
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

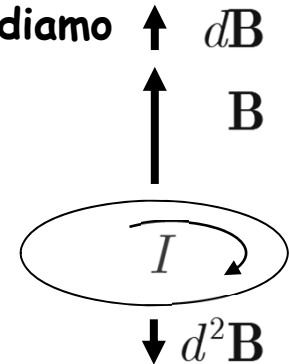
Lezione n. 30 - 13.04.2023

Legge di Lenz
Campo elettrico indotto
Applicazioni della legge di Faraday
Induttanza e mutua induttanza
Energia Magnetica

Anno Accademico 2022/2023

Legge di Lenz

- Il segno meno nella legge di Faraday non è solo il frutto di una convenzione
 - Ha un significato fisico molto importante che adesso approfondiamo
- Consideriamo una spira in una regione con un campo magnetico con flusso $\Phi = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$
- Supponiamo che ci sia una variazione del campo $d\mathbf{B}$
 - Il flusso varia e viene indotta una forza elettromotrice
 - La forza elettromotrice genera una corrente che a sua volta genera un ulteriore campo magnetico
 - Questo ulteriore campo magnetico contribuisce anch'esso al flusso
 - Pertanto il flusso varia ancora e genera un'altra forza elettromotrice
- La fisica del fenomeno si sintetizza dicendo che non può succedere che la seconda forza elettromotrice abbia lo stesso segno della prima
 - Si innescerebbe un processo a valanga che violerebbe la conservazione dell'energia
- Il segno meno della legge di Faraday impedisce che questo succeda



$$dB > 0 \implies d\Phi > 0 \implies \mathcal{E} < 0 \implies I < 0 \implies d^2B < 0$$

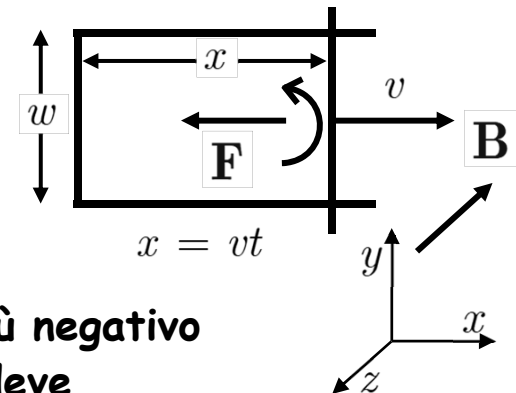
Legge di Lenz

Il segno della forza elettromotrice indotta è tale che la corrente indotta genera un campo magnetico che si oppone alla variazione di flusso

Legge di Lenz

- Riprendiamo in considerazione il sistema della barretta che abbiamo analizzato nella diapositiva 230 e seguenti
- Ricordiamo che il campo magnetico "entra" nel piano
- Seguendo le convenzioni il flusso è negativo e vale

$$\Phi = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = -Bwvt$$



- Con il passare del tempo il flusso diventa sempre più negativo
- Per la legge di Lenz la forza elettromotrice indotta deve generare un flusso aggiuntivo che si oppone alla variazione di flusso
 - Un flusso positivo dovuto ad una corrente indotta che circola in senso antiorario
- Una corrente diretta dal basso verso l'alto, nel senso positivo delle y , nella barretta subisce una forza di Lorentz $\mathbf{F}$ diretta nel senso negativo delle x
 - Si oppone alla velocità v e tende a rallentare la barretta
- Se il segno della legge di Lenz fosse opposto la forza $\mathbf{F}$ accelererebbe la barretta
 - Una volta messa in moto la velocità aumenterebbe indefinitamente
 - La conservazione dell'energia sarebbe violata

Il campo elettrico indotto

- Quando il campo magnetico varia nel tempo viene indotto un campo elettrico
 - Il campo elettrico indotto obbedisce all'equazione di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Osserviamo che questa relazione vale anche se non ci sono cariche elettriche che generano il campo
- Se non ci sono cariche elettriche allora si ha anche

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

- Ci troviamo pertanto in presenza di un campo con rotore e divergenza definiti
 - Per il teorema di Helmholtz, assumendo che $E \rightarrow 0$ per $r \rightarrow \infty$ il campo ha una forma completamente definita
 - Osserviamo che obbedisce a equazioni formalmente identiche a quelle di un campo magnetico con la sostituzione

$$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{E} \quad \mu_0 \mathbf{J} \rightarrow -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- In alcuni casi possiamo trovare il campo elettrico indotto con i metodi già utilizzati per trovare il campo magnetico (simmetria e legge di Ampère)

Il campo elettrico indotto

- Consideriamo ad esempio il caso di una regione limitata dello spazio in cui sia presente un campo magnetico uniforme ma dipendente dal tempo
- Supponiamo che il campo sia presente solo all'interno della regione circolare (cilindrica) indicata in figura
 - Ad esempio un lungo solenoide di raggio a
- Poiché $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ le linee del campo $\mathbf{E}$ sono chiuse come quelle di un campo magnetico
- Il problema ha simmetria cilindrica e quindi le linee di campo sono circonferenze concentriche all'asse del solenoide
- Possiamo usare la "legge di Ampère"

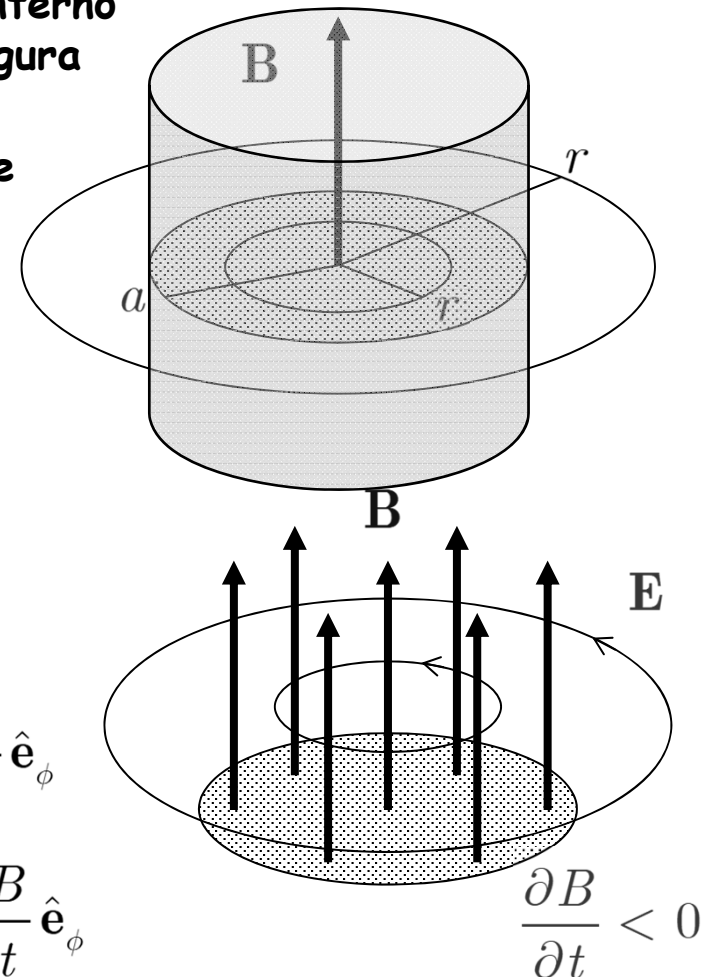
$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_S -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

