
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 29 - 04.04.2023

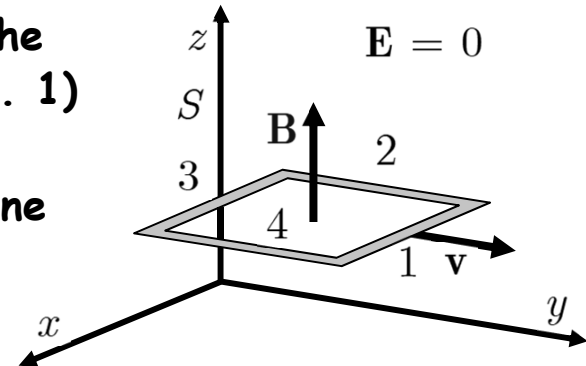
Induzione elettromagnetica
Forza elettromotrice da movimento
Forza elettromotrice da induzione
3^a Equazione di Maxwell

Anno Accademico 2022/2023

Spira in campo non uniforme

- Consideriamo una spira conduttrice rigida di lato w che si muove con velocità v lungo l'asse y (esperimento n. 1)
- La coordinata y del lato 3 è data da $y(t) = vt$
- Supponiamo un campo magnetico B dato dalla equazione

$$B(y) = B_0 \frac{y}{L} \hat{e}_z \quad L \text{ è una lunghezza costante nota}$$



- Il flusso concatenato al tempo t è

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = B_0 w \int_{y(t)}^{y(t)+w} \frac{y}{L} dy \\ &= B_0 \frac{w}{2L} [(y+w)^2 - y^2] = B_0 \frac{w}{2L} [2yw + w^2] = B_0 \frac{w^2}{2L} [2vt + w] \end{aligned}$$

- Secondo la legge di Faraday la forza elettromotrice è

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 \frac{w^2}{2L} \frac{d}{dt} [2vt + w] = -B_0 \frac{w^2}{2L} 2v$$

$\mathcal{E} = -B_0 \frac{w^2}{L} v$

- Per un confronto con le considerazioni seguenti calcoliamo la differenza fra il campo B sui lati 1 e 3 ad un generico tempo t

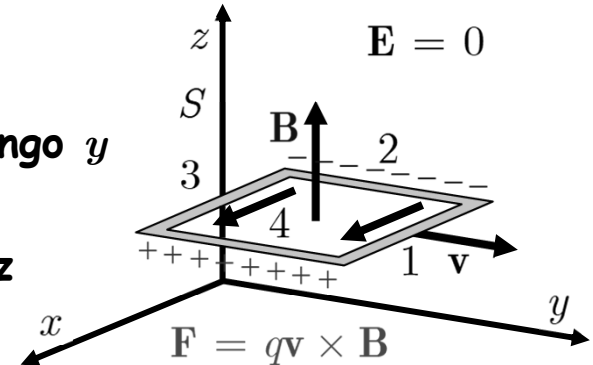
$$B(y_1) - B(y_3) \equiv B_1 - B_3 = B_0 \frac{vt + w}{L} - B_0 \frac{vt}{L} = B_0 \frac{w}{L}$$

- In definitiva

$\mathcal{E} = (B_3 - B_1)wv$

Spira in campo non uniforme

- Interpretiamo il fenomeno alla luce delle leggi che conosciamo
- Supponiamo che la spira sia vincolata a muoversi lungo y
- Inoltre, supponiamo inizialmente campo B uniforme
- C'è la componente magnetica della forza di Lorentz
 - Sulle cariche all'interno dei lati paralleli all'asse y (lati 2 e 4) si esercitano forze perpendicolari al filo che si elidono
 - Sulle cariche dei lati paralleli all'asse x (1 e 3) le forze sono lungo il filo
- Le cariche nel conduttore raggiungono una condizione di equilibrio
- I due lati della spira si caricano positivamente e negativamente
 - Ricordiamo l'esempio della barretta in movimento (vedi diapositiva [212](#))
- Immaginiamo adesso che il campo magnetico non sia uniforme lungo la direzione y anche se è costante nel tempo
- Calcoliamo la circuitazione della forza magnetica al tempo t [$y = y(t)$]



$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad \boxed{\mathbf{F}(y) = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(y)}$$

- La forza è perpendicolare al cammino lungo i lati 2 e 4

$$= \int_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -qvB_1w + qvB_3w \quad B_1 = B(y_1) \quad B_3 = B(y_3)$$

Spira in campo non uniforme

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -qvB_1w + qvB_3w = qw(B_3 - B_1)v$$

- Viene compiuto un lavoro sui portatori di carica del conduttore della spira
- Il lavoro viene fatto sulla corrente elettrica che è stata provocata dalla forza di Lorentz
- Nella spira è presente una forza elettromotrice

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = w(B_3 - B_1)v$$

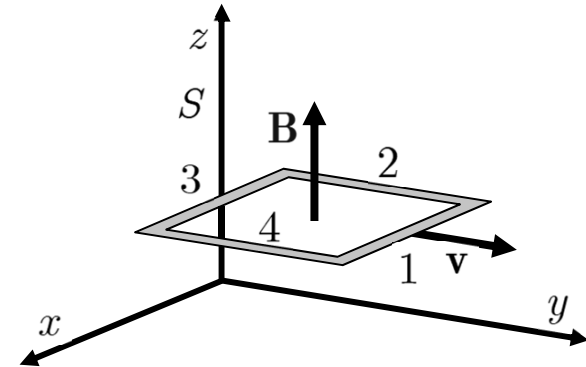
- Riscriviamo questa relazione in funzione della variazione flusso del campo magnetico $\mathbf{B}$ attraverso la superficie della spira
- Consideriamo due posizioni a e b della spira a due istanti di tempo t e $t + dt$
- Il flusso del campo magnetico è
- Calcoliamo la variazione del flusso

$$\begin{aligned} d\Phi &= \Phi_b - \Phi_a = B_1wvdt - B_3wvdt \\ &= w(B_1 - B_3)vdt = -w(B_3 - B_1)vdt \end{aligned}$$

