

Quadri-vettori

- Abbiamo visto che nel passaggio da un sistema di riferimento all'altro la posizione e il tempo di un evento si trasformano "mescolandosi"
- Lo spazio e il tempo non sono quantità indipendenti
- Sono le componenti di una grandezza fisica nuova
 - Il quadri-vettore posizione (ct, x, y, z)
- Introduciamo adesso una notazione più efficiente
 - Cambiamo nome alle coordinate spaziali $(x, y, z) \rightarrow (x^1, x^2, x^3)$
 - Introduciamo la coordinata temporale $x^0 = ct$
- Infine introduciamo le grandezze

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

- A questo punto possiamo riscrivere le trasformazioni di Lorentz in una forma più compatta ed elegante

- In forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - vx / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma x^0 - \gamma\beta x^1 \\ x'^1 &= -\gamma\beta x^0 + \gamma x^1 \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned}$$

Quadri-vettori

- Sappiamo inoltre che la trasformazione di Lorentz, per costruzione, lascia invariata la quantità

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

- Nella nuova notazione la quantità invariante è $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$
- Infatti, calcoliamo $(x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2$

- Sostituiamo le quantità trasformate

$$(\gamma x^0 - \gamma \beta x^1)^2 - (-\gamma \beta x^0 + \gamma x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma x^0 - \gamma \beta x^1 \\ x'^1 &= -\gamma \beta x^0 + \gamma x^1 \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3 \end{aligned}$$

$$\gamma^2 (x^0)^2 + \gamma^2 \beta^2 (x^1)^2 - 2\gamma^2 \beta x^0 x^1 - \gamma^2 \beta^2 (x^0)^2 - \gamma^2 (x^1)^2 + 2\gamma^2 \beta x^0 x^1 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

$$(\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2)(x^0)^2 - (\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2)(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

- Le due quantità sono uguali se $\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2 = 1 = \gamma^2(1 - \beta^2)$ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$
 - Si verifica facilmente
 - È il determinante della matrice
- La Trasformazione di Lorentz ha determinante 1

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Componenti Covarianti e Controvarianti

- Le componenti del quadri-vettore che abbiamo definito sono le componenti controvarianti del quadri-vettore posizione

$$x^\mu \quad \mu = 0, 3$$

- Vengono indicate con un indice in alto
- Nella Teoria della Relatività si usano anche le componenti covarianti

$$x_0 = x^0$$
$$x_k = -x^k \quad k = 1, 3$$

- Si indicano con un indice posto in basso
- Sono definite come $x_\mu = (ct, -x, -y, -z)$
- Tramite i due tipi di componenti la quantità invariante è

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 = \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu$$

- Questa espressione ricorre molto spesso e pertanto è abitudine comune sottintendere la sommatoria

$$x^\mu x_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu$$

Prende il nome di
modulo quadrato
del quadrivettore e si indica

- L'indice μ è detto muto o saturato
- Gli indici saturati DEVONO sempre essere in coppia ed inoltre essere uno in alto e uno in basso

$$x \cdot x = x^\mu x_\mu$$

Componenti Covarianti e Controvarianti

- Per passare facilmente dalle componenti covarianti a quelle controvarianti si definisce il tensore metrico $g^{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Le precedenti relazioni fra x^μ e x_μ si esprimono adesso semplicemente

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

- Il modulo quadrato del vettore si può anche scrivere come

$$x \cdot x = x^\mu x_\mu = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

- Analogamente si definisce il prodotto scalare di due quadri-vettori

$$x \cdot y = x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu = g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$$

- È facile verificare che anche il prodotto scalare è invariante per trasformazioni di Lorentz

- Un'utile espressione è il tensore $g^{\mu\nu}$ con indici covarianti e controvarianti

$$g^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} \equiv \delta^\mu{}_\nu$$

$$g^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

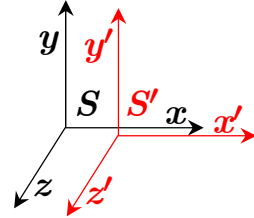
Lezione n. 27 - 28.03.2023

Quadrivettori - Tempo proprio
Cenni alla dinamica relativistica
Forza magnetica e relatività
Trasformazione dei campi E e B

Anno Accademico 2022/2023

Trasformazioni di Lorentz

- Abbiamo visto che in una trasformazione di Lorentz lungo l'asse x le componenti del quadri-vettore tempo-posizione si trasformano secondo la legge