- Calcoliamo il campo ad un raggio $r < a$

$$E(r) 2\pi r = -\pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} \quad \mathbf{E}(r) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t} \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

- Per $r > a$

$$E(r) 2\pi r = -\pi a^2 \frac{\partial B}{\partial t} \quad \mathbf{E}(r) = -\frac{a^2}{2r} \frac{\partial B}{\partial t} \hat{\mathbf{e}}_\phi$$



Apparente paradosso: momento angolare

- Consideriamo ancora il sistema dell'esempio precedente

- Un solenoide di raggio a , un campo magnetico B

- Consideriamo adesso un anello di carica di raggio b

- L'anello ha una densità lineare di carica λ

- Supponiamo adesso che il solenoide venga "spento" e che il campo B ritorni a zero

- Abbiamo visto che la variazione nel tempo di B genera un campo elettrico

- La forza su un elemento di carica $dq = \lambda dl$ è

$$dF = dqE = \lambda b d\phi E$$

- Il momento della forza è (verso l'alto per $dB < 0$)

$$d\tau = b dF = b\lambda b d\phi E \quad \tau = 2\pi b^2 \lambda E(b)$$

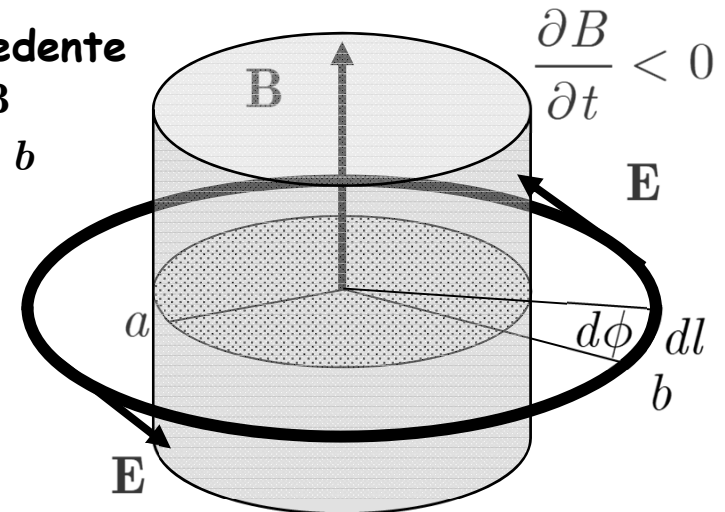
- La variazione del momento angolare è

$$dL = \tau dt = -\pi a^2 b \lambda dB \quad \Delta L = -\pi a^2 b \lambda \int_B^0 dB = \pi a^2 b \lambda B$$

- L'anello comincia a ruotare; ha acquistato momento angolare ΔL

- Da dove ha guadagnato momento angolare?

- NB: fuori dal solenoide (molto lungo) B è sempre nullo

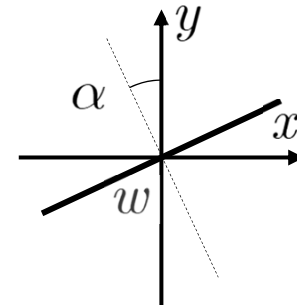
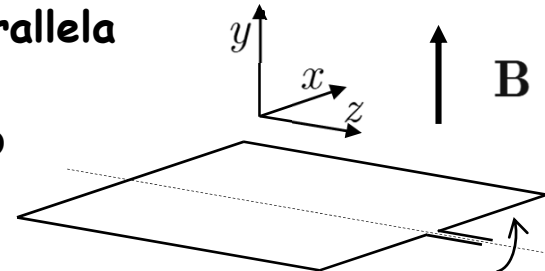


$$\mathbf{E}(r) = -\frac{a^2}{2r} \frac{\partial B}{\partial t} \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

$$\tau = -\pi a^2 b \lambda \frac{\partial B}{\partial t}$$

Applicazione: Generatore di corrente AC

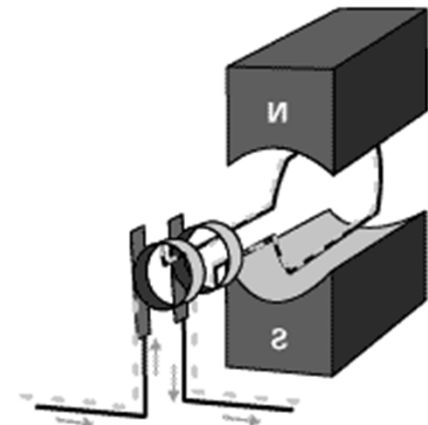
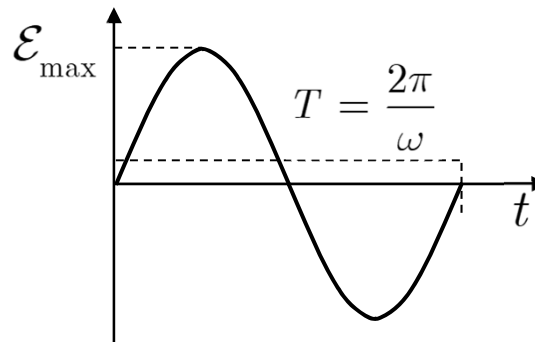
- Supponiamo di avere una spira quadrata di lato w parallela al piano $x-z$ che può ruotare intorno all'asse z
- La spira è in una regione dove è presente un campo di induzione magnetica B uniforme diretto lungo y
- Osserviamo la proiezione della spira sul piano $x-y$
 - Al tempo t la normale alla spira forma un angolo $\alpha(t) = \omega t$ con la direzione del campo magnetico
 - Il flusso attraverso la spira è
$$\Phi(t) = Bw^2 \cos \alpha(t) = Bw^2 \cos \omega t$$
- Poiché il flusso varia nel tempo, nella spira compare una forza elettromotrice indotta