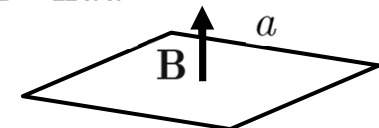
- Confrontando con l'espressione per $\mathcal{E}$

$$d\Phi = -\mathcal{E}dt$$

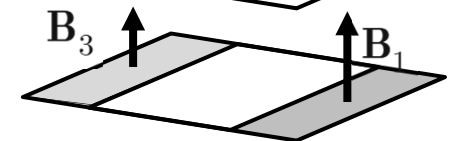
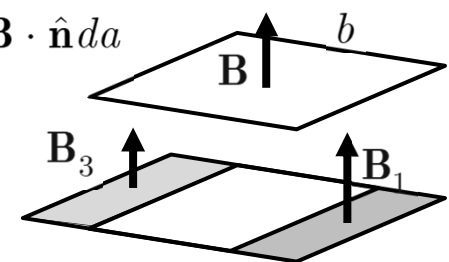
$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}}$$



$$\Phi_a = \int_{S_a} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

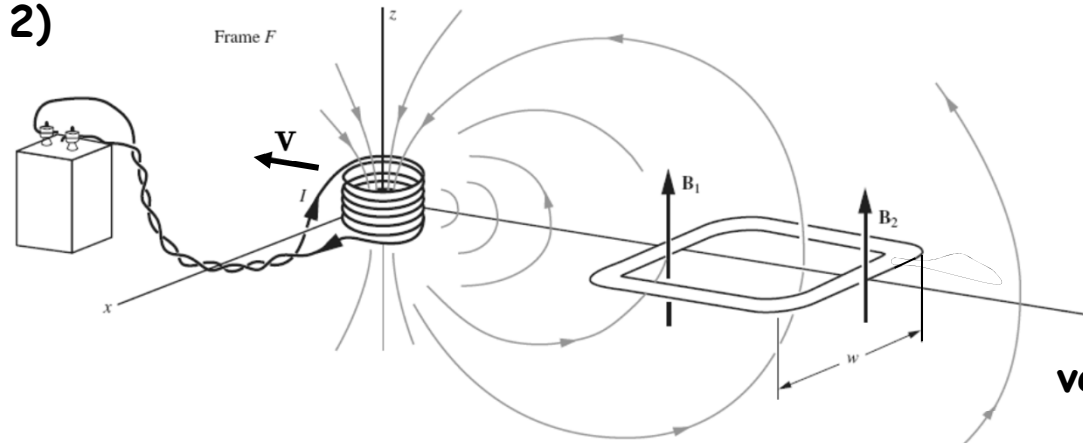


$$\Phi_b = \int_{S_b} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$



Legge di Faraday

- Supponiamo adesso che sia la sorgente del campo a muoversi e che la spira sia ferma (esp. 2)



Attenzione
vera solo per $\gamma \approx 1$

- Supponiamo che nella posizione della spira il campo sia $B(y, t) = B_0 \frac{y + vt}{L} \hat{e}_z$
- Il flusso concatenato con la spira al tempo t è

$$\Phi(t) = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = B_0 w \int_0^w \frac{y + vt}{L} dy = B_0 \frac{w}{L} \left[\frac{1}{2} w^2 + wvt \right]$$

- Secondo la legge di Faraday la forza elettromotrice è

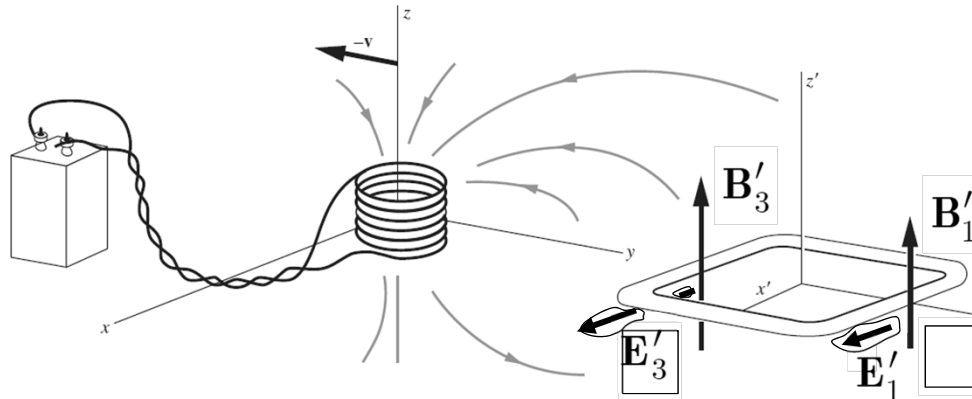
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 \frac{w}{L} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} w^2 + wvt \right] = -B_0 \frac{w^2}{L} v$$

$$\boxed{\mathcal{E} = -B_0 \frac{w^2}{L} v}$$

- La spira è ferma, non c'è forza di Lorentz
- È possibile interpretare questo fenomeno con leggi già studiate?
 - Sì, serve la relatività ristretta

