
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 28 - 30.03.2023

Trasformazione dei campi E e B
Invarianti del Campo
Barretta conduttrice in moto
Induzione elettromagnetica

Anno Accademico 2022/2023

Trasformazione dei campi E e B

- Per trovare le leggi di trasformazioni di B procediamo in modo analogo a quanto fatto per il campo elettrico

- Consideriamo due piani infiniti di carica paralleli al piano $z-x$

- I piani si muovono con velocità u lungo l'asse x nel sistema S

- Nel sistema S la loro densità di carica è $\pm\sigma$

- Nel sistema in cui i piani sono a riposo la loro densità di carica è minore ed è $\sigma_0 = \sigma/\gamma_u$

- Calcoliamo il campo elettrico E e il campo di induzione magnetica B nel sistema S

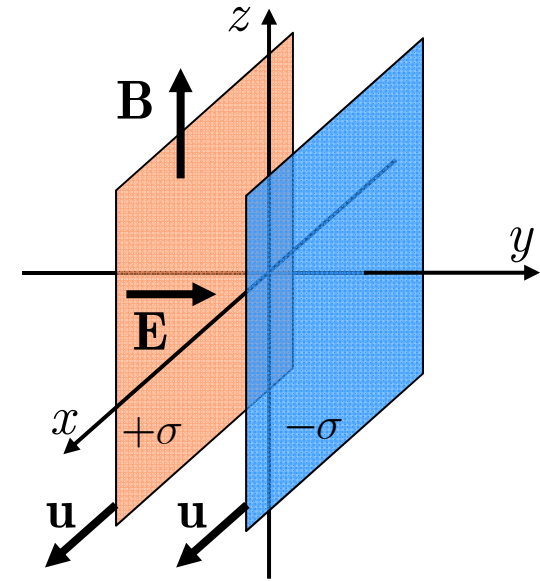
- Il campo elettrico fra i piani è (ricordiamo che all'esterno è nullo)

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{e}}_y$$

- I piani costituiscono due densità di corrente superficiale $\mathbf{K} = \pm\sigma\mathbf{u}$

- La densità di corrente genera un campo di induzione magnetica B fra i piani (all'esterno è nullo)

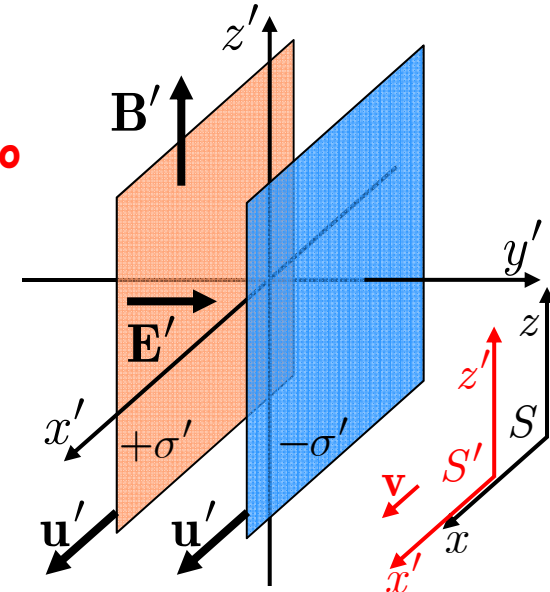
$$\mathbf{B} = \mu_0 \sigma u \hat{\mathbf{e}}_z$$



Trasformazione dei campi E e B

- Consideriamo adesso un sistema S' che si muove rispetto a S con velocità v lungo l'asse x
 - Per calcolare i campi E' e B' nel sistema S' vediamo innanzitutto come si sono trasformate le sorgenti
- Calcoliamo la velocità u' dei piani di carica in S'
 - Usiamo la formula della diapositiva 185
 - Scambiamo il ruolo di S e S' e cambiamo il segno di v

$$\mathbf{u}'_{\parallel} = \frac{u_{\parallel} - v}{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} / c^2} \quad u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2} = c \frac{\beta_u - \beta}{1 - \beta_u \beta}$$



- In S' piani di carica si muovono con velocità u' (sempre lungo x)
 - Calcoliamo $\gamma'_u = \frac{1}{\sqrt{1 - (u'/c)^2}}$ si può verificare che $\gamma'_u = \gamma_u \gamma (1 - \beta_u \beta)$
- La densità di carica diventa $\sigma' = \sigma_0 \gamma'_u = \frac{\sigma \gamma'_u}{\gamma_u} = \sigma \gamma (1 - \beta_u \beta)$
- E infine la densità di corrente

$$\mathbf{K}' = \sigma' \mathbf{u}' = \sigma \gamma (1 - \beta_u \beta) c \frac{\beta_u - \beta}{1 - \beta_u \beta} \hat{\mathbf{e}}_{x'} = \sigma \gamma c (\beta_u - \beta) \hat{\mathbf{e}}_{x'}$$

Trasformazione dei campi E e B

- Riassumendo $\sigma' = \sigma\gamma(1 - \beta_u\beta)$ $\mathbf{K}' = \sigma\gamma c(\beta_u - \beta)\hat{\mathbf{e}}_{x'}$

- Troviamo infine il campo elettrico $\mathbf{E}'$ e il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}'$

$$\mathbf{E}' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{e}}_{y'} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \gamma (1 - \beta_u\beta) \hat{\mathbf{e}}_y$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \gamma = \gamma E_y \quad \frac{\sigma}{\epsilon_0} \gamma \beta_u \beta = \frac{\sigma}{\epsilon_0 c^2} \gamma uv = \mu_0 \sigma \gamma uv = \gamma v B_z$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 c^2} = \mu_0$$

$$\mu_0 \sigma u = B_z$$

- Inserendo nella formula per $\mathbf{E}'$

$$E'_y = \gamma (E_y - v B_z)$$

- Analogamente per $\mathbf{B}'$

$$\mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{K}' \hat{\mathbf{e}}_{z'} = \mu_0 \sigma \gamma c (\beta_u - \beta) \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\mu_0 \sigma \gamma c \beta = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \sigma \gamma c \beta = \gamma \frac{E_y}{c^2} v$$

$$\mu_0 \sigma \gamma c \beta_u = \mu_0 \gamma \sigma u = \gamma B_z$$

- Inserendo nella formula per $\mathbf{B}'$

$$B'_z = \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right)$$

Trasformazione dei campi E e B

$$E'_y = \gamma E_y - \gamma v B_z \quad B'_z = \gamma B_z - \gamma \frac{v}{c^2} E_y$$