$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = Bw^2\omega \sin \omega t = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega t$$

- Se la spira è collegata ad una resistenza R

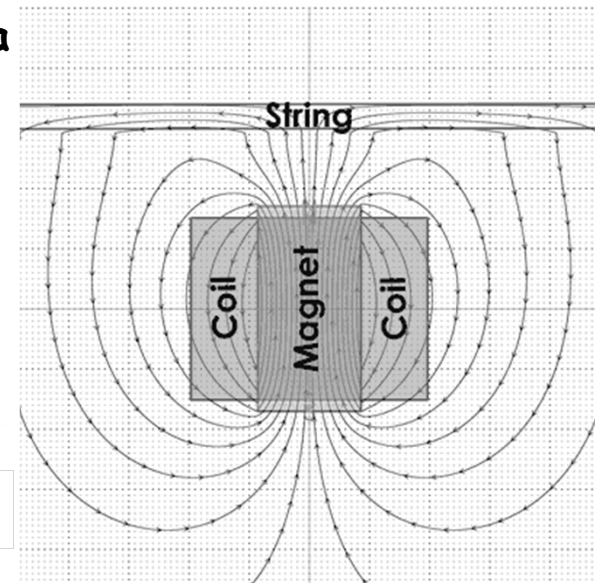
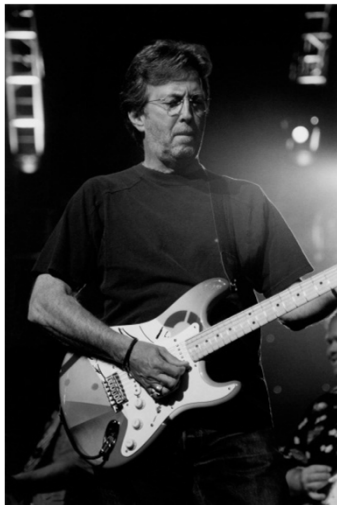
$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{\mathcal{E}_{\max}^2}{R} \sin^2 \omega t$$



Applicazione: Pick-up chitarra elettrica

- La potenza dissipata nella resistenza è
- Per mantenere in rotazione la spira occorre fornire una potenza equivalente
- Un'altra applicazione dell'induzione sono i trasduttori elettromeccanici
 - Trasformano vibrazioni meccaniche in impulsi elettrici
 - Microfono, pick-up chitarra elettrica
- Le corde sono di materiale ferromagnetico
 - "Catturano" il campo di induzione magnetica (lo vedremo)
 - Deformano il campo del magnete permanente
 - Generano una variazione di flusso nella bobina

$$P = \mathcal{E}I = \frac{\mathcal{E}_{\max}^2}{R} \sin^2 \omega t$$



Auto-Induttanza

- Consideriamo una spira percorsa da una corrente I
- La spira genera un campo magnetico B
- Per la legge di Biot e Savart, (vedi diapositiva 42)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}$$

- Notiamo che il campo magnetico dipende linearmente dalla corrente
- Il flusso di B attraverso la spira è dato da

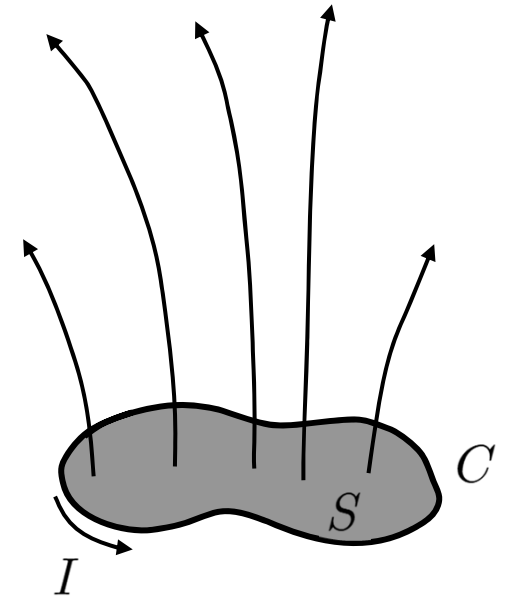
$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

- Sostituiamo l'espressione di B data dalla formula di Biot e Savart
- Di solito l'integrale è difficile da calcolare
- Tuttavia dice una cosa semplice e importante
- Il flusso è proporzionale alla corrente

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} \right] \cdot d\mathbf{a}$$

$$\Phi = LI$$

- L è l'auto-induttanza della spira
- L'unità di misura è l'Henry



$$\Phi = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \left[\frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} \right] \cdot d\mathbf{a}$$

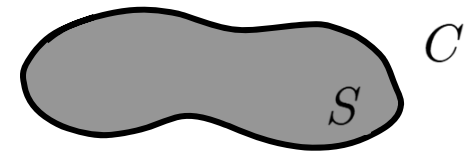
Auto-Induttanza

- La formula per l'auto-induttanza può essere messa in una forma più semplice
 - Partiamo dalla definizione di flusso

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \Phi = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a}$$

- Utilizziamo il Teorema di Stokes

$$\Phi = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$



- Utilizziamo l'espressione per il potenziale vettore (diapositiva 93)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

- Introducendo nell'espressione per il flusso

$$\Phi = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \oint_C \frac{d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \oint_C \frac{d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Formula di Neumann

- L'espressione trovata per L è più semplice
 - È comunque un integrale complicato
 - Diverge per un filo con raggio tendente a zero
 - Serve un modello della ripartizione della corrente su un filo di raggio finito

Mutua induttanza

- Consideriamo adesso un sistema composto da due spire
 - La spira 1 del caso precedente
 - Percorsa da una corrente I_1 genera un campo B_1
 - Una spira 2, posta in una posizione fissata rispetto alla spira 1
 - Naturalmente il campo magnetico B_1 ha anche un flusso concatenato alla spira 2

$$\Phi_2 = \int_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{a} = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{a}$$