Legge di Faraday

- Interpretiamo l'esperimento 2 alla luce della relatività ristretta



$$\mathbf{E}'_1 = \mathbf{v} \times \mathbf{B}'_1$$

$$\mathbf{E}'_3 = \mathbf{v} \times \mathbf{B}'_3$$

- È l'esperimento 1 osservato in un altro sistema di riferimento inerziale
- Analogo a quanto visto nella diapositiva [214](#)
 - Nel sistema S' in cui la spira è a riposo compare un campo elettrico

- Un campo elettrico non conservativo
- È comparsa una forza elettromotrice

NB: uguale all'esp. 1
solo se $\gamma \approx 1$

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}' = E'_3 w - E'_1 w = v B'_3 w - v B'_1 w$$

$$\mathcal{E} = w (B'_3 - B'_1) v$$

- La forza magnetica sui portatori di carica della spira è nulla
- Tuttavia, anche se la spira è ferma, il flusso concatenato varia nel tempo
 - Si sposta la sorgente: il campo varia nel tempo
- Anche in questo caso la legge di Faraday è valida
 - La forza elettromotrice indotta è

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Einstein - Relatività Ristretta 1905

È noto che l'elettrodinamica di Maxwell, come generalmente intesa oggi, quando applicata a corpi in movimento, porta a delle asimmetrie che non sembrano essere connaturate ai fenomeni.

Si consideri ad esempio l'azione reciproca di un magnete e di un conduttore. Il fenomeno osservabile in questo caso dipende soltanto dal moto relativo del conduttore e del magnete mentre l'interpretazione usuale traccia una distinzione netta fra i due casi in cui l'uno o l'altro dei due corpi è in movimento.

Infatti, se il magnete si muove e il conduttore è a riposo allora nelle vicinanze del magnete si sviluppa un campo elettrico che produce una corrente nelle regioni dello spazio dove si trovano le parti del conduttore.

Ma se il magnete è fermo e il conduttore si muove, nessun campo elettrico si sviluppa nelle vicinanze del magnete. Tuttavia noi osserviamo una forza elettromotrice nel conduttore che dà luogo (assumendo l'uguaglianza del moto relativo dei due casi discussi) a correnti elettriche nello stesso senso e della stessa intensità di quelle prodotte dalle forze elettriche del primo caso.

Esempi di questo tipo insieme al fallimento dei tentativi di evidenziare qualsiasi moto della Terra relativamente al "mezzo leggero" suggerisce che sia i fenomeni dell'elettrodinamica che quelli della meccanica non posseggano alcuna proprietà ascrivibile al concetto sistema di riposo assoluto.

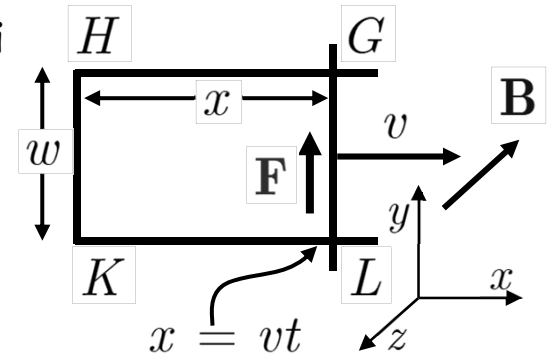
A. Einstein – On the electrodynamics of moving bodies – 30 giugno 1905

Einstein - Relatività Ristretta

- Abbiamo visto che Einstein risolve le contraddizioni abbandonando decisamente la teoria dell'etere e affermando i due postulati alla base della sua teoria della Relatività Ristretta
- Il principio di relatività
 - Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali
 - Questo postulato è identico a quello della relatività Galileiana
 - La novità sta nel fatto che "fisica" include anche l'elettromagnetismo che in quegli anni mostrava di essere incompatibile con le trasformazioni di Galileo
 - Di fatto questa affermazione implica che devono esistere altre leggi di trasformazione che sono compatibili con le equazioni di Maxwell
- La costanza della velocità della luce
 - La velocità della luce nel vuoto è la stessa in tutti i sistemi inerziali ed è indipendente dallo stato di moto della sorgente
 - Abbiamo derivato le trasformazioni di Lorentz assumendo che la velocità della luce sia la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali

Spira di superficie variabile

- Consideriamo il sistema in figura immerso in un campo di induzione magnetica B uniforme, perpendicolare al piano
- Il tratto nero $GHKL$ è un conduttore a riposo
 - I portatori di carica sono a riposo
 - Il campo magnetico non ha alcun effetto: $F = 0$
- Il tratto rosso LG è un conduttore che viene tenuto in moto con velocità v verso destra
 - I portatori di carica nel conduttore LG si muovono con velocità $\mathbf{v} = v \hat{\mathbf{e}}_x$
 - Su di essi agisce la forza di Lorentz $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = qvB \hat{\mathbf{e}}_y$
- Nella spira appare una forza elettromotrice



$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{q} \int_{y_L}^{y_G} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = vBw$$

- Ancora una volta, troviamo una relazione fra la forza elettromotrice e il flusso del campo di induzione magnetica B

$$\mathcal{E} dt = Bwv dt = Bw d[x(t)] = d[Bwx]$$

$$\Phi = \int_A \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = -Bwx$$

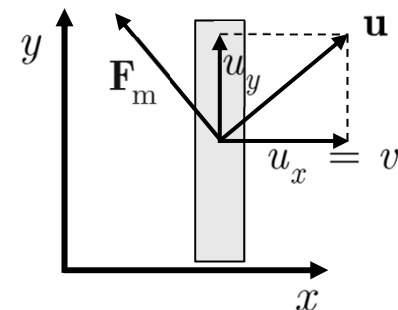
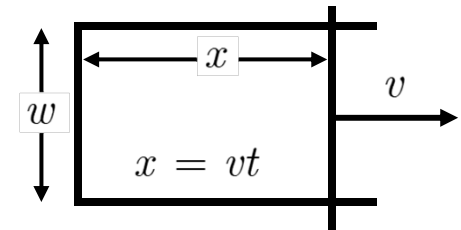
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

- Se la spira ha una resistenza R $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$ $P = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$

viene fatto un lavoro !

