2 (L_1 x^2 + 2Mx + L_2)$

Relazione fra auto e mutua induttanza

- Deve essere $f = L_1 x^2 + 2Mx + L_2 \geq 0$
- Troviamo il minimo

$$\frac{d}{dx} (L_1 x^2 + 2Mx + L_2) = 2L_1 x + 2M = 0 \quad x = -\frac{M}{L_1}$$

$$\left. \frac{d^2}{dx^2} (L_1 x^2 + 2Mx + L_2) \right|_{x=-\frac{M}{L_1}} = 2L_1 > 0 \quad \text{è un minimo}$$

- Al minimo abbiamo

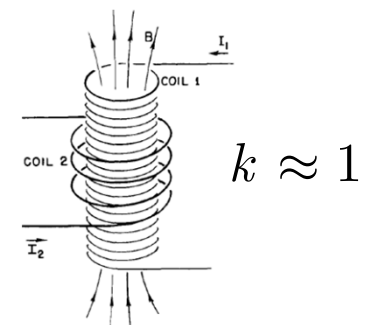
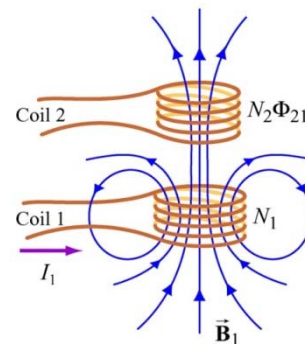
$$f = L_1 \frac{M^2}{L_1^2} - 2M \frac{M}{L_1} + L_2 = -\frac{M^2}{L_1} + L_2 \geq 0 \quad L_1 L_2 \geq M^2$$

- Concludiamo che la mutua induttanza è limitata superiormente $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$

- In generale si scrive $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ $0 \leq k$

- Il valore $k = 1$ si ha quando tutte le linee di campo della spira 1 attraversano anche la spira 1

$$k < 1$$

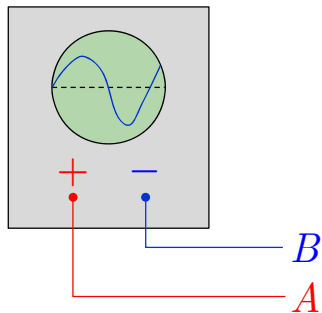


Non univocità del potenziale elettrico

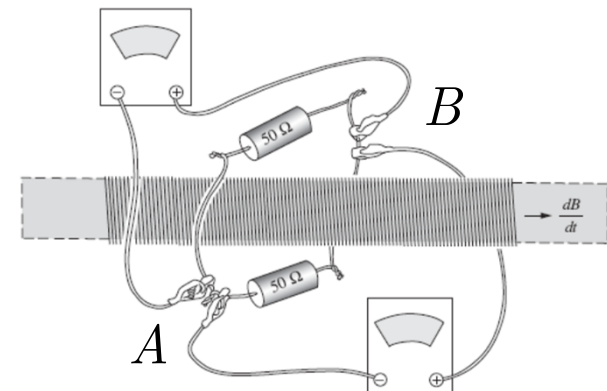
- In elettrodinamica il potenziale elettrico non è più univoco
 - In elettrostatico la differenza di potenziale era indipendente dal cammino

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \implies \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \implies \phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}_0) + \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

- In elettrodinamica il rotore di $\mathbf{E}$ non è più nullo
 - La differenza di potenziale adesso dipende dal cammino
- Cerchiamo di capire meglio con un esempio
 - a) preliminarmente una definizione
 - Uno strumento di misura (ad esempio un oscilloscopio) misura un segnale proporzionale all'integrale del campo elettrico esteso da A a B



$$V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$



- b) Problema: Considerando il sistema in figura cosa misurano i due strumenti ?