- Ricordiamo la formula del potenziale vettore

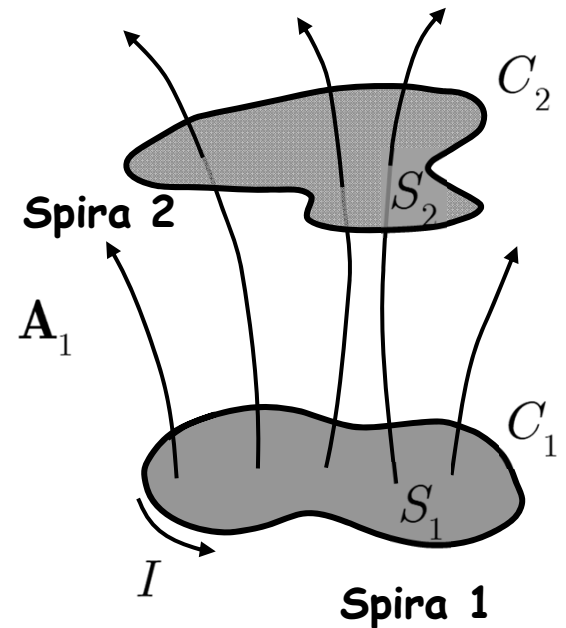
$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}$$

- Usiamo ancora una volta il Teorema di Stokes

$$\Phi_2 = \oint_{C_2} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

- Il flusso nella spira 2 dipende dalla corrente I_1

$$\Phi_2 = M_{21} I_1$$



$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

Formula di Neumann per la Mutua Induttanza

Mutua induttanza

- Se consideriamo adesso una corrente I_2 che circola nella spira 2 troviamo delle espressioni analoghe

$$\Phi_2 = L_2 I_2 \quad \Phi_1 = M_{12} I_2 \quad M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{l}_2 \cdot d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = M_{21}$$

- Le relazioni trovate insieme alle precedenti ci permettono di scrivere il sistema di relazioni

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= M_{11} I_1 + M_{12} I_2 & L_1 &\equiv M_{11} \\ \Phi_2 &= M_{21} I_1 + M_{22} I_2 & L_2 &\equiv M_{22} \end{aligned}$$

• L_1, L_2	Autoinduttanza
• M_{12}, M_{21}	Mutua induttanza

- L'uguaglianza $M_{12} = M_{21}$ esprime una simmetria non evidente a prima vista
- Il flusso che una corrente I_1 induce nella spira 2 è uguale al flusso che una corrente I_2 induce nella spira 1

$$\frac{\Phi_{12}}{I_2} = \frac{\Phi_{21}}{I_1}$$

- Il flusso Φ_{ij} indica il flusso nella spira i dovuto alla corrente j
- Le relazioni trovate possono essere estese ad un sistema di N spire

Forze elettromotrici indotte

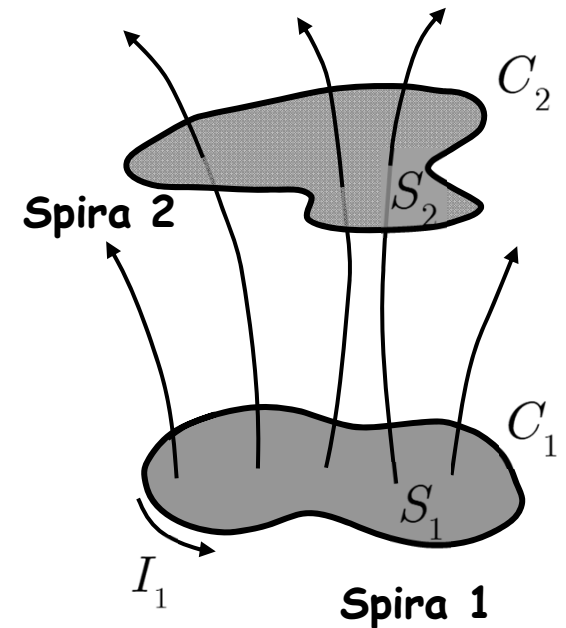
- Supponiamo adesso di variare la corrente I_1 che circola nella spira 1
- Il flusso concatenato con la spira 2 varia
- Appare una forza elettromotrice indotta

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}$$

- Abbiamo pertanto indotto una forza elettromotrice nella spira 2 agendo sulla spira 1
 - La forza elettromotrice $\mathcal{E}_{21}$ genera una corrente nella spira 2
 - Non ci sono collegamenti elettrici diretti
- La variazione di corrente I_1 genera una variazione di flusso anche nella spira 1 stessa
 - Anche nella spira 1 compare una forza elettromotrice

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L \frac{dI_1}{dt}$$

- Può risultare difficile dedurre i versi delle correnti indotte
 - Spesso è più conveniente utilizzare la legge di Lenz



$$\Phi_1 = M_{11}I_1 + M_{12}I_2$$

$$\Phi_2 = M_{21}I_1 + M_{22}I_2$$

Esempio di calcolo mutua induttanza

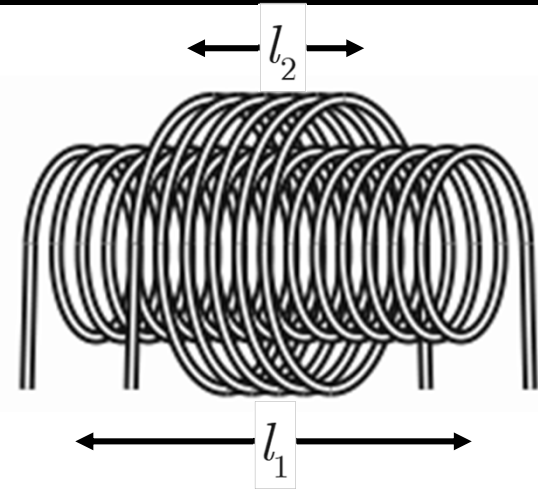
- Consideriamo due solenoidi coassiali
 - Solenoide 1 di raggio a , n_1 spire e lunghezza l_1
 - Solenoide 2 di raggio b , n_2 spire e lunghezza l_2
- Calcoliamo la mutua induttanza nell'ipotesi il solenoide più interno sia molto lungo
 - In questa approssimazione il campo magnetico nel solenoide più interno è diretto lungo l'asse ed è uniforme
 - Se nel solenoide interno circola una corrente I il campo magnetico è

$$B = \mu_0 \frac{n_1}{l_1} I_1$$

- Il flusso concatenato con il solenoide esterno è
 - Otteniamo infine

$$\Phi_2 = \mu_0 \frac{n_1 n_2}{l_1} \pi a^2 I_1 \quad M_{21} = M_{12} = \mu_0 \frac{n_1 n_2}{l_1} \pi a^2$$