$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

- Il prodotto matriciale indicato si può esprimere in forma tensoriale

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

sottointesa la somma dell'indice contratto ν

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix}$$

- Notare le posizioni degli indici μ e ν e i segni degli elementi della matrice che corrisponde a questa disposizione degli indici
- Altre forme della matrice

$$\Lambda_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\nu}$$

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ -\Lambda^1_0 & -\Lambda^1_1 & -\Lambda^1_2 & -\Lambda^1_3 \\ -\Lambda^2_0 & -\Lambda^2_1 & -\Lambda^2_2 & -\Lambda^2_3 \\ -\Lambda^3_0 & -\Lambda^3_1 & -\Lambda^3_2 & -\Lambda^3_3 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^{\mu\nu} = g^{\alpha\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha}$$

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & -\Lambda^0_1 & -\Lambda^0_2 & -\Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & -\Lambda^1_1 & -\Lambda^1_2 & -\Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & -\Lambda^2_1 & -\Lambda^2_2 & -\Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & -\Lambda^3_1 & -\Lambda^3_2 & -\Lambda^3_3 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{\mu}{}^{\nu} = g_{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \Lambda^{\alpha}_{\beta}$$

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & -\Lambda^0_1 & -\Lambda^0_2 & -\Lambda^0_3 \\ -\Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ -\Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ -\Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix}$$

Trasformazioni di Lorentz

- L'invarianza del prodotto scalare ci permette di trovare alcune proprietà che caratterizzano una trasformazione di Lorentz

$$x' \cdot y' = x'^{\mu} y'_{\mu} = g_{\mu\nu} x'^{\mu} y'^{\nu} = x \cdot y = x^{\mu} y_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu}$$

- Introducendo le coordinate nel sistema S'

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad y'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} y^{\nu}$$

- Si ottiene

$$x'^{\mu} y'_{\mu} = g_{\mu\nu} x'^{\mu} y'^{\nu} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} x^{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} y^{\beta} = (g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta}) x^{\alpha} y^{\beta} = g_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta}$$

- In conclusione

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} = g_{\alpha\beta}$$

in forma matriciale

$$\Lambda^T G \Lambda = G$$

- Moltiplicando ambo i membri per $g^{\beta\sigma}$ si ottiene

$$g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} g^{\beta\sigma} = g_{\alpha\beta} g^{\beta\sigma} = \delta_{\alpha}^{\sigma}$$

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\beta} g^{\beta\sigma} = \delta_{\alpha}^{\sigma}$$

$$\Lambda \Lambda^{-1} = I$$

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda_{\mu}^{\sigma} = \delta_{\alpha}^{\sigma}$$

$$(\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\mu} = \Lambda_{\mu}^{\sigma}$$

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ \Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ \Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{\mu}^{\sigma} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & -\Lambda^0_1 & -\Lambda^0_2 & -\Lambda^0_3 \\ -\Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 & \Lambda^1_2 & \Lambda^1_3 \\ -\Lambda^2_0 & \Lambda^2_1 & \Lambda^2_2 & \Lambda^2_3 \\ -\Lambda^3_0 & \Lambda^3_1 & \Lambda^3_2 & \Lambda^3_3 \end{pmatrix}$$

- Esercizio: verificare che

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Tempo proprio

- Dal momento che le trasformazioni di Lorentz sono lineari è evidente che
 - Se x^μ e y^μ sono quadri-vettori anche la loro somma $x^\mu + y^\mu$ o la loro differenza $x^\mu - y^\mu$ è un quadrivettore
 - Se x^μ è un quadri-vettore e a uno scalare allora ax^μ è anch'esso un quadrivettore
 - Il termine scalare si riferisce a grandezze che non cambiano in una trasformazione di Lorentz
 - Ad esempio c , la carica, la lunghezza a riposo, la massa a riposo ...
- Le considerazioni precedenti ci permettono di definire, a partire da x^μ l'importante quadri-vettore dx^μ che è la differenza di due punti infinitamente vicini dello spazio-tempo
- È di particolare importanza il modulo di dx^μ

$$d\tau^2 = dx^\mu dx_\mu = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2$$

$$d\tau = c dt \sqrt{1 - \frac{d\mathbf{r}^2}{c^2 dt^2}} \quad d\tau = c dt \sqrt{1 - \beta^2}$$

- Lo scalare $d\tau$ è chiamato tempo proprio
 - Coincide con il tempo ordinario nel sistema di riposo della particella ($\beta = 0$)
- È opportuno sottolineare che $d\tau$ è invariante
 - È lo stesso in tutti i sistemi di riferimento

Trasformazione della velocità

- Sappiamo che la velocità della luce è invariante per trasformazioni di Lorentz (secondo postulato di Einstein)

- Ovviamente questo vale solo per c

- Come cambia la velocità di un punto P cambiando sistema di riferimento ?