Non univocità del potenziale elettrico

- L'aspetto critico è che in questo caso $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

- I due strumenti misurano

- $V_1 = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ **cammino Γ_1**

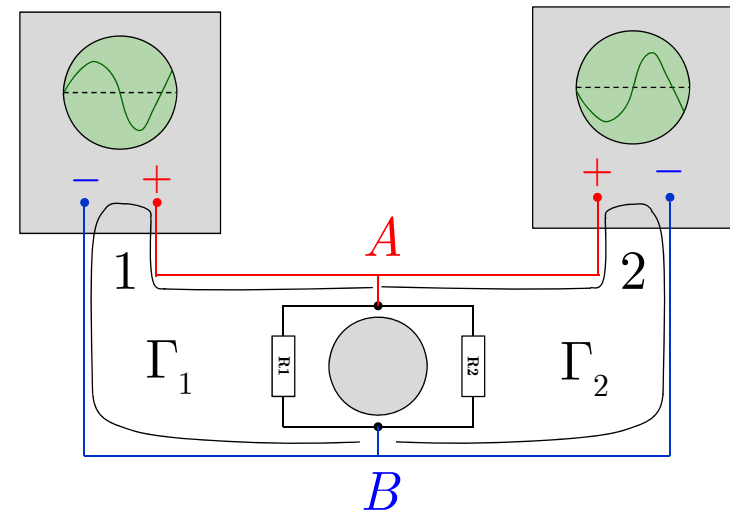
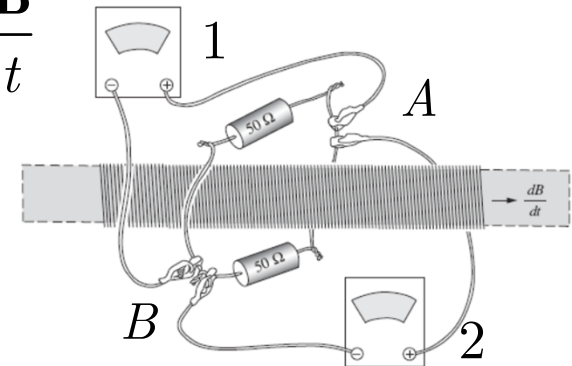
- $V_2 = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ **cammino Γ_2**

- Nel caso statico $V_1 = V_2$ $V_1 - V_2 = 0$

- Gli integrali sono indipendenti dal cammino

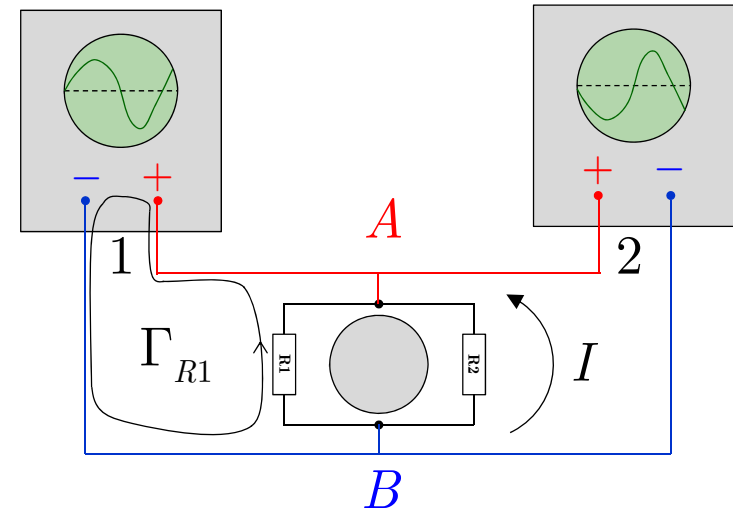
- Nel caso elettrodinamico abbiamo

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \int_{A-\Gamma_1}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \int_{A-\Gamma_2}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \int_{A-\Gamma_1}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{B-\Gamma_2}^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\Gamma_1-\Gamma_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \end{aligned}$$