Chi fa lavoro?

- Nell'analisi del sistema precedente abbiamo visto che ai portatori di carica viene trasferita energia
 - Viene compiuto un lavoro
 - A prima vista sembra che siano le forze magnetiche a compiere lavoro
 - Abbiamo detto che le forze magnetiche non fanno lavoro
- L'interpretazione è la stessa vista nella diapositiva [38](#)
- Ricordiamo i risultati della diapositiva precedente
 - Al tempo t il conduttore rosso è ad una distanza vt
 - Il flusso concatenato è $\Phi = -Bwx = -Bwvt$
 - La forza elettromotrice è $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = Bwv$
 - La potenza dissipata è $P = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{(Bwv)^2}{R}$
- Consideriamo in dettaglio cosa succede al conduttore rosso
 - Le cariche hanno due componenti della velocità
 - La componente u_y legata alla corrente
 - La componente $u_x = v$ dovuta al moto della barretta
 - La forza magnetica sui portatori di carica è pertanto F_m

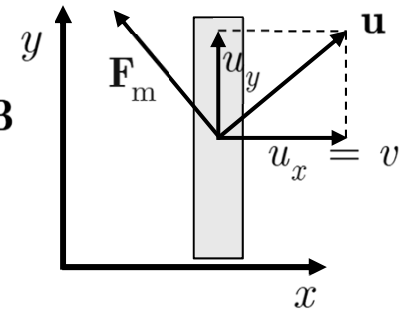


$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

Chi fa lavoro?

- Assumiamo di essere in una condizione stazionaria
 - La corrente è costante
 - La velocità della barretta è costante
 - Tutte le forze sono in equilibrio
- Scomponiamo la forza magnetica in una componente verticale e una orizzontale

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$



$$F_{my} = qu_x B \quad F_{mx} = qu_y B$$

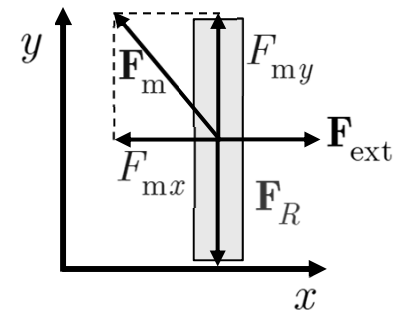
- La componente orizzontale bilancia la forza esterna
 - La velocità della barretta è costante
- La componente verticale mantiene costante la corrente contro l'effetto dissipativo delle collisioni con gli ioni
- Consideriamo il lavoro fatto dalle forze nell'unità di tempo
 - La componente verticale della forza magnetica

$$P_y = F_{my}u_y = qBu_xu_y \quad \text{effetto Joule contro } F_R$$

- La componente orizzontale della forza magnetica

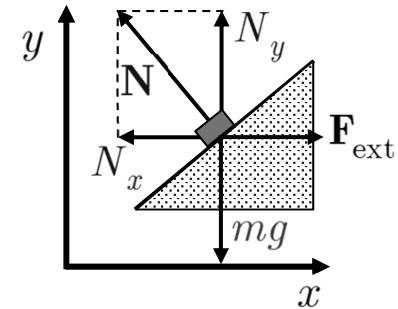
$$P_x = -F_{mx}u_x = -qBu_yu_x \quad \text{si oppone alla forza esterna}$$

- Osserviamo che la potenza totale $P_x + P_y$ della forza $\mathbf{F}_m$ è nulla
 - La forza magnetica non compie lavoro



Chi fa lavoro?

- Notiamo infine che le potenze sono tutte uguali in modulo
 - L'agente esterno che applica F_{ext} eroga una potenza $qBu_xu_y = qBvu_y$
 - La forza magnetica si oppone all'agente esterno e dissipa $-qBu_xu_y$
 - La forza magnetica converte la potenza meccanica erogata dalla forza esterna in potenza termica dissipata per effetto Joule
 - È necessaria per mantenere la corrente pari a qBu_xu_y
 - L'effetto Joule dissipa una potenza qBu_xu_y
- Abbiamo già notato un sistema meccanico analogo
 - Un piano inclinato senza attrito
 - Il diagramma delle forze è lo stesso di quello della diapositiva precedente
 - La forza normale non compie lavoro
 - La reazione normale si scompone in due componenti
 - La forza esterna orizzontale compie un lavoro aumentando l'altezza e quindi l'energia potenziale gravitazionale della massa



Il flusso del campo magnetico

- Nei calcoli precedenti abbiamo utilizzato spire piane
 - Le superfici che abbiamo utilizzato erano anch'esse piane
- Tuttavia si tratta di una restrizione non essenziale
 - La spira potrebbe non essere piana e la superficie utilizzata potrebbe essere una qualunque
- Ad esempio il flusso attraverso la superficie S_1 delimitata dal cammino C
 - Oppure attraverso la superficie S_2