- Consideriamo i soliti sistemi S e S' (in moto con velocità v) e scriviamo le leggi di trasformazione del differenziale dx^μ

$$\begin{aligned}x^0 &= \gamma x'^0 + \gamma \beta x'^1 \\x^1 &= \gamma \beta x'^0 + \gamma x'^1 \\x^2 &= x'^2 \\x^3 &= x'^3\end{aligned}$$

- Il vettore x^μ descrive il moto del punto P

$$dx^0 = \gamma_v (dx'^0 + \beta_v dx'^1)$$

$$dx^2 = dx'^2$$

$$dx^1 = \gamma_v (\beta_v dx'^0 + dx'^1)$$

$$dx^3 = dx'^3$$

$$\beta_v = \frac{v}{c}$$

$$\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_v^2}}$$

- La velocità $u = (u^1, u^2, u^3)$ di P in S è (ricordiamo che $dx^0 = cdt$)

$$u^1 = c \frac{dx^1}{dx^0} = c \frac{\gamma_v (\beta_v dx'^0 + dx'^1)}{\gamma_v (dx'^0 + \beta_v dx'^1)} = c \frac{dx'^0 \left(\beta_v + \frac{dx'^1}{dx'^0} \right)}{dx'^0 \left(1 + \beta_v \frac{dx'^1}{dx'^0} \right)} = \frac{v + u'^1}{1 + \frac{u'^1 v}{c^2}}$$

$$\frac{dx'^1}{dx'^0} = \frac{u'^1}{c}$$

- La velocità v è in direzione dell'asse x (x^1)

- In forma vettoriale la relazione trovata diventa

$$u_{\parallel} = \frac{u'_{\parallel} + v}{1 + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} / c^2}$$

Trasformazione della velocità

- Un calcolo analogo per le altre componenti

$$\begin{aligned}
 u^2 &= c \frac{dx^2}{dx^0} = c \frac{dx'^2}{\gamma_v (dx'^0 + \beta_v dx'^1)} = c \frac{dx'^2}{\gamma_v dx'^0 \left(1 + \beta_v \frac{dx'^1}{dx'^0} \right)} \\
 &= \frac{c \frac{dx'^2}{dx'^0}}{\gamma_v \left(1 + \frac{vu'^1}{c^2} \right)} = \frac{u'^2}{\gamma_v \left(1 + \frac{vu'^1}{c^2} \right)}
 \end{aligned}$$

E per la terza componente $u^3 = \frac{u'^3}{\gamma_v \left(1 + \frac{vu'^1}{c^2} \right)}$

- In forma vettoriale
- Osservazioni

$$\mathbf{u}_\perp = \frac{\mathbf{u}'_\perp}{\gamma_v \left(1 + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} / c^2 \right)}$$

$$\mathbf{u}_\parallel = \frac{u'_\parallel + v}{1 + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} / c^2}$$

- La legge di trasformazione della velocità sono molto diverse da quelle di x^μ
 - In particolare osserviamo che cambia anche la componente perpendicolare a v
- È facile verificare che se $|\mathbf{u}'| = c$ anche $|\mathbf{u}| = c$
 - La velocità della luce è la stessa nei due sistemi
- È facile verificare che se in un urto la quantità di moto (non relativistica) è conservata nel sistema S non lo è nel sistema S'
 - R. Resnick - Introduction to special relativity p. 111

Quadri-velocità

- Le considerazioni precedenti implicano che la velocità non è parte di un quadri-vettore
 - Vorremmo un quadri-vettore che contenesse le informazioni della velocità
- Ricordiamo che x^ν descrive il moto di un punto ed è un quadri-vettore
 - Anche il differenziale dx^ν è un quadri-vettore
 - Il differenziale $d\tau$ è un invariante (è uno scalare)
- Pertanto è un quadri-vettore anche la grandezza

$$\eta^\nu = \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

- Ricordiamo l'espressione che abbiamo trovato per $d\tau$ $d\tau = cdt\sqrt{1 - \beta^2}$
- Esaminiamo le componenti di η^ν

$$\eta^0 = \frac{dx^0}{\sqrt{1 - \beta^2} cdt} = \gamma \quad \eta^k = \frac{dx^k}{\sqrt{1 - \beta^2} cdt} = \gamma \frac{v^k}{c} = \gamma \beta^k \quad \eta^\nu = \left(\gamma, \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \right)$$