- Un modo alternativo di scrivere le formule precedenti è

$$(cB'_z) = \gamma(cB_z) - \gamma\beta E_y \quad E'_y = -\gamma\beta(cB_z) + \gamma E_y$$

- È evidente la somiglianza con

$$(ct') = \gamma(ct) - \gamma\beta x \quad x' = -\gamma\beta(ct) + \gamma x$$

- Troviamo adesso la legge di trasformazione di B_y

- Disponiamo i piani di carica paralleli al piano $x-y$

- Con un calcolo analogo al precedente otteniamo

$$(cB'_y) = \gamma(cB_y) + \gamma\beta E_z \quad E'_z = \gamma\beta(cB_y) + \gamma E_z$$

- Notare il segni di E_z e B_y rispetto a E_y e B_z

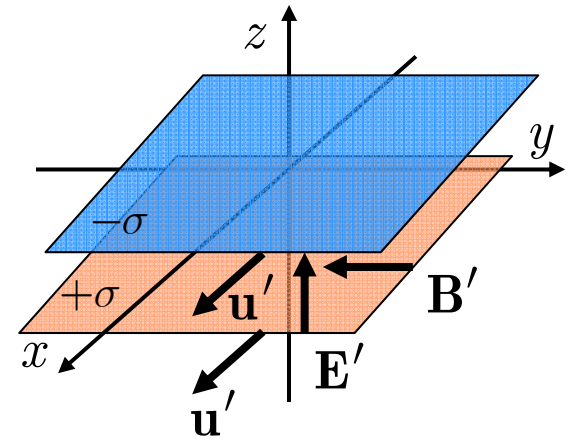
- Rimane da determinare il comportamento delle componenti dei campi lungo la direzione della velocità

- Per il campo E sappiamo che la componente parallela non cambia

$$E'_x = E_x$$

- Dimostriamo che anche per il campo B si ottiene lo stesso risultato

$$B'_x = B_x$$



Trasformazione dei campi E e B

- Per dimostrare l'ultima legge di trasformazione consideriamo un solenoide a riposo nel sistema S

- L'asse del solenoide è diretto lungo l'asse x
 - Sappiamo che il campo B è diretto lungo x e vale

$$B_x = n\mu_0 I$$

- Consideriamo adesso il sistema S' che si muove verso sinistra con velocità v

- Nel sistema S' il solenoide è in moto
 - Il campo B è comunque diretto lungo x'

$$B'_x = n'\mu_0 I'$$

- Nel sistema S' le lunghezze sono contratte

$$n' = \gamma n$$

- Nel sistema S' i tempi sono dilatati

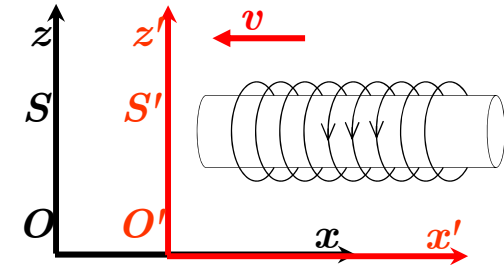
$$I' = \frac{dq}{dt'} = \frac{dq}{\gamma dt} = \frac{I}{\gamma}$$

- Otteniamo pertanto

$$B'_x = n'\mu_0 I' = \gamma n\mu_0 \frac{I}{\gamma} = n\mu_0 I = B_x$$

- Riassumendo, le leggi di trasformazione di E e B sono

$$\begin{array}{lll} E'_x = E_x & E'_y = \gamma(E_y - vB_z) & E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \\ B'_x = B_x & B'_y = \gamma(B_y + (v/c^2)E_z) & B'_z = \gamma(B_z - (v/c^2)E_y) \end{array}$$



Trasformazione dei campi E e B

- È spesso utile una forma vettoriale delle leggi di trasformazione
 - Per una velocità in direzione arbitraria
- Scomponiamo i campi in una componente parallela e in una perpendicolare a $\mathbf{v}$
 - $\mathbf{v}$ è la velocità del sistema S' rispetto al sistema S

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp} \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{B}'_{\perp}$$

- I campi nel sistema S' sono

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp})$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp})$$

- I casi che abbiamo studiato possono facilmente essere verificati ponendo

$$\mathbf{E}_{\parallel} = 0 \quad \mathbf{B}_{\parallel} = 0 \quad \mathbf{E}_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{e}}_y \quad \mathbf{B}_{\perp} = \mu_0 \sigma u \hat{\mathbf{e}}_z \quad \mathbf{v} = v \hat{\mathbf{e}}_x \quad \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$$

- Osserviamo che le trasformazioni dei campi mescolano le componenti di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$
 - Analogamente a quanto visto per t e r (o per E e p) $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ devono essere le componenti di un'unica grandezza fisica. Lo vedremo fra poco

Trasformazione dei campi E e B

- Le relazioni che abbiamo trovato permettono di calcolare la relazione fra campo elettrico e magnetico in alcuni casi semplici ma importanti

- Consideriamo il caso in cui B sia nullo nel sistema di riferimento S

- Ad es. il caso che abbiamo visto della carica in moto rettilineo uniforme

- Attenzione: la velocità della particella è $\mathbf{v}$, la velocità di S' è $-\mathbf{v}$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} & \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} & \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp}) \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} & \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma \mathbf{E}_{\perp} \\ \mathbf{B}'_{\parallel} = 0 & \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp} \end{array}$$

- Dato che $\mathbf{B}'_{\parallel} = 0$ possiamo dire che $\mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{B}'$
- Inoltre dato che per definizione $\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\parallel} = 0$ $\mathbf{v} \times \gamma \mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}'_{\perp} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}'$
- Pertanto nel sistema S' i campi sono