- Dimostriamo che

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2$$

- Consideriamo la superficie chiusa formata da $S_1 + S_2$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \implies \oint_{S_1+S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 + \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_3$$

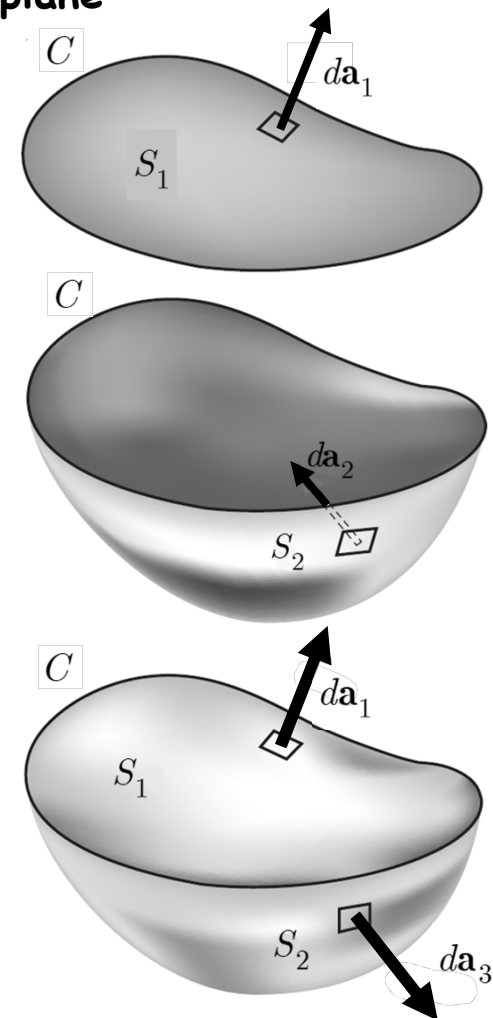
- Le normali alle superfici sono verso l'esterno

- Ma si ha $d\mathbf{a}_3 = -d\mathbf{a}_2$

$$\int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_3 = -\int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2 \quad \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 - \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2 = 0$$

$$\boxed{\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_1 = \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}_2}$$

- Nel sistema MKS il flusso si misura in Weber



Legge di Faraday: fem da movimento

- Consideriamo il circuito in figura, in una regione in cui è presente un campo magnetico $B(r)$ indipendente dal tempo
- Al tempo t il circuito è definito dal contorno C_1 e dalla superficie S_1
- Chiamiamo $\Phi(t)$ il flusso di B

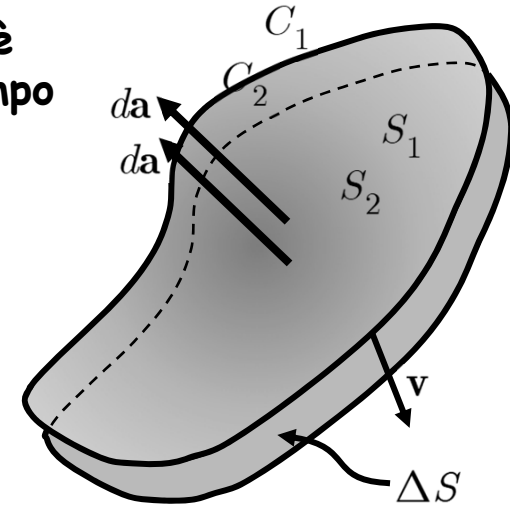
$$\Phi(t) = \int_{S_1} B \cdot da$$

- Il circuito è rigido e si muove con velocità v
 - Al tempo $t + dt$ si sarà spostato
- Al tempo $t + dt$ il circuito è definito dal contorno C_2 e dalla superficie S_2
 - I contorni C_1 e C_2 e le superfici S_1 e S_2 non sono gli stessi: sono spostati
 - Chiamiamo $\Phi(t + dt)$ il flusso di B nella nuova posizione

$$\Phi(t + dt) = \int_{S_2} B \cdot da$$

- Il flusso concatenato con C_2 è lo stesso per tutte le superfici delimitate dal contorno C_2 (N.B.: diverso da C_1)
- In particolare la superficie $S_1 + \Delta S$
 - ΔS è la superficie del "nastro" generato da C_1 nel suo spostamento

$$\Phi(t + dt) = \int_{S_1 + \Delta S} B \cdot da = \int_{S_1} B \cdot da + \int_{\Delta S} B \cdot da$$



Legge di Faraday: fem da movimento

- Riportiamo la relazione che abbiamo trovato

$$\int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \Phi(t + dt) = \int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} + \int_{\Delta S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\Phi(t + dt) = \Phi(t) + \int_{\Delta S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

- Pertanto il flusso al tempo $t + dt$ è uguale ...

- Al flusso al tempo t (concatenato a C_1)
- Al flusso attraverso la superficie ΔS

- Sviluppando il primo membro

$$\Phi(t + dt) \approx \Phi(t) + \frac{d\Phi}{dt} dt \quad \longrightarrow \quad \frac{d\Phi}{dt} dt = \int_{\Delta S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