Non univocità del potenziale elettrico

- Osserviamo che le differenze di potenziale ai capi delle resistenze R_1 e R_2 sono direttamente riconducibili a V_1 e V_2
- Infatti, la circuitazione lungo Γ_{R1} è nulla
- Otteniamo $V_1 = V_{R1}$ dove V_{R1} è misurata con terminale positivo A
- Analogamente $V_2 = V_{R2}$
- Infine, nella spira composta dalle due resistenze è indotta una forza elettromotrice $\mathcal{E}$ e scorre una corrente I



$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} = -\frac{1}{R_1 + R_2} \frac{d\Phi}{dt}$$

- Da cui infine

$$V_{R1} = \mathcal{E} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = -\frac{d\Phi}{dt} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$V_{R2} = -\mathcal{E} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = +\frac{d\Phi}{dt} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Non univocità del potenziale elettrico

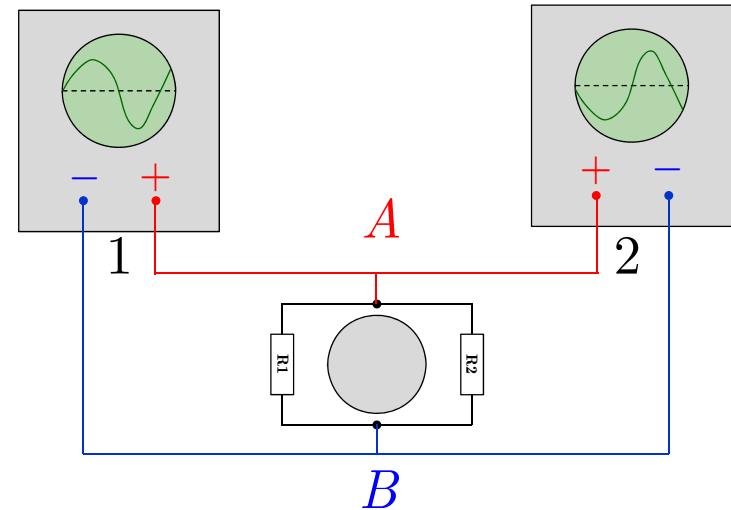
$$V_{R1} = \mathcal{E} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = -\frac{d\Phi}{dt} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$V_{R2} = -\mathcal{E} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = +\frac{d\Phi}{dt} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

- Specializziamo il risultato al caso $R_1 = R_2$

$$V_{R1} = -\frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dt} \qquad V_{R2} = +\frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dt} \qquad V_{R1} = -V_{R2}$$

- I due strumenti misurano tensioni di segno opposto !



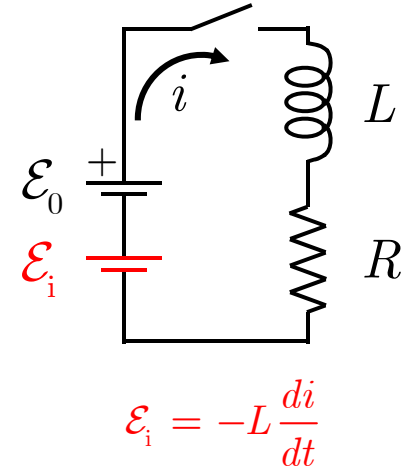
Induttanza come elemento di circuito

- Torniamo al circuito con il solenoide e la resistenza
- Utilizzando la legge di Faraday avevamo scritto l'equazione del circuito

$$\mathcal{E}_0 - L \frac{di}{dt} = Ri$$

- L'equazione può essere riscritta come

$$\mathcal{E}_0 = L \frac{di}{dt} + Ri$$



- In relazione al circuito l'equazione può essere interpretata dicendo che l'induttanza è un elemento di circuito con una data relazione $V-I$

$$L \quad v \updownarrow \text{inductor symbol} \downarrow i \quad v = L \frac{di}{dt}$$

$$C \quad v \updownarrow \text{capacitor symbol} \downarrow i \quad i = C \frac{dv}{dt}$$