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma \mathbf{E}_{\perp} \quad \mathbf{B}' = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}' \quad \boxed{\mathbf{B} = 0}$$

- Analogamente se E è nullo in S

$$\begin{array}{ll} \mathbf{E}'_{\parallel} = 0 & \mathbf{E}'_{\perp} = -\gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp} \\ \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} & \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \mathbf{B}_{\perp} \end{array}$$

Notare che

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = 0$$

- Pertanto i campi in S' sono

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \mathbf{B}_{\perp} \quad \mathbf{E}' = -\gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B}' \quad \boxed{\mathbf{E} = 0}$$

Invarianti del campo

- Si può dimostrare che le seguenti due quantità hanno lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento inerziali

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \text{inv} \qquad E^2 - c^2 B^2 = \text{inv}$$

- Sono due invarianti relativistici
- Conseguenze[†]
 - Se in un sistema inerziale uno dei due campi è nullo, i due campi saranno ortogonali in ogni altro sistema di riferimento inerziale
 - Se in un sistema inerziale $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ e $E^2 - c^2 B^2 \neq 0$ allora
 - $E^2 - c^2 B^2 > 0$
 - Esiste un sistema di riferimento inerziale in cui $\mathbf{B} = 0$
 - La velocità relativa $\mathbf{v}$ di questo sistema inerziale è perpendicolare a $\mathbf{E}$ e a $\mathbf{B}$ e il suo modulo è $v = B/E$
 - $E^2 - c^2 B^2 < 0$
 - Esiste un sistema di riferimento inerziale in cui $\mathbf{E} = 0$
 - La velocità relativa $\mathbf{v}$ di questo sistema inerziale è perpendicolare a $\mathbf{E}$ e a $\mathbf{B}$ e il suo modulo è $v = c^2 E/B$
 - Se $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ e $E^2 - c^2 B^2 = 0$ ($E = cB$) questo vale in tutti i sistemi di riferimento inerziali
 - È un'onda elettromagnetica

• [†]Vedi ad es. Landau, Lifshitz - The Classical Theory of Fields - Butterworth-Heinemann 1987, §25 p. 67

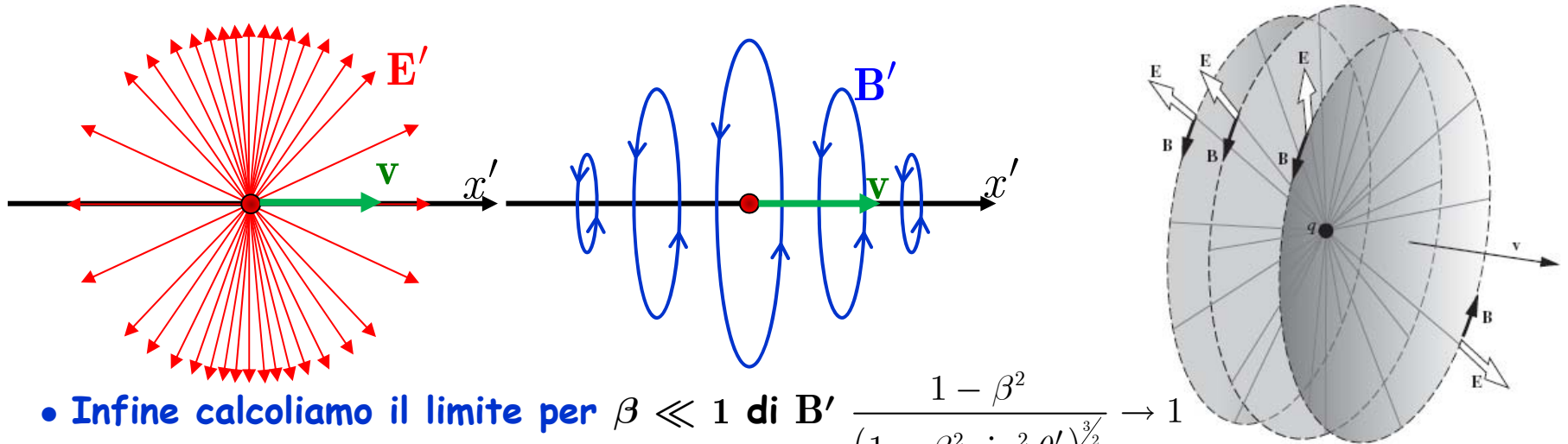
Carica in moto rettilineo uniforme

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma \mathbf{E}_{\perp} \quad \mathbf{B}' = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}' \quad \boxed{\mathbf{B} = 0}$$

- Possiamo utilizzare questo risultato per completare il calcolo dei campi per una carica in moto rettilineo uniforme

$$\mathbf{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta')^{3/2}} \hat{\mathbf{r}}' \quad \mathbf{B}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta')^{3/2}} \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}'$$

- Le linee di campo di $\mathbf{B}'$ sono delle circonferenze centrate sulla traiettoria



- Infine calcoliamo il limite per $\beta \ll 1$ di $\mathbf{B}'$ $\frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta')^{3/2}} \rightarrow 1$
- $$\mathbf{B}' \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q}{r'^2} \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r'^2} \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}'$$
- Confrontare con la legge di Biot-Savart $q\mathbf{v} = i d\mathbf{l} \quad 1/\epsilon_0 c^2 = \mu_0$

Trasformazione dei campi E e B

$$\begin{array}{lll} E'_x = E_x & E'_y = \gamma(E_y - vB_z) & E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \\ B'_x = B_x & B'_y = \gamma(B_y + (v/c^2)E_z) & B'_z = \gamma(B_z - (v/c^2)E_y) \end{array}$$

- Le formule di trasformazione trovate mostrano che né E né B possono essere visti come la componente spaziale di un quadri-vettore
 - Le leggi di trasformazione mescolano le componenti di E e B
- Nel caso dei quadri-vettori avevamo 4 componenti che nel passaggio da un sistema S a un sistema S' si trasformano con la legge