- Calcoliamo il flusso attraverso ΔS

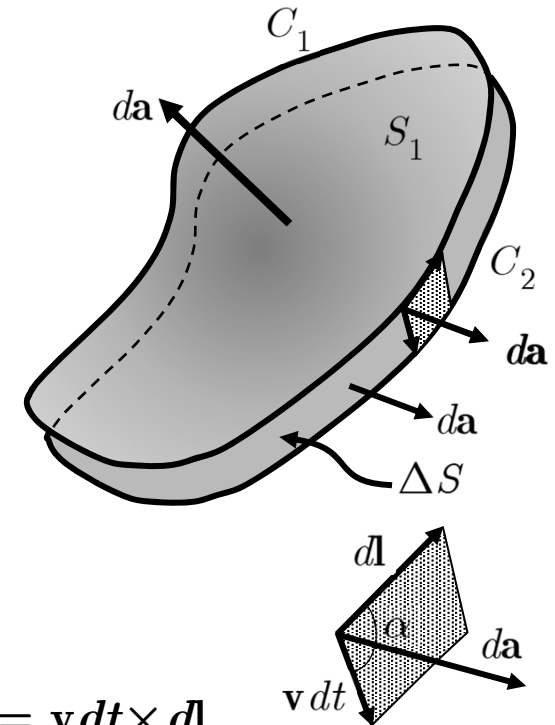
- L'elemento di superficie $d\mathbf{a}$ sulla superficie ΔS è $d\mathbf{a} = \mathbf{v} dt \times d\mathbf{l}$

- Il modulo di $d\mathbf{a}$ è l'area del parallelogramma $v dt dl \sin \alpha$

- $d\mathbf{l}$ è l'elemento di cammino lungo C_1

- Il prodotto vettoriale assicura che $d\mathbf{a}$ sia perpendicolare alla superficie

$$\frac{d\Phi}{dt} dt = \int_{\Delta S} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_{C_1} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} dt \times d\mathbf{l}) \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{d\Phi}{dt} = \int_{C_1} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l})}$$



Legge di Faraday: fem da movimento

- Ricordiamo l'identità $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}$

- Inserendo nella relazione appena trovata

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{C_1} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) = - \int_{C_1} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = - \frac{1}{q} \int_{C_1} (q\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = - \frac{1}{q} \int_{C_1} \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{l} = -\mathcal{E}$$

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

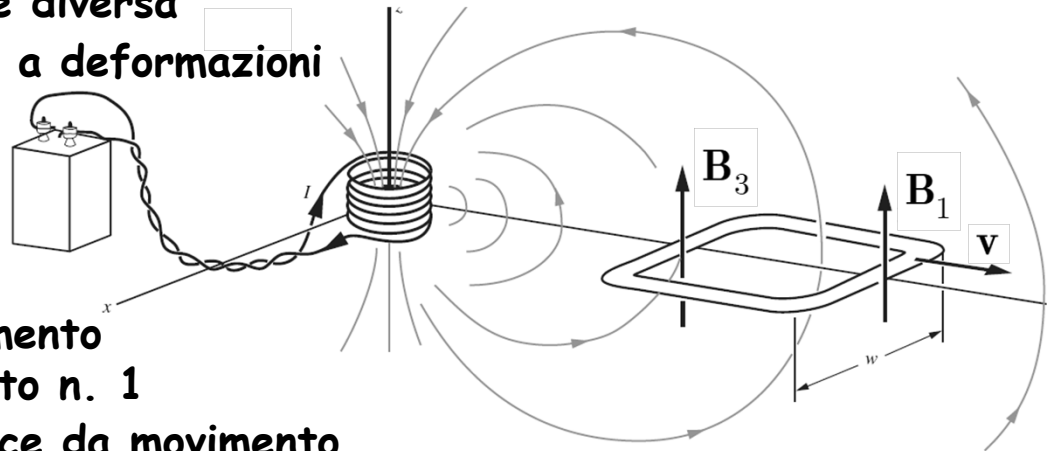
Abbiamo assunto $\mathbf{B}$ indipendente dal tempo
La legge di Faraday contiene la forza di Lorentz

- Abbiamo ricavato una relazione per la forza elettromotrice per una spira qualunque e un moto arbitrario

- Osserviamo che $\mathbf{v}$ può essere diversa lungo il circuito e dare luogo a deformazioni

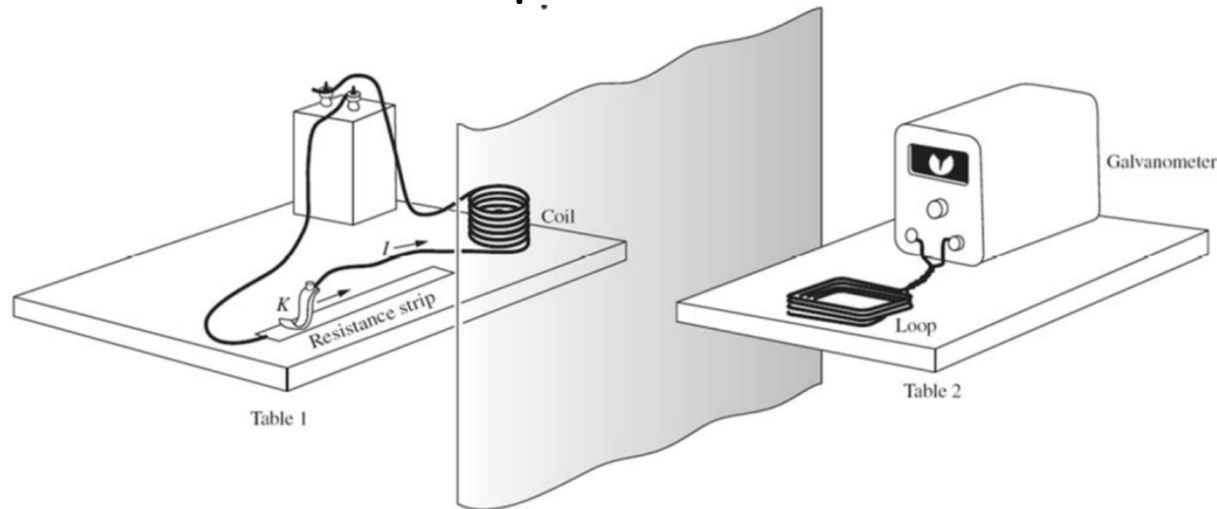
- La formula è valida anche in questo caso