- Osserviamo che se avessimo fatto il calcolo inverso le cose sarebbero state molto più complicate
 - Il solenoide l_2 non è lungo; il suo campo non è uniforme
 - Il risultato del calcolo sarebbe lo stesso perché $M_{21} = M_{12}$



una spira

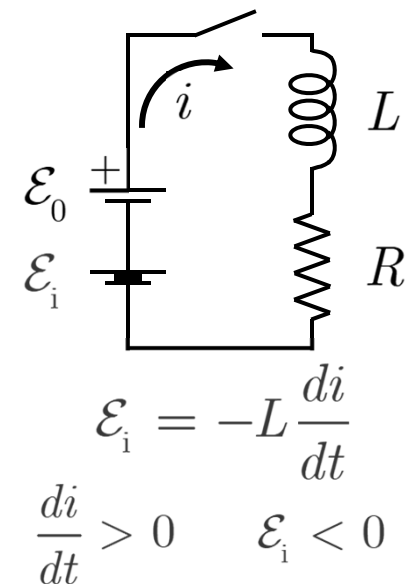
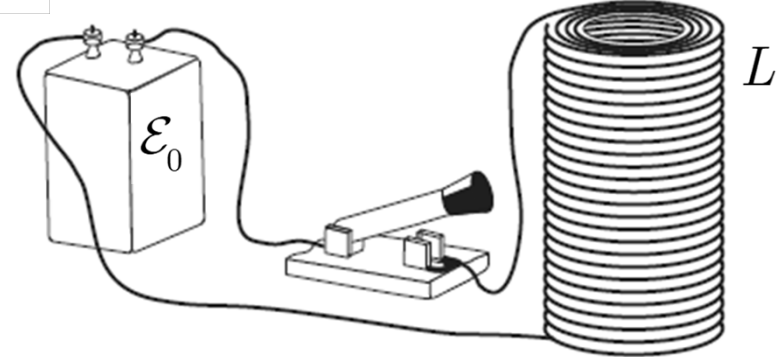
$$B\pi a^2$$

n_2 spire

$$n_2 B\pi a^2$$

Circuiti con induttanze

- Consideriamo un solenoide di induttanza L collegato ad una batteria con fem $\mathcal{E}_0$
- Il conduttore dell'avvolgimento ha una resistenza complessiva R
- Da un punto di vista elettrico il solenoide è schematizzato come una resistenza e un'induttanza in serie
 - Benché si tratti di caratteristiche distribuite è adeguato rappresentarle concentrate (lumped)
- Quando l'interruttore viene chiuso comincia a circolare una corrente $i(t)$
 - La corrente nella resistenza provoca una caduta Ri
 - La corrente nel solenoide genera un campo magnetico
 - Il flusso $\Phi(t) = Li(t)$ concatenato varia
 - Compare una forza elettromotrice indotta $\mathcal{E}_i$ che si oppone alla variazione di flusso
 - La forza elettromotrice indotta genera una corrente che riduce $i(t)$
- In sintesi le equazioni sono

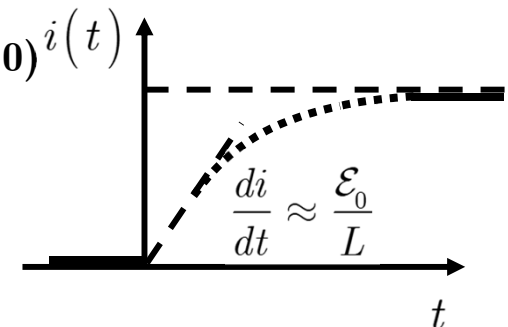
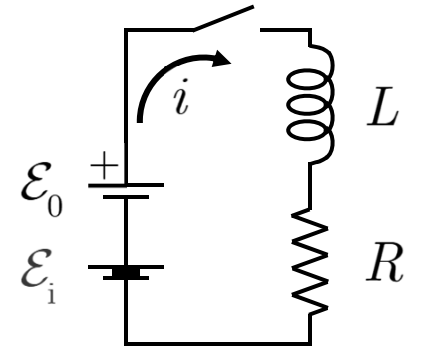


$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_i = Ri \quad \mathcal{E}_0 - L \frac{di}{dt} = Ri$$

Circuiti con induttanze

- Prima di risolvere matematicamente il problema cerchiamo di capire la fisica
- Prima della chiusura dell'interruttore, ovviamente, la corrente è nulla
- Per tempi molto grandi il circuito avrà raggiunto una condizione stazionaria
 - Nel solenoide circolerà una corrente costante
 - Non ci sono più forze elettromotrici indotte ($di/dt \sim 0$)
 - Il solenoide genera un campo magnetico
 - La corrente è data da

$$i_{\infty} \rightarrow \frac{\mathcal{E}_0}{R}$$



- Subito dopo la chiusura la corrente deve essere circa zero
- Se avesse una variazione discontinua la fem indotta sarebbe infinita
- La caduta di tensione sulla resistenza è trascurabile $Ri \sim 0$

$$\mathcal{E}_0 - L \frac{di}{dt} = \cancel{Ri} \quad \longrightarrow \quad L \frac{di}{dt} \approx \mathcal{E}_0 \quad \frac{di}{dt} \approx \frac{\mathcal{E}_0}{L}$$

- La fem indotta ha modulo circa uguale a $\mathcal{E}_0$ e limita a zero la corrente
- L'induttanza limita la massima velocità di crescita della corrente

Circuiti con induttanze

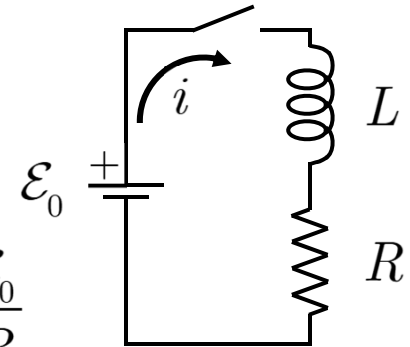
- Veniamo adesso alla soluzione dell'equazione differenziale

$$\mathcal{E}_0 - L \frac{di}{dt} = Ri$$

- Facciamo la sostituzione

$$I = i - \frac{\mathcal{E}_0}{R} \quad \frac{di}{dt} = \frac{dI}{dt}$$

$$\mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt} = RI + R \frac{\mathcal{E}_0}{R}$$