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

- Esistono altre grandezze matematiche con un numero maggiore di componenti
 - Ad esempio i tensori
 - Sia tri-dimensionali che quadri-dimensionali
- Un tensore quadri-dimensionale è una grandezza che ha $4 \times 4 = 16$ componenti
 - Organizzate con due indici di Lorentz

$$T^{\mu\nu} \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

- La legge di trasformazione di un tensore è

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} T^{\alpha\beta}$$

Trasformazione dei campi E e B

- I tensori possono avere due importanti proprietà
 - **Essere** simmetrici: $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$
 - Le componenti indipendenti sono $n = (16 - 4)/2 + 4 = 10$
 - **Essere** antisimmetrici: $T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}$
 - Le componenti con indici uguali sono nulle: $T^{\mu\mu} = 0$
 - Le componenti indipendenti sono $n = (16 - 4)/2 = 6$
- Le componenti del campo Elettrico e del campo di Induzione Magnetica sono 6
 - Si verifica che sono le componenti di un tensore antisimmetrico

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Lambda^0{}_\beta \\ \Lambda^1{}_\alpha \end{matrix}$$

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$$

Attenzione
Griffiths usa una
convenzione diversa

- Verifichiamo la legge di trasformazione di E'_x

$$\begin{aligned} E'_x/c &= F'^{10} = \Lambda^1{}_\alpha \Lambda^0{}_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^1{}_0 \Lambda^0{}_0 \cancel{F^{00}} + \Lambda^1{}_1 \Lambda^0{}_0 F^{10} + \Lambda^1{}_0 \Lambda^0{}_1 F^{01} + \Lambda^1{}_1 \Lambda^0{}_1 \cancel{F^{11}} \\ &= \gamma\gamma(E_x/c) + (-\gamma\beta)(-\gamma\beta)(-E_x)/c = E_x/c(\gamma^2 - \gamma^2\beta^2) = E_x/c \end{aligned}$$

Trasformazione dei campi E e B

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Lambda^0{}_\beta \\ \Lambda^2{}_\alpha \end{matrix}$$

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$$

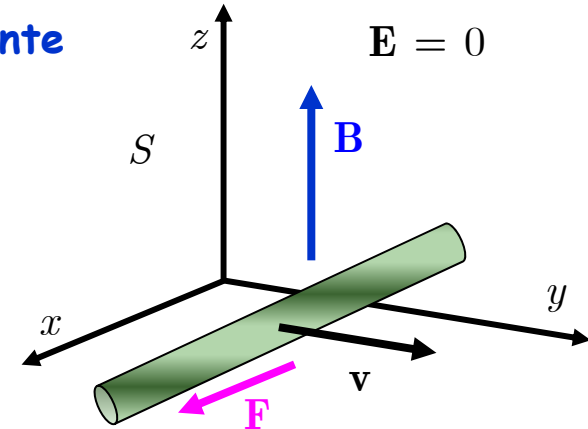
- Calcoliamo adesso la componente E'_y

$$\begin{aligned} E'_y/c &= F'^{20} = \Lambda^2{}_\alpha \Lambda^0{}_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^2{}_2 \Lambda^0{}_\beta F^{2\beta} = \Lambda^2{}_2 \Lambda^0{}_0 F^{20} + \Lambda^2{}_2 \Lambda^0{}_1 F^{21} \\ &= \gamma E_y/c - \gamma\beta B_z \end{aligned}$$

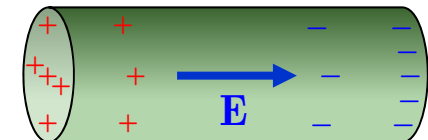
- La formula tensoriale riproduce le leggi di trasformazione che avevamo trovato

Barretta conduttrice in moto ($B \neq 0$)

- Consideriamo una regione dello spazio in cui è presente un campo magnetico B , diretto lungo l'asse z
 - Utilizziamo un sistema inerziale S
 - Il campo B è uniforme e non varia nel tempo
 - Non ci sono campi elettrici
- Consideriamo adesso una barretta conduttrice orientata parallelamente all'asse x
 - La barretta si muove con velocità costante v diretta lungo l'asse y
- Poiché si tratta di un conduttore al suo interno ci sono portatori di carica che possono muoversi
 - Tutte le cariche della barretta hanno una velocità v
 - Appare una forza di Lorentz
 - La forza è diretta nel senso positivo delle x per le cariche positive
- Sotto l'azione della forza le cariche si muovono
 - Tuttavia si giunge presto ad una condizione stazionaria
 - Le cariche spostandosi generano un campo elettrico E
 - In ogni punto all'interno della barretta la forza di Lorentz è bilanciata dalla forza elettrica qE



$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$



NB: non è una condizione statica

$$\mathbf{F} = -q\mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Barretta conduttrice in moto ($B \neq 0$)