- La forza elettromotrice che osserviamo è originata dal movimento della spira, come nell'esperimento n. 1
- Parliamo di forza elettromotrice da movimento
- Vedi diapositiva [223](#)



Legge di Faraday: fem indotta

- Per finire consideriamo il terzo esperimento



- In questo caso non c'è movimento
- La corrente nel solenoide viene fatta variare nel tempo
 - In questo caso il campo magnetico varia nel tempo
- ANCHE IN QUESTO CASO si sviluppa una forza elettromotrice nella spira
 - Gli esperimenti di Faraday mostrano che la forza elettromotrice indotta è
- Tuttavia siamo in presenza di un nuovo fenomeno
 - Non è possibile spiegarlo con la forza di Lorentz o con la relatività

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Legge di Faraday: fem indotta

- Sottolineiamo ancora una volta le differenze dei tre esperimenti descritti
 - Nel primo il campo magnetico non varia nel tempo ma la spira si muove
 - Nel secondo la sorgente del campo magnetico si muove ma la spira è ferma
 - È il primo esperimento visto in un altro sistema inerziale
 - Nel terzo non ci sono moti relativi ma il campo varia nel tempo
 - Un fenomeno fisico diverso: non c'è movimento relativo fra la sorgente del campo e la spira
- In tutti e tre gli esperimenti si osserva che appare una forza elettromotrice

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

- Che tutti e tre gli esperimenti conducano alla stessa legge sulla variazione del flusso è, a prima vista, sorprendente
- Nel suo articolo sulla relatività ristretta del 1905 Einstein discute i primi due esperimenti per mostrare l'esigenza dell'unificazione dei campi E e B in un'unica grandezza fisica
 - La relatività ristretta non era nota a Faraday ... 1830 ... 1905
- Analizziamo le conseguenze del terzo tipo di esperimenti

L'equazione del rotore di E

- Consideriamo adesso una curva **chiusa C e stazionaria** in un sistema inerziale S
- In questo sistema consideriamo una superficie A delimitata da C anch'essa stazionaria
- In S sia presente un campo magnetico $\mathbf{B}(x,y,z,t)$ dipendente dal tempo
- La legge di Faraday ci dice che

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

- Utilizziamo il teorema di Stokes per il primo membro

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} \quad \longrightarrow \quad \int_A (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} = -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

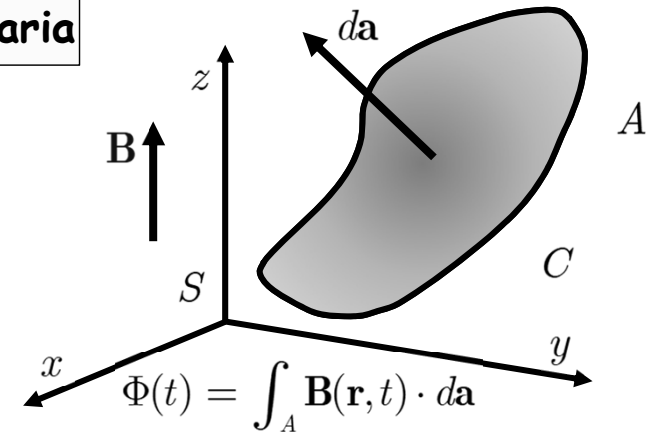
- Ricordiamo che sia la curva C che la superficie A sono stazionarie

$$\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \quad \longrightarrow \quad \int_A (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{a} = -\int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

- La curva C (e quindi la superficie A) sono arbitrarie; pertanto

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Conseguenza della legge di Faraday
- È la terza equazione di Maxwell



Potenziale scalare e potenziale vettore

- Vogliamo adesso trovare la relazione fra il campo elettrico e i potenziali nel caso di campi variabili nel tempo
- Ricordiamo l'equazione di Maxwell appena trovata

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Ricordiamo inoltre che è sempre vero che

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- È pertanto possibile introdurre il potenziale vettore anche in elettrodinamica

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

- Introduciamo questa relazione nella terza equazione di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

- Abbiamo pertanto trovato una combinazione di campi a rotore nullo
 - È il gradiente di un campo scalare

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi \quad \longrightarrow \quad \boxed{\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}}$$

Variazione del flusso

- Torniamo all'analisi della derivata del flusso vista nella diapositiva **235**
 - Nella derivazione precedente abbiamo mantenuto costante la superficie A
 - Calcoliamo la variazione del flusso nel caso generale
 - La superficie cambia (ad esempio la curva C si muove)
 - Il campo magnetico dipende dal tempo
 - Estendiamo il calcolo al caso in cui B dipende dal tempo

$$\Phi(t) = \int_{A(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{a} \quad \frac{d\Phi}{dt} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{B=\text{cost}} + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{A=\text{cost}}$$