$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L} I \quad \text{definiamo} \quad \tau = \frac{L}{R} \quad \text{otteniamo} \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{1}{\tau} I$$

- La soluzione per $t > 0$ è

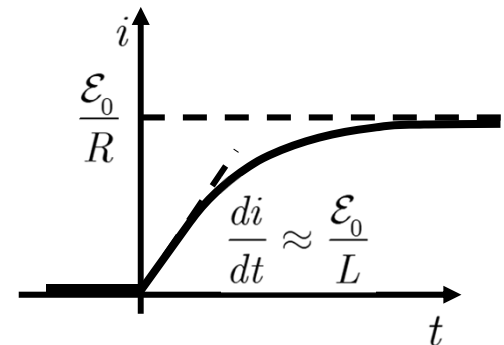
$$I(t) = Ae^{-t/\tau}$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + Ae^{-t/\tau}$$

- La condizione iniziale $i(0) = 0$ dà

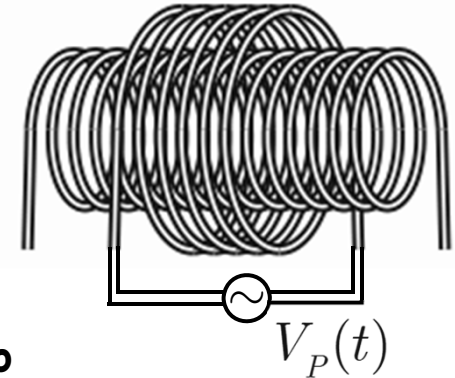
$$A = -\frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$



Trasformatore

- Consideriamo due solenoidi coassiali con n_1 e n_2 spire rispettivamente
 - I raggi dei due solenoidi sono uguali
 - Supponiamo inoltre che siano molto lunghi
 - Il campo di induzione magnetica B è contenuto completamente all'interno dei solenoidi
- Colleghiamo un generatore di forza elettromotrice $V_P(t)$ variabile nel tempo al solenoide 1 (che ha n_1 spire)
 - Circola una corrente e viene generato un campo magnetico
 - Il flusso concatenato è $\Phi_1 = n_1 \Phi$ (Φ è il flusso attraverso una spira)
- Naturalmente il flusso concatenato al secondo solenoide è $\Phi_2 = n_2 \Phi$
 - Nei solenoidi vengono indotte le forze elettromotrici $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$

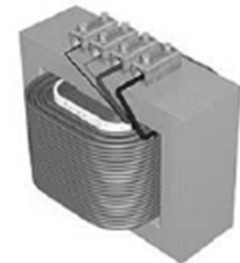
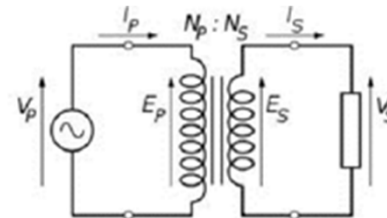


$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -n_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad \mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -n_2 \frac{d\Phi}{dt} \quad \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{-n_2 \frac{d\Phi}{dt}}{-n_1 \frac{d\Phi}{dt}} = \frac{n_2}{n_1}$$

- Se la resistenza dei solenoidi è piccola (vedi diapositiva [261](#))

$$\mathcal{E}_1 \approx V_P(t) \quad V_S(t) = \mathcal{E}_2 = \frac{n_2}{n_1} V_P(t)$$

- Il simbolo del trasformatore nei circuiti è



Energia del campo magnetico

- Abbiamo trovato l'equazione che descrive l'andamento temporale della corrente $i(t)$ in un circuito R - L

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

- La batteria eroga una potenza P_ε

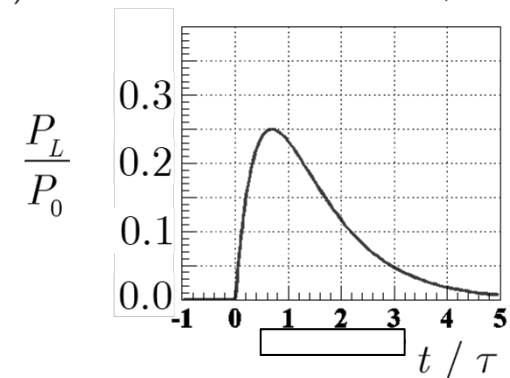
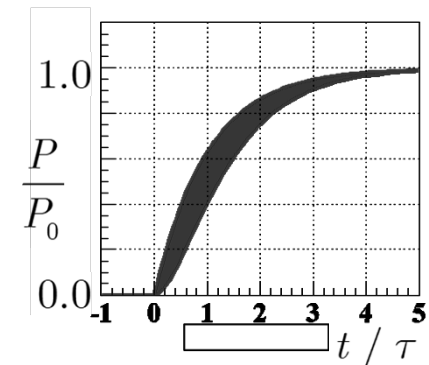
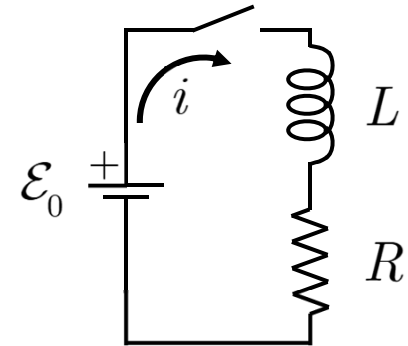
$$P_\varepsilon = \mathcal{E}_0 i(t) = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} (1 - e^{-t/\tau}) = P_0 (1 - e^{-t/\tau})$$

- La potenza dissipata nella resistenza è P_R

$$P_R = Ri^2 = R \left(\frac{\mathcal{E}_0}{R} \right)^2 (1 - e^{-t/\tau})^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} (1 - e^{-t/\tau})^2$$

- La potenza erogata dalla batteria è maggiore di quella dissipata nella resistenza
- La differenza è la potenza trasferita al solenoide

$$P_L = P_\varepsilon - P_R = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} (e^{-t/\tau} - e^{-2t/\tau})$$