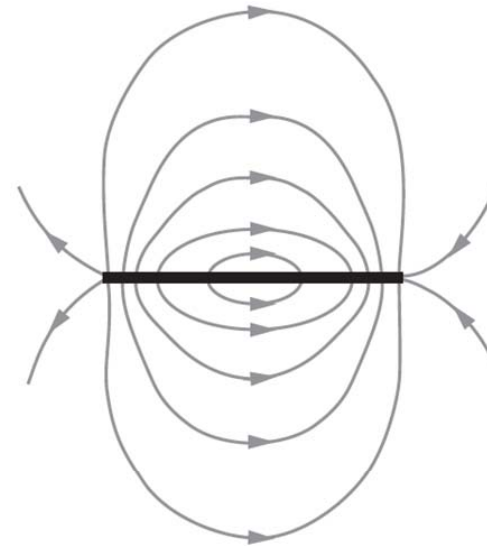
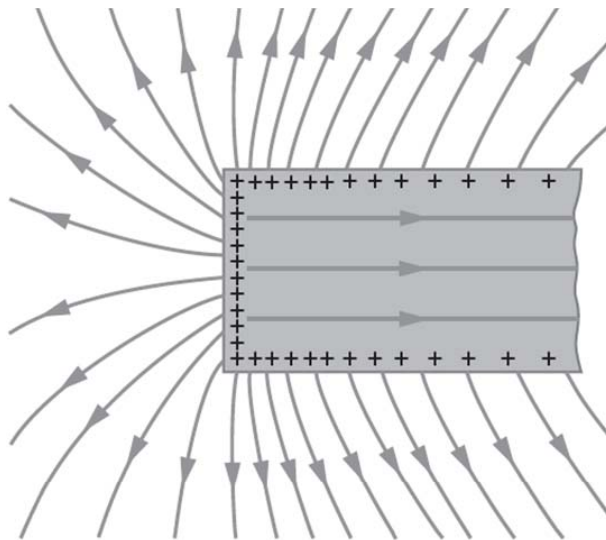
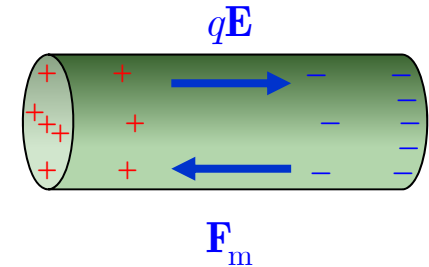
- Le cariche elettriche si distribuiscono sulla superficie della barretta in modo da generare all'interno un campo elettrico uniforme
- La forza di Lorentz è uniforme dentro la barretta

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- La forza elettrica bilancia la forza magnetica

$$\mathbf{F}_e = -q\mathbf{E} = -q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- La carica sulla superficie della barretta genera un campo anche all'esterno della barretta



Barretta conduttrice in moto ($B \neq 0$)

- Esaminiamo adesso il fenomeno descritto nel sistema inerziale S' in cui la barretta conduttrice è a riposo
 - In questo sistema il campo magnetico è differente
 - Appare anche un campo elettrico
- Ricordiamo il tensore campo elettromagnetico

• In S

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_z & 0 \\ 0 & B_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- La trasformazione in S' è $F' = \Lambda F \Lambda^T$

La matrice Λ è

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & -\gamma\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- È facile verificare che

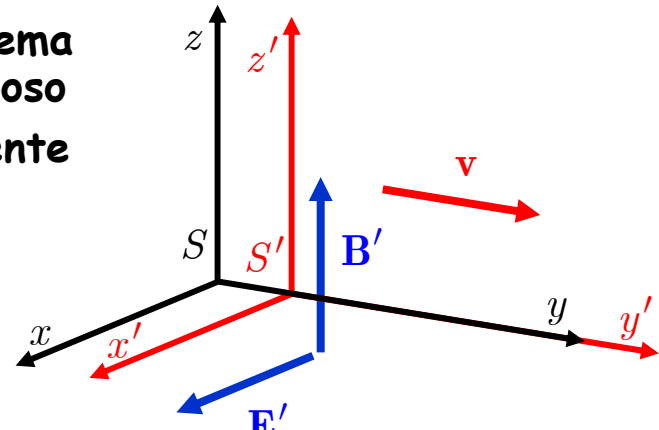
$$\Lambda F \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma\beta B_z & 0 & 0 \\ \gamma\beta B_z & 0 & -\gamma B_z & 0 \\ 0 & \gamma B_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Nel sistema S' il campo magnetico B' è ancora diretto lungo l'asse z' ed è diventato più intenso per il fattore relativistico γ

$$B' = \gamma B$$

- È comparso un campo elettrico E' diretto lungo l'asse x'

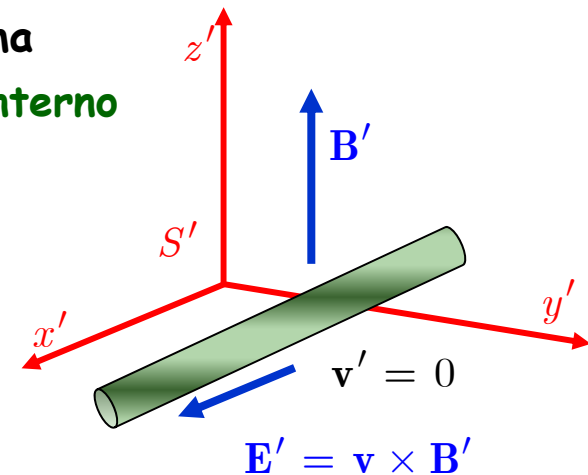
$$\frac{E'}{c} = \gamma\beta B_z \hat{e}_{x'} \quad E' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}'$$



Barretta conduttrice in moto ($B \neq 0$)

- Interpretiamo quello che succede nella barretta conduttrice nel sistema S'

- C'è un campo magnetico B' ma la barretta è ferma
 - Non ci sono forze magnetiche sulle cariche all'interno
- Nel sistema S' è presente un campo elettrico E'
 - Le cariche si distribuiscono sulla superficie del conduttore in modo da annullare il campo elettrico al suo interno
 - Come abbiamo studiato in elettrostatica
 - In S' la situazione è statica

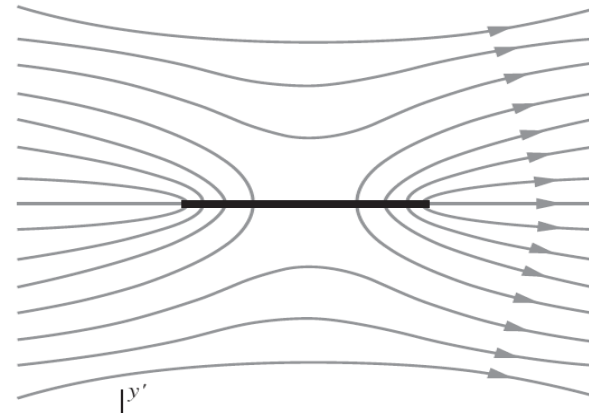
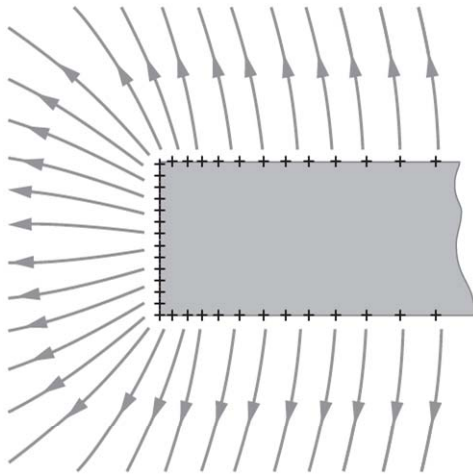