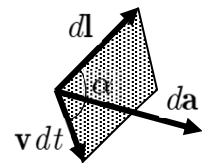
- Calcoliamo il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} = \frac{\int_{A(t+\Delta t)} \mathbf{B}(t + \Delta t) \cdot d\mathbf{a} - \int_{A(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{a}}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \int_{A(t+\Delta t)} \mathbf{B}(t + \Delta t) \cdot d\mathbf{a} &= \int_{A(t)} \mathbf{B}(t + \Delta t) \cdot d\mathbf{a} + \int_{\Delta A} \mathbf{B}(t + \Delta t) \cdot d\mathbf{a} \\ &= \int_{A(t)} \left[\mathbf{B}(t) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta t \right] \cdot d\mathbf{a} + \int_{\Delta A} \left[\mathbf{B}(t) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta t \right] \cdot d\mathbf{a} \end{aligned}$$

$$\int_{\Delta A} \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta t \right] \cdot d\mathbf{a} \sim \Delta A \Delta t \quad \Delta A \sim v \Delta t \Delta l$$

di secondo ordine in Δt , trascurabile



Variazione del flusso

- Abbiamo pertanto

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\int_{A(t)} \left[\mathbf{B}(t) + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta t \right] \cdot d\mathbf{a} + \int_{\Delta A} [\mathbf{B}(t)] \cdot d\mathbf{a} - \int_{A(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{a}}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\int_{A(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta t \cdot d\mathbf{a} + \int_{\Delta A} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{a}}{\Delta t} = \int_{A(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta A} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{a}$$

- Il secondo termine è stato calcolato nella diapositiva [236](#)

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Delta A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = - \int_{C_1} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

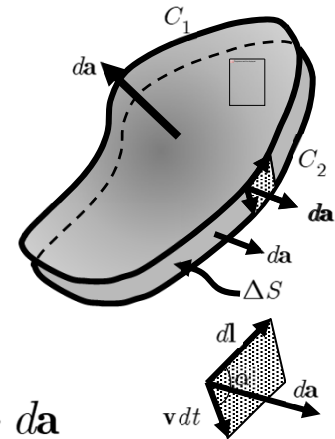
- Infine

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{A(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} - \int_{C(t)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

- Dal confronto con

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{B=\text{cost}} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{A=\text{cost}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{A=\text{cost}} &= \int_{A(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{B=\text{cost}} &= - \int_{C(t)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \end{aligned}$$



Variazione del flusso

- La forza elettromotrice è pertanto

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_{A(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} + \int_{C(t)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

- Il primo termine dice che un campo magnetico variabile nel tempo induce una forza elettromotrice
 - Un campo magnetico variabile induce un campo elettrico
 - La forza elettromotrice collegata è detta "da induzione"
- Il secondo termine dice che la forza di Lorentz può generare una forza elettromotrice
 - Una forza elettromotrice "da movimento": campo elettromotore $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$
- Il fatto che la derivata totale del flusso descriva e in qualche modo unifichi due fenomeni fisici tanto diversi è un fatto notevole
- Va inoltre notato il fatto che la forza di Lorentz e la velocità della luce facevano pensare all'esistenza di un sistema di riferimento assoluto
 - Legato al concetto di etere
 - In quale sistema inerziale?
 - Il sistema in cui l'etere è a riposo?

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \quad \mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Variazione del flusso

- Facciamo adesso una osservazione interessante
 - Consideriamo l'espressione della forza elettromotrice

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_{A(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} + \oint_{C(t)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

- Elaboriamo il primo integrale

$$\int_{A(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = \int_{A(t)} \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = \int_{A(t)} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

- Utilizziamo il teorema di Stokes

$$\int_{A(t)} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{C(t)} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\int_{A(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} = \oint_{C(t)} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l}$$

- Inserendo nella prima equazione

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint_{C(t)} -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{C(t)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

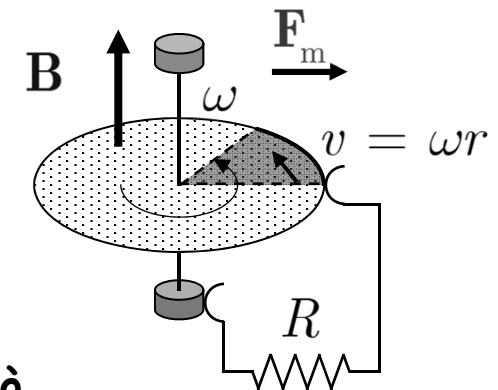
fem induttiva: componente induttiva di E

fem di movimento

Variazione del flusso

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_{A(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} + \int_{C(t)} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

- Vale la pena notare che il secondo termine della formula permette di risolvere problemi per i quali non è immediato o possibile parlare di variazione di flusso
- In generale questo diventa difficile se non impossibile quando non esiste un circuito chiaramente definito
- Si consideri ad esempio il sistema (disco di raggio a)
 - Inventato da Faraday e discusso in molti testi fra i quali Griffiths ex 7.4 e Feynman 17-2
- Il circuito in movimento è il disco ed è evidente che il flusso attraverso la superficie del disco è costante
- Tuttavia si sviluppa una forza elettromotrice come si può vedere utilizzando il campo elettromotore (o la forza di Lorentz $\mathbf{F}_m$)



$$\mathcal{E} = \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\int_0^a \omega r B dr = -\frac{\omega a^2 B}{2} \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{\omega a^2 B}{2R}$$

- L'aspetto essenziale del tratto del circuito C è che si muove solidalmente con il conduttore (la materia in cui sono presenti le cariche)

$$\Delta S = \frac{\Delta \theta a^2}{2} = \frac{\omega t a^2}{2} \quad \Phi = B \Delta S = \frac{\omega t a^2 B}{2} \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\omega a^2 B}{2}$$

- Per un circuito matematico nel vuoto il contributo sarebbe nullo