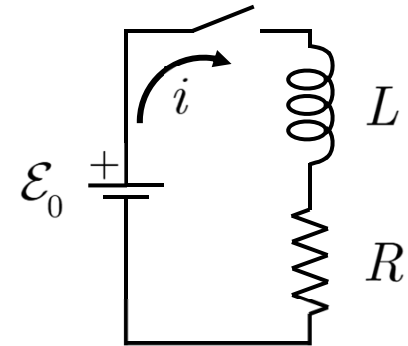


Energia del campo magnetico

- Pertanto viene trasferita una certa quantità di energia W al solenoide

$$W = \int_0^\infty P_L dt = \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} \left(e^{-2t/\tau} - e^{-t/\tau} \right) dt$$

$$W = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2} \frac{L}{R} \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} = \frac{1}{2} L I_0^2 \quad I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$$

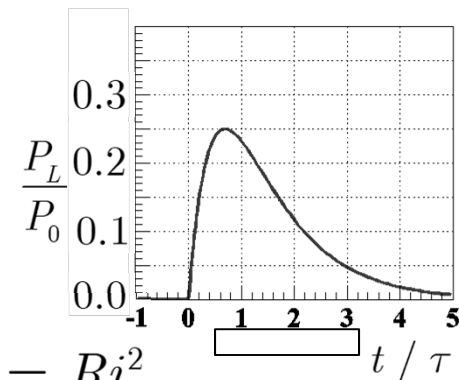


- L'energia trasferita al solenoide è immagazzinata nel campo magnetico B
- Può essere recuperata "spegnendo" il campo magnetico come vedremo fra poco
- Si poteva giungere a questo risultato in modo diverso
- Consideriamo l'equazione del circuito

$$\mathcal{E}_0 - L \frac{di}{dt} = Ri \quad \text{moltiplichiamo per } i \quad \mathcal{E}_0 i - L \frac{di}{dt} i = Ri^2$$

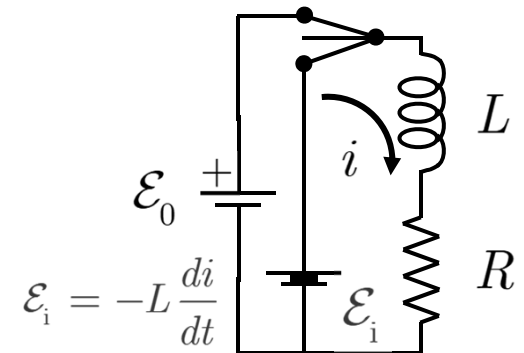
- Interpretiamo dicendo che la potenza della batteria $\mathcal{E}_0 i$ è uguale alla potenza dissipata Ri^2 più la potenza trasferita al solenoide P_L

$$P_L = L \frac{di}{dt} i \quad P_L dt = L i di \quad W = \int_0^\infty P_L dt = L \int_0^{I_0} i di = \frac{1}{2} L I_0^2$$



Energia del campo magnetico

- Vediamo cosa succede se si "spegne" il campo magnetico
- Modifichiamo il circuito con un deviatore
 - In una posizione si "carica" il solenoide
 - Nell'altra si "scarica" attraverso la resistenza R
- Supponiamo che nel solenoide circoli una corrente I_0 prima di spostare il deviatore
- Senza la batteria la corrente tende a diminuire
 - Compare una fem indotta $\mathcal{E}_i$ che si oppone alla diminuzione della corrente
- L'equazione del circuito è simile al caso precedente



$$\cancel{\mathcal{E}_0} - L \frac{di}{dt} = Ri \quad \longrightarrow \quad -L \frac{di}{dt} = Ri \quad \frac{di}{dt} = -\frac{i}{\tau}$$

- La soluzione è semplice
- Nella resistenza viene dissipata una potenza P_R

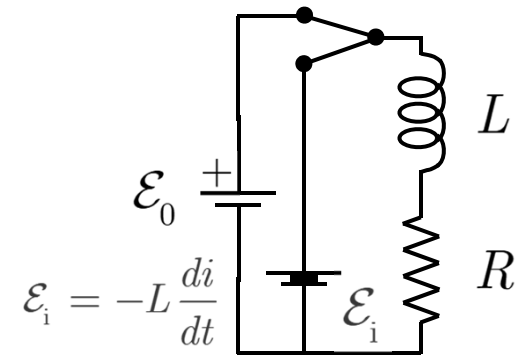
$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

$$P_R = Ri^2 = -Li \frac{di}{dt} \quad W = \int_0^\infty P_R dt = -\int_{I_0}^0 L i di = \frac{1}{2} LI_0^2$$

- Osserviamo che l'energia immagazzinata nel campo viene "recuperata" e dissipata nella resistenza

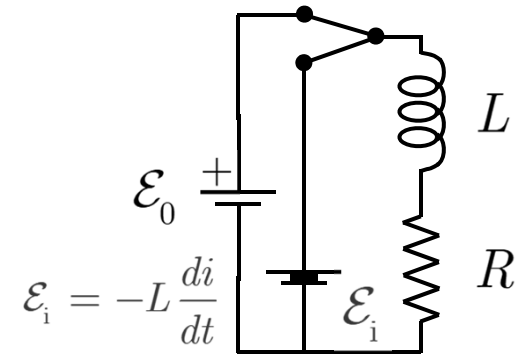
Energia del campo magnetico

- Nell'esempio precedente abbiamo supposto che il solenoide venisse "spento" lentamente
 - Si è "staccata" la batteria ma nello stesso istante si è chiuso il circuito su un altro ramo in modo che l'energia venisse dissipata nella resistenza
- Se invece il circuito venisse aperto di colpo la corrente dovrebbe passare a zero istantaneamente
 - Una discontinuità nella corrente genererebbe una fem infinita
 - In pratica si sviluppa una fem molto elevata che genera scariche elettriche



Energia del campo magnetico

- Nell'esempio precedente abbiamo supposto che il solenoide venisse "spento" lentamente
 - Si è "staccata" la batteria ma nello stesso istante si è chiuso il circuito su un altro ramo in modo che l'energia venisse dissipata nella resistenza
- Se invece il circuito venisse aperto di colpo la corrente dovrebbe passare a zero istantaneamente
 - Una discontinuità nelle corrente genererebbe una fem infinita
 - In pratica si sviluppa una fem molto elevata che genera scariche elettriche