- Riepiloghiamo le due interpretazioni

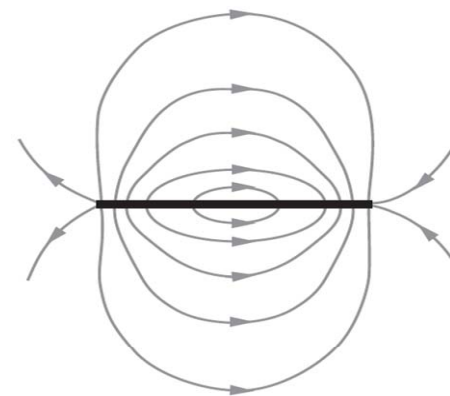
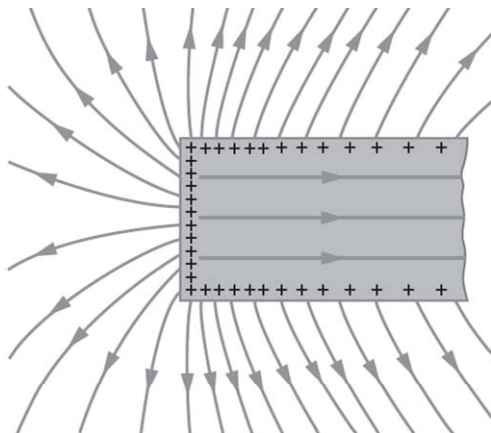
- Nel sistema S la barretta si muove e dentro la barretta c'è una forza magnetica che causa una redistribuzione della carica sulla superficie
 - La distribuzione di carica genera un campo elettrico che bilancia la forza magnetica
- Nel sistema S' c'è un campo elettrico E'
 - La carica si redistribuisce sulla superficie del conduttore e genera un campo elettrico che, sommato a E' , annulla il campo all'interno del conduttore

Barretta conduttrice in moto ($B \neq 0$)

- Nel sistema inerziale S'



- Nel sistema inerziale S

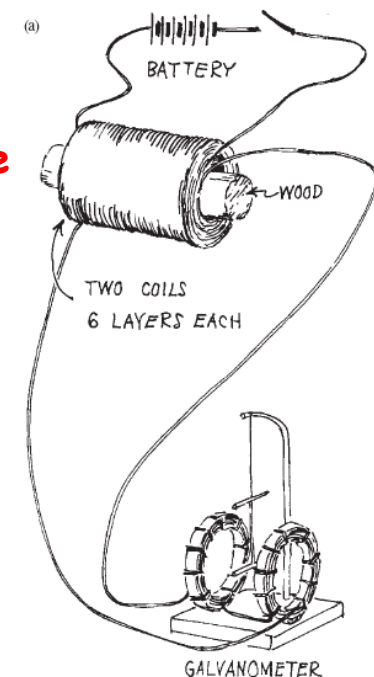


La scoperta di Faraday

- Ricordiamo la scoperta di Oersted del 1820 sulla generazione di forze magnetiche con le correnti elettriche
 - Dopo questa scoperta parte una intensa attività sperimentale e teorica
 - Fra le altre cose si cercano nelle correnti fenomeni analoghi a quelli classificati come "induzione elettrostatica"
 - Si cerca di capire se le correnti possono "indurre" correnti
- Pioniere di questi studi fu Michael Faraday, intorno al 1830
 - Inizialmente gli studi furono poco fruttuosi
 - Una corrente stazionaria circolante nel solenoide esterno NON induce una corrente in quello interno
 - Tuttavia una VARIAZIONE di corrente induce una corrente
 - Ad esempio all'apertura o alla chiusura dell'interruttore
- Con questi studi Faraday scopre l'importante fenomeno dell'induzione elettromagnetica
 - Ci permetterà di completare l'equazione del rotore di $\mathbf{E}$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

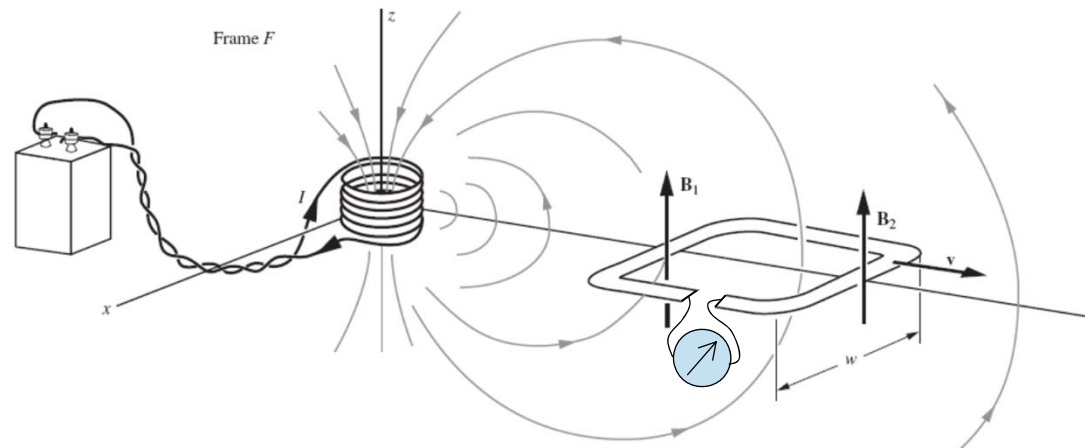
- Esaminiamo in maggiore dettaglio gli esperimenti condotti da Faraday



La scoperta di Faraday

- **Esperimento n. 1**

- **Supponiamo di avere un campo magnetico stazionario generato da un solenoide a riposo**