- Ricordiamo l'analogia interpretazione del condensatore
- Si può applicare la teoria dei circuiti
 - Leggi di Kirchhoff, maglie, nodi

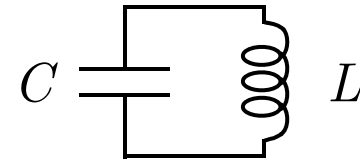
Circuito oscillante LC

- Consideriamo il circuito in figura

- Per il momento supponiamo che la resistenza dei conduttori sia trascurabile

- Supponiamo che al tempo $t = 0$ sulle armature del condensatore sia presente una carica $Q_{\max} = C v_{\max}$ e

che non circoli corrente nel circuito: $i(0) = 0$, $v(0) = v_{\max}$



$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

- La tensione ai capi dei due componenti è la stessa
- La corrente che circola nei due componenti ha lo stesso valore ma segno opposto $i_L = -i_C = i$ (ricordare la convenzione nella diapositiva precedente)
- Dalle relazioni $V-I$ otteniamo l'equazione del circuito

$$i_C = C \frac{dv}{dt} \quad v = L \frac{di_L}{dt} \quad \longrightarrow \quad i_C = LC \frac{d^2 i_L}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = -\omega_0^2 i$$

- La soluzione è immediata

$$i = A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

La condizione iniziale sulla corrente fissa la fase ϕ

$$i(0) = A \sin \phi = 0$$

$$\phi = 0$$

- Calcoliamo la tensione

$$v = L \frac{di}{dt} = L \omega_0 A \cos \omega_0 t$$

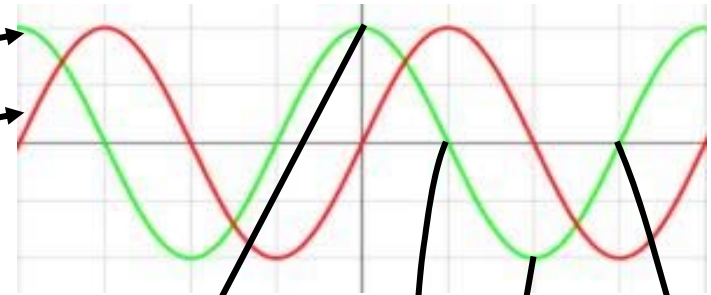
$$v(0) = v_{\max} = L \omega_0 A \quad A = \frac{v_{\max}}{L \omega_0} = \sqrt{\frac{C}{L}} v_{\max} = \frac{1}{\sqrt{LC}} C v_{\max} = Q_{\max} \omega_0 \equiv i_{\max}$$

Circuito oscillante LC

- Interpretiamo il risultato trovato

$$v = v_{\max} \cos \omega_0 t$$

$$i = i_{\max} \sin \omega_0 t$$



- Per $\omega_0 t = 0$ il condensatore ha la massima carica e non circola corrente

- C'è un campo elettrico nel condensatore
- Non c'è campo magnetico ($i = 0$)