Back "emf" in a
Large Solenoid

MIT Physics Lecture
Demonstration Group



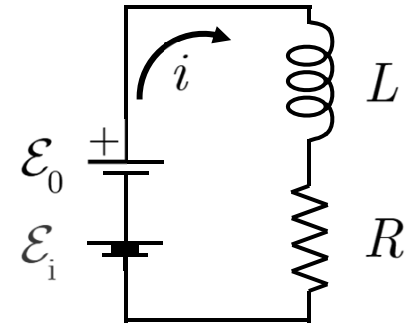
Energia Magnetica

- Abbiamo visto che in un circuito con induttanza e resistenza appare una forza elettromotrice

$$\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_i = RI \quad \mathcal{E}_0 = -\mathcal{E}_i + RI \quad \mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

- Il lavoro che la batteria fa nell'intervallo di tempo dt per trasportare la carica $dq = Idt$ attraverso il circuito è

$$dW_b = \mathcal{E}_0 dq = \mathcal{E}_0 Idt = -\mathcal{E}_i Idt + RI^2 dt = Id\Phi + RI^2 dt$$



- Il lavoro della batteria viene quindi speso
 - Per modificare il campo magnetico: $Id\Phi$
 - Come dissipazione Joule nella resistenza: $RI^2 dt$
- Nel seguito trascuriamo l'effetto Joule ($R \approx 0$) $dW_b = Id\Phi$
- Supponiamo adesso di avere un sistema composto da più circuiti accoppiati (N)
- La formula precedente viene generalizzata in

$$dW_b = \sum_{k=1}^N I_k d\Phi_k$$

- La corrente del circuito k è I_k
- La variazione del flusso del circuito k è $d\Phi_k$

Energia Magnetica

$$dW_b = \sum_{k=1}^N I_k d\Phi_k$$

- Il lavoro dW_b fatto dalla batteria quando le correnti sono mantenute costanti, compensa le forze elettromotrici indotte generate da
 - Eventuali variazioni di flusso dovute a campi magnetici esterni
 - Eventuali variazioni di flusso dovute a spostamenti infinitesimi dei circuiti
- Deriviamo una formula che esprima il lavoro W_{ext} necessario per costruire un sistema composto da
 - N circuiti magnetici
 - Nel circuito k scorre la corrente FINALE I_k
 - Il circuito k è caratterizzato da un flusso FINALE Φ_k
 - Durante la costruzione del sistema un agente esterno compie il lavoro W_{ext}
 - A esempio posizionando circuiti nei quali circolano correnti I_k
 - Ancora una volta devono compensare le forze elettromotrici che si manifestano in seguito alle variazioni di flusso
- Il lavoro W_{ext} speso per costruire il sistema costituisce l'energia U_M immagazzinata nel sistema magnetico: $W_{\text{ext}} = U_M$

Energia Magnetica

- Calcoliamo l'energia magnetica U_M immagazzinata in un sistema descritto da N correnti I_k e N flussi Φ_k
- L'energia è indipendente dal particolare modo con il quale si raggiunge la condizione finale
 - Partiamo dalla geometria finale, e passiamo dalla condizione iniziale (correnti nulle) alla condizione finale in cui le correnti sono I_k
- Scegliamo di farlo facendo cambiare tutte le correnti in modo proporzionale
 - In un dato istante tutte le correnti e tutti i flussi sono pari ad una frazione del loro valore finale: $I_k(\alpha) = \alpha I_k$ $d\Phi_k(\alpha) = \Phi_k d\alpha$

- Otteniamo

$$dU_M = \sum_{k=1}^N \alpha I_k d\Phi_k = \sum_{k=1}^N \alpha I_k \Phi_k d\alpha$$

$$U_M = \int_0^1 \sum_{k=1}^N \alpha I_k \Phi_k d\alpha = \sum_{k=1}^N I_k \Phi_k \int_0^1 \alpha d\alpha$$

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N I_k \Phi_k$$

- La relazione trovata è generale
 - Vale anche in presenza di materiali magnetici purché lineari
- Osserviamo infine che $dW_b = 2dU_M$
 - Il lavoro fatto dalla batteria per mantenere costanti le correnti per variazioni $d\Phi_k$ è il doppio del lavoro necessario per costruire il sistema

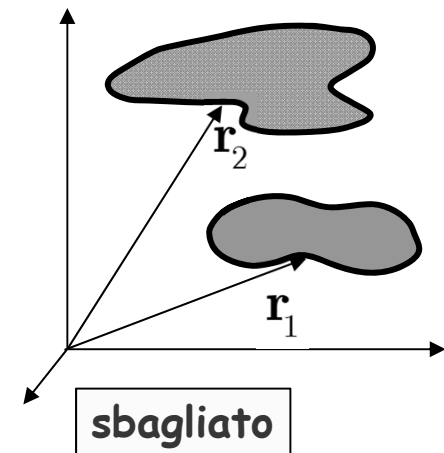
Energia potenziale magnetica

- L'energia magnetica U_M che abbiamo trattato finora è il lavoro che un agente esterno ha fatto per costruire un sistema magnetico
- È anche l'energia immagazzinata nel campo
- Tuttavia non è un'energia potenziale da cui si possono derivare le forze
- In particolare se U_M è una funzione che dipende dalle posizioni dei circuiti magnetici

$$U_M = U_M(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

- Non risulta vero che

$$\mathbf{F}_1 = -\nabla_1 U_M(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad \mathbf{F}_2 = -\nabla_2 U_M(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$



- Supponiamo di spostare la spira 2 di dx_2 mantenendo costanti le correnti
- Sulla spira 2 agisce la forza F_2 che compie un lavoro $dW = \mathbf{F}_{e2} \cdot d\mathbf{r}_2 = -\mathbf{F}_{m2} \cdot d\mathbf{r}_2$
- La batteria compie un lavoro dW_b per mantenere costanti le correnti
- L'energia magnetica del sistema varia di una quantità dU_M

- Il bilancio energetico è

$$dW + dW_b = dU_M \quad dW = dU_M - dW_b = -dU_M \equiv dV_M$$

Energia potenziale magnetica

- In definitiva

$$-\mathbf{F}_{m2} \cdot d\mathbf{r}_2 = \mathbf{F}_{e2} \cdot d\mathbf{r}_2 = dV_M$$

$$\mathbf{F}_m = -\nabla V_M$$

$V_M = -U_M$