- **Supponiamo di avere una spira composta da materiale conduttore che si muove nella regione in cui è presente il campo magnetico (non uniforme)**
- **Nella spira compare una forza elettromotrice**

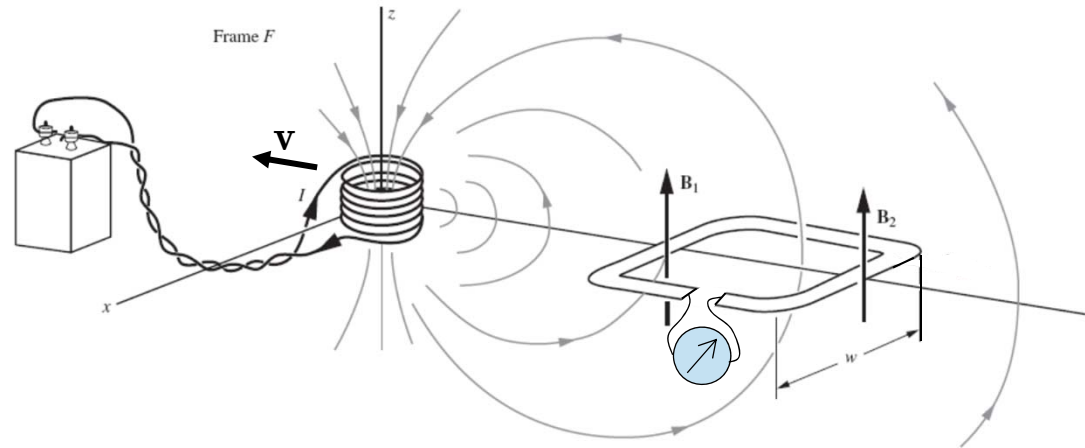
$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

- **Notiamo che il campo magnetico concatenato con la spira cambia nel tempo**

Legge di Faraday

- **Esperimento n. 2**

- **Immaginiamo adesso che la spira sia ferma e che a muoversi sia la sorgente del campo magnetico**

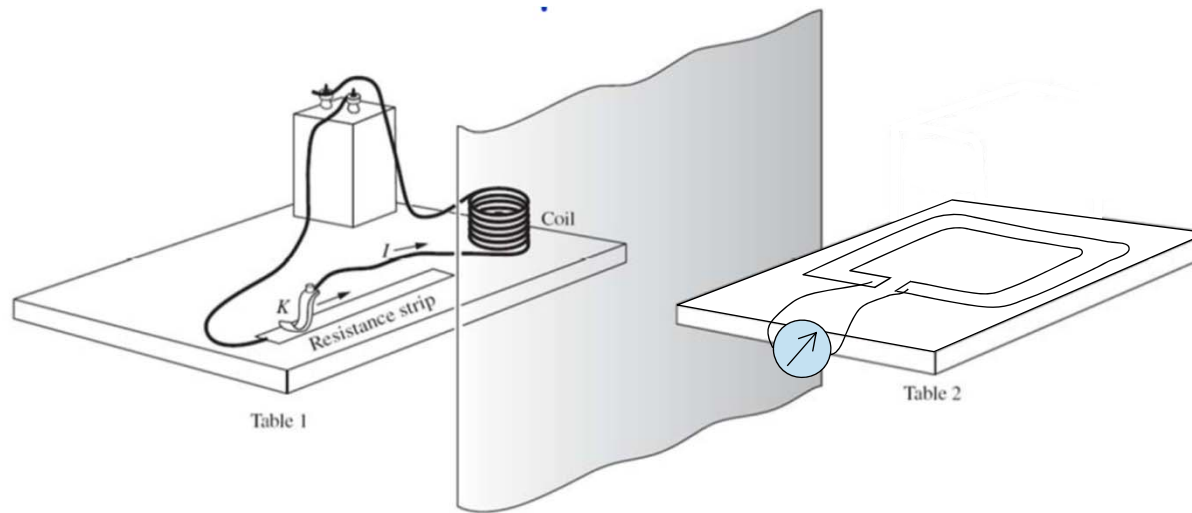


- **Anche in questo caso il risultato dell'esperimento è che compare una forza elettromotrice nella spira**
- Osserviamo che anche in questo caso il campo magnetico concatenato con la spira cambia nel tempo
- Tuttavia la spira è ferma
- Possiamo immaginare che il principio di relatività ristretta metta in relazione questo esperimento con il precedente

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Legge di Faraday

- Per finire consideriamo un terzo esperimento



- In questo caso non c'è movimento
- La corrente nel solenoide viene fatta variare nel tempo
- ANCHE IN QUESTO CASO si sviluppa una forza elettromotrice nella spira

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

- Questo esperimento è differente dai precedenti
 - Non si può pensare ad un cambio dei sistemi di riferimento

La legge di Faraday

- La grande intuizione di Faraday è che tutti e tre gli esperimenti possono essere spiegati con una unica legge
 - Faraday pone l'enfasi sul flusso del campo magnetico concatenato con la spira
 - In tutti e tre i casi il flusso varia nel tempo
 - Nel primo caso la spira si muove e il flusso calcolato a tempi diversi varia
 - Nel secondo caso la spira è ferma ma la sorgente si muove e il flusso concatenato con la spira varia nel tempo
 - Nel terzo caso non c'è movimento ma il flusso varia nel tempo perché varia la corrente nel solenoide, e di conseguenza varia B
- Faraday scopre che in tutti e tre i casi la forza elettromotrice che compare nella spira è

$$\oint_{spira} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

- Vedremo che è una legge molto complicata da capire e interpretare
 - Contiene due leggi fondamentali diverse
- Faraday la scopre nel 1831
 - Non è stata formulata la relatività ristretta (1905)
 - Non è stata formulata la legge della forza di Lorentz (1895)
 - Maxwell intuisce che si tratta di due leggi nel 1865

Spira in campo non uniforme

- Consideriamo una spira conduttrice rigida di lato w che si muove con velocità v lungo l'asse y (esperimento n. 1)