- Per $\omega_0 t = \pi/2$ il condensatore è scarico

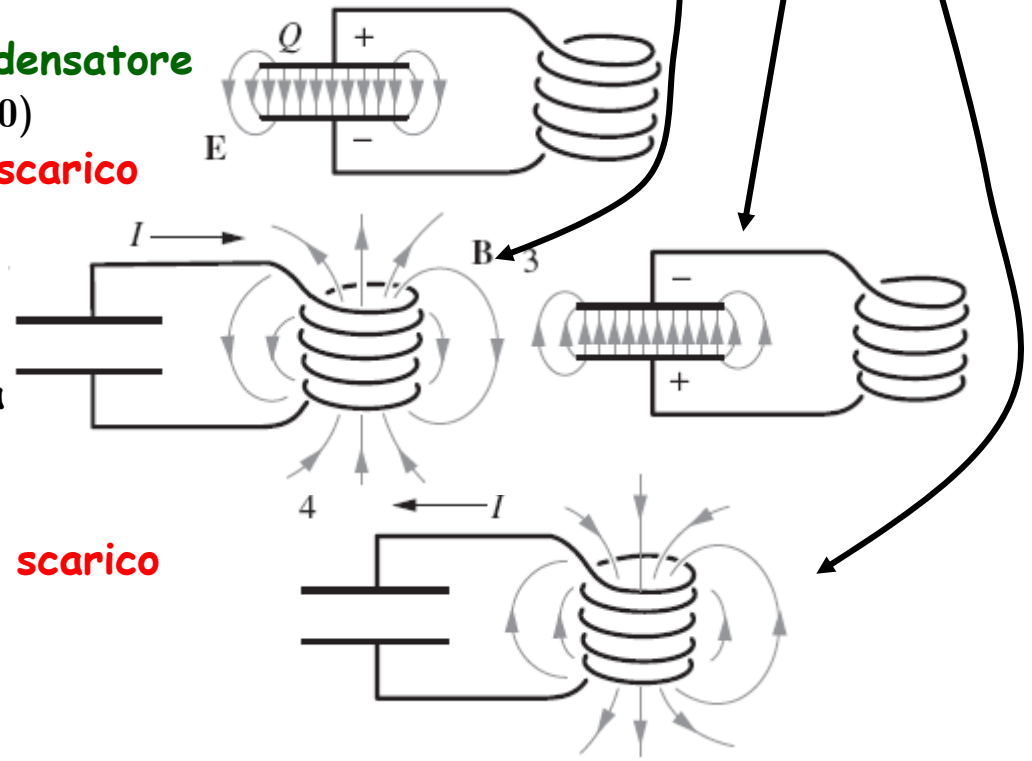
- Non c'è più campo elettrico
- Il campo magnetico è massimo

- Per $\omega_0 t = \pi$ la carica sul condensatore è di nuovo massima

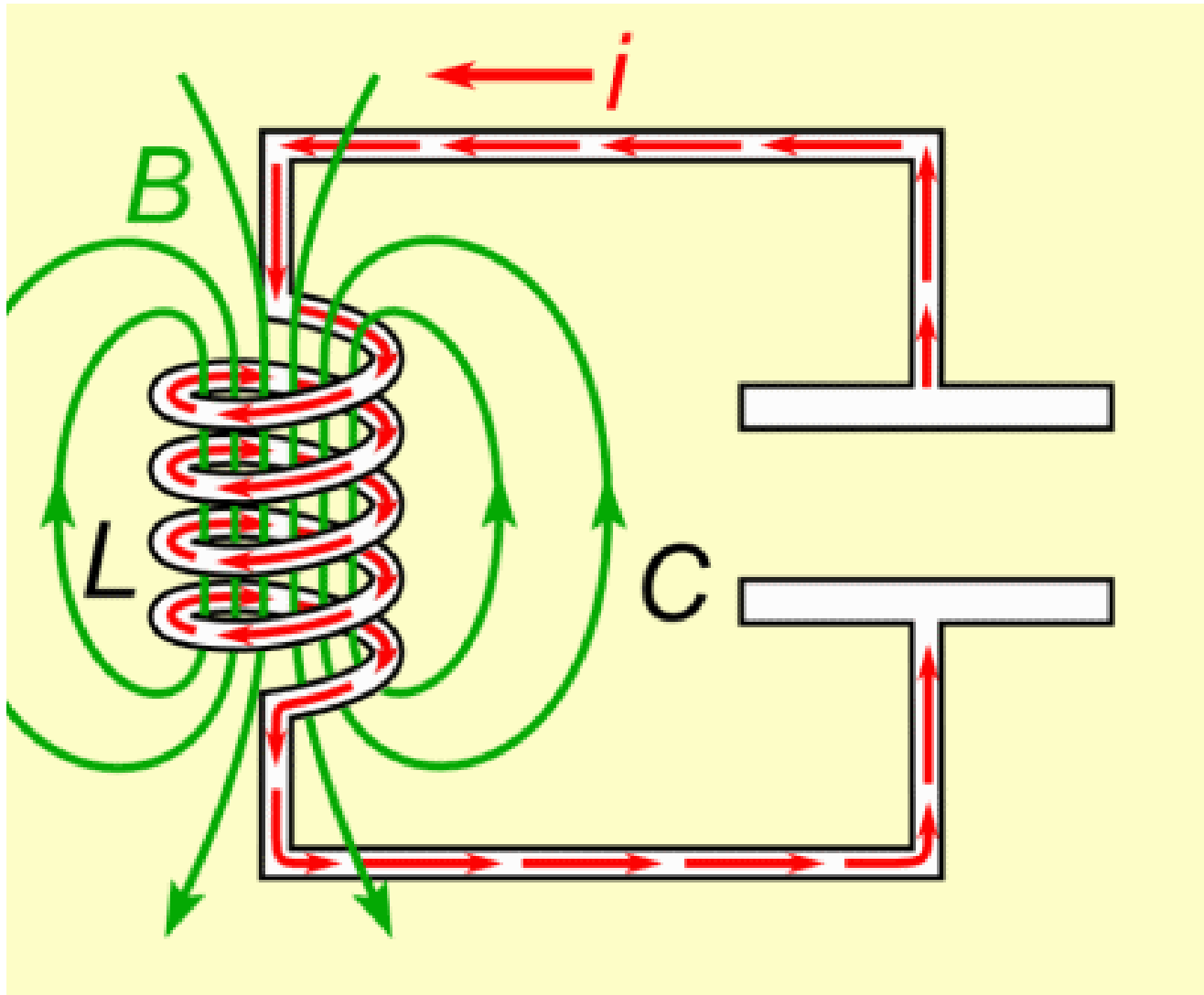
- Il campo E ha cambiato segno
- $B = 0$