- La coordinata y del lato 3 è data da $y(t) = vt$

- Supponiamo un campo magnetico B dato dalla equazione

$$B(y) = B_0 \frac{y}{L} \hat{e}_z \quad L \text{ è una lunghezza costante nota}$$

- Il flusso concatenato al tempo t è

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = B_0 w \int_{y(t)}^{y(t)+w} \frac{y}{L} dy \\ &= B_0 \frac{w}{2L} [(y+w)^2 - y^2] = B_0 \frac{w}{2L} [2yw + w^2] = B_0 \frac{w^2}{2L} [2vt + w] \end{aligned}$$

- Secondo la legge di Faraday la forza elettromotrice è

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 \frac{w^2}{2L} \frac{d}{dt} [2vt + w] = -B_0 \frac{w^2}{2L} 2v$$

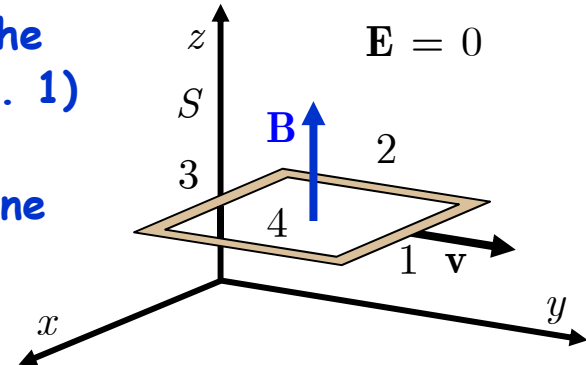
$$\mathcal{E} = -B_0 \frac{w^2}{L} v$$

- Per un confronto con le considerazioni seguenti calcoliamo la differenza fra il campo B sui lati 1 e 3 ad un generico tempo t

$$B(y_1) - B(y_3) \equiv B_1 - B_3 = B_0 \frac{vt + w}{L} - B_0 \frac{vt}{L} = B_0 \frac{w}{L}$$

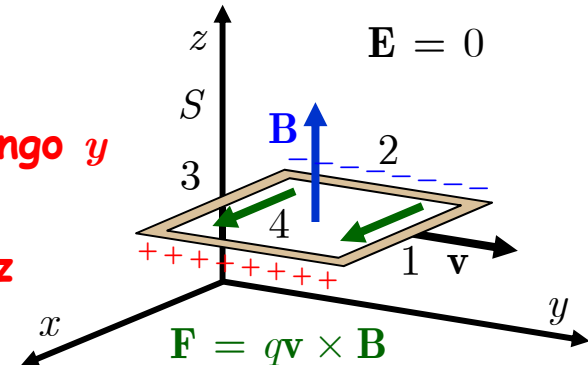
- In definitiva

$$\mathcal{E} = (B_3 - B_1)wv$$



Spira in campo non uniforme

- Interpretiamo il fenomeno alla luce delle leggi che conosciamo
 - Supponiamo che la spira sia vincolata a muoversi lungo y
 - Inoltre, supponiamo inizialmente campo B uniforme
 - C'è la componente magnetica della forza di Lorentz
 - Sulle cariche all'interno dei lati paralleli all'asse y (lati 2 e 4) si esercitano forze perpendicolari al filo che si elidono
 - Sulle cariche dei lati paralleli all'asse x (1 e 3) le forze sono lungo il filo
 - Le cariche nel conduttore raggiungono una condizione di equilibrio
 - I due lati della spira si caricano positivamente e negativamente
 - Ricordiamo l'esempio della barretta in movimento (vedi diapositiva [212](#))
- Immaginiamo adesso che il campo magnetico non sia uniforme lungo la direzione y anche se è costante nel tempo
 - Calcoliamo la circuitazione della forza magnetica al tempo t [$y = y(t)$]
 - La forza è perpendicolare al cammino lungo i lati 2 e 4



$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{F}(y) = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(y)$$

$$= \int_{l_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -qvB_1w + qvB_3w$$

$$B_1 = B(y_1) \quad B_3 = B(y_3)$$

Spira in campo non uniforme

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -qvB_1w + qvB_3w = qw(B_3 - B_1)v$$

- Viene compiuto un lavoro sui portatori di carica del conduttore della spira
- Il lavoro viene fatto sulla corrente elettrica che è stata provocata dalla forza di Lorentz
- Nella spira è presente una forza elettromotrice

$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = w(B_3 - B_1)v$$

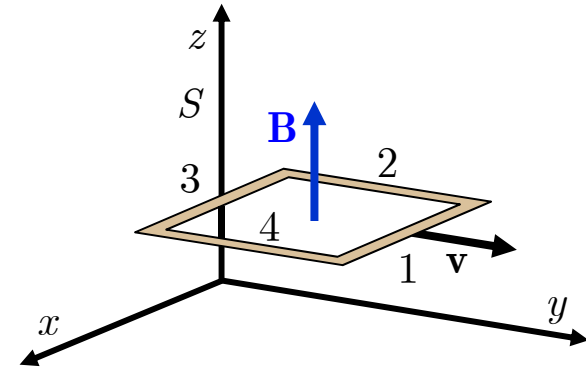
- Riscriviamo questa relazione in funzione del flusso del campo magnetico $\mathbf{B}$ attraverso la superficie della spira
- Consideriamo due posizioni a e b della spira a due istanti di tempo t e $t + dt$
- Il flusso del campo magnetico è
- Calcoliamo la variazione del flusso

$$\begin{aligned} d\Phi &= \Phi_b - \Phi_a = B_1wvdt - B_3wvdt \\ &= w(B_1 - B_3)vdt = -w(B_3 - B_1)vdt \end{aligned}$$

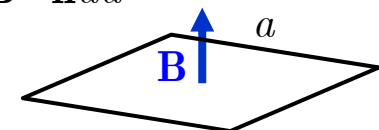
- Confrontando con l'espressione per $\mathcal{E}$

$$d\Phi = -\mathcal{E}dt$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$



$$\Phi_a = \int_{S_a} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$



$$\Phi_b = \int_{S_b} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