- Per $\omega_0 t = 3\pi/2$ il condensatore è scarico

- Il campo B ha cambiato segno
- $E = 0$



Circuito oscillante LC



Circuito oscillante LC

$$v = v_{\max} \cos \omega_0 t \qquad i = i_{\max} \sin \omega_0 t = \sqrt{\frac{C}{L}} v_{\max} \sin \omega_0 t$$

- L'oscillazione del circuito *LC* consiste pertanto nella continua trasformazione dell'energia del sistema
- L'energia del campo elettrico

$$U_E = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{1}{2} C v_{\max}^2 \cos^2 \omega_0 t$$

- L'energia del campo magnetico

$$U_M = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L \left(\sqrt{\frac{C}{L}} v_{\max} \right)^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} L \frac{C}{L} v_{\max}^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$U_M = \frac{1}{2} C v_{\max}^2 \sin^2 \omega_0 t$$

- Naturalmente l'energia totale è costante

$$U_M + U_E = \frac{1}{2} C v_{\max}^2 (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) = \frac{1}{2} C v_{\max}^2$$

Circuito oscillante LC

- L'oscillazione che abbiamo osservato si basa sulla presenza di carica elettrica
 - Il campo elettrico nel condensatore è di natura quasi-statica (elettrostatica)
 - È generato dalle cariche elettriche (sorgenti)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Il campo magnetico è di natura quasi-statica (magnetostatica)
 - È generato dalla corrente (sorgente, cariche in movimento)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

- In linea di principio il campo elettrico potrebbe essere generato per induzione

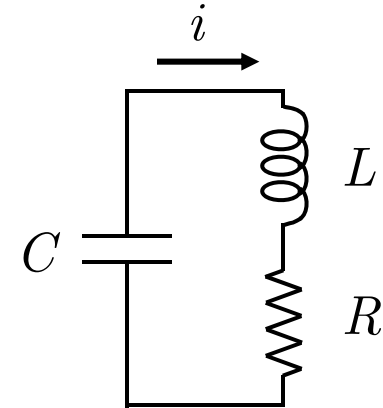
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Stiamo assumendo che le variazioni di $\mathbf{B}$ non sono importanti rispetto a ρ
- Per quello che abbiamo visto fino ad ora il campo magnetico può essere generato solo da una corrente
 - Sembra che non ci sia modo di prescindere dalla carica elettrica
- In realtà le modifiche all'ultima equazione di Maxwell permetteranno un campo magnetico generato dalle variazioni del campo elettrico
 - Si possono generare campi senza sorgenti (ρ o $\mathbf{J}$)
 - Sono le onde elettromagnetiche

Circuito oscillante RLC

- Introduciamo adesso una resistenza nel circuito
- Le relazioni $V-I$ per i tre componenti sono

$$i = -C \frac{dV_C}{dt} \quad V_L = L \frac{di}{dt} \quad V_R = Ri$$



- Naturalmente $V_C = V_L + V_R$
- Sostituiamo la prima equazione nelle altre due

$$V_L = L \frac{d}{dt} \left(-C \frac{dV_C}{dt} \right) = -LC \frac{d^2V_C}{dt^2} \quad V_R = R \left(-C \frac{dV_C}{dt} \right) = -RC \frac{dV_C}{dt}$$

- Combinando le relazioni

$$V_C = V_L + V_R \quad \longrightarrow \quad V_C = -LC \frac{d^2V_C}{dt^2} - RC \frac{dV_C}{dt}$$

$$LC \frac{d^2V_C}{dt^2} + RC \frac{dV_C}{dt} + V_C = 0 \quad \frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC} V_C = 0$$

- Abbiamo ottenuto l'equazione del circuito
- Un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti



Circuito oscillante RLC

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{LC} V_C = 0$$

- Si può dimostrare che una soluzione dell'equazione è della forma

$$V_C(t) = Ae^{\alpha t} \cos(\omega t)$$

- Calcoliamo le derivate

$$\frac{dV_C}{dt} = Ae^{-\alpha t} (-\alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t)$$

$$\frac{d^2V_C}{dt^2} = Ae^{-\alpha t} [(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha\omega \sin \omega t]$$

- Introduciamo nell'equazione

- Il fattore $Ae^{-\alpha t}$ è comune a tutti i termini

$$Ae^{-\alpha t} \left[(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha\omega \sin \omega t - \frac{R}{L} (\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t) + \frac{1}{LC} \cos \omega t \right] = 0$$

- L'equazione può essere soddisfatta solo se i coefficienti di $\sin \omega t$ e $\cos \omega t$ sono separatamente nulli

Circuito oscillante RLC

$$Ae^{-\alpha t} \left[(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha\omega \sin \omega t - \frac{R}{L} (\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t) + \frac{1}{LC} \cos \omega t \right] = 0$$

- Otteniamo pertanto

$$2\alpha\omega - \frac{R}{L}\omega = 0 \quad \longrightarrow \quad \alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\alpha^2 - \omega^2 - \frac{R}{L}\alpha + \frac{1}{LC} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{R^2}{4L^2} - \omega^2 - \frac{R^2}{2L^2} + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$

- Assumiamo che la soluzione sia oscillante, vale a dire ω reale
- Abbiamo pertanto la condizione

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$$

- Osserviamo infine che nel caso $R = 0$ avevamo definito $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$
- Pertanto la presenza della resistenza modifica la frequenza dell'oscillazione

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}$$



Circuito oscillante RLC

- Nel caso generale bisogna considerare anche un'altra soluzione

$$V_C(t) = Be^{\alpha t} \sin(\omega t)$$

- Le due soluzioni possono essere unificate introducendo una fase

$$V_C(t) = Ae^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi)$$

- Le costanti A e ϕ si determinano a tramite le condizioni iniziali
 - Non è particolarmente interessante
 - Qualitativamente la tensione oscilla con una ampiezza che diminuisce nel tempo