- Vediamo che la velocità ordinaria compare nella parte spaziale del quadrivettore ed è moltiplicata per il fattore relativistico γ
- Calcoliamo il modulo della quadri-velocità

$$(\eta)^2 = \eta^\nu \eta_\nu = \gamma^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} = \gamma^2 (1 - \beta^2) = 1$$

Quadri-momento

- La quadri-velocità η^ν può essere utilizzata per costruire un quadrivettore di importanza centrale nella teoria relativistica

- Moltiplichiamo la quadri-velocità η^ν per lo scalare $m_o c^2$

- La grandezza m_o è la massa della particella quando questa è a riposo

- Otteniamo un quadrivettore

$$p^\nu = m_o c^2 \eta^\nu = m_o c^2 \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

- Utilizzando l'espressione esplicita per le componenti di $\eta^\nu = (\gamma, \gamma \mathbf{v}/c)$

$$p^0 = m_o c^2 \gamma \quad p^k = m_o c^2 \gamma \frac{v^k}{c} \quad p^\nu = (m_o c^2 \gamma, m_o c \gamma \mathbf{v})$$

- Osserviamo che le dimensioni di p^0 e di p^k ($k = 1, 3$) sono le stesse

- In particolare hanno le dimensioni di un'energia

- Una definizione della parte spaziale che mantiene le dimensioni della meccanica classica è

$$\mathbf{p} = m_o \gamma \mathbf{v}$$

- Si verifica sperimentalmente che il quadrivettore appena definito ha le proprietà della quantità di moto e dell'energia

- Il quadri-momento totale di un sistema di particelle isolate si conserva in tutti i sistemi di riferimento inerziali S

- Infine, calcoliamo il modulo di p^ν

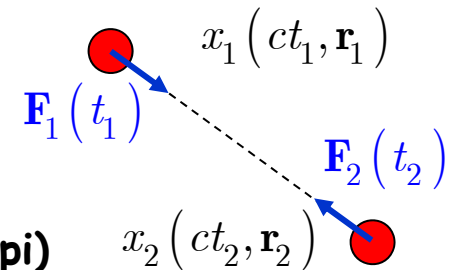
$$p^2 \equiv p^\nu p_\nu = (m_o c^2 \gamma)^2 - (m_o c \gamma \mathbf{v})^2 = m_o^2 c^4 \gamma^2 (1 - \beta^2) = m_o^2 c^4$$

Leggi di Newton e forza

- La prima legge di Newton coincide con il primo postulato di Einstein
 - Tutte le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali. Non esiste un sistema di riferimento privilegiato
 - Questo postulato è simile a quello Galileiano
 - Einstein lo rafforza assumendo che valga per TUTTE le leggi fisiche
 - Vale anche per l'elettromagnetismo
- La seconda legge di Newton è valida anche in relatività ristretta purché espressa in funzione della derivata della quantità di moto
 - Inoltre la quantità di moto deve essere quella relativistica

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \mathbf{p} = m_o \gamma \mathbf{v} \quad \text{non in forma covariante}$$

- A differenza delle prime due la terza legge di Newton non vale nella formulazione relativistica
 - Nella meccanica classica le forze di azione e reazione sono simultanee: $\mathbf{F}_1(t) = -\mathbf{F}_2(t)$
 - In relatività ristretta due punti nello spazio tempo x_1 e x_2 , separati spazialmente, possono essere
 - Simultanei in un sistema di riferimento ($t_1 = t_2$)
 - Non simultanei in un altro sistema di riferimento
 - È importante il tempo di propagazione della forza (campi)



Esempio di moto relativistico

- Una particella è soggetta ad una forza costante F . Calcolare la sua posizione in funzione del tempo. (Griffiths esempio 12.10)

- L'equazione del moto è $\frac{dp}{dt} = F$ $p(t) = Ft + k$ $p(0) = 0 \rightarrow k = 0$

- Ricordando la definizione di momento relativistico $p = \frac{m_0 c \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = Ft$
- Risolvendo per β

$$\frac{m_0^2 c^2 \beta^2}{1 - \beta^2} = F^2 t^2 \quad m_0^2 c^2 \beta^2 = F^2 t^2 - F^2 t^2 \beta^2 \quad (m_0^2 c^2 + F^2 t^2) \beta^2 = F^2 t^2$$

$$v = \beta c = c \frac{Ft}{\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}} \quad \text{Per } Ft \ll m_0 c \quad v \approx \frac{F}{m_0} t$$

Limite classico

$$\text{Per } t \rightarrow \infty \quad \beta \rightarrow 1$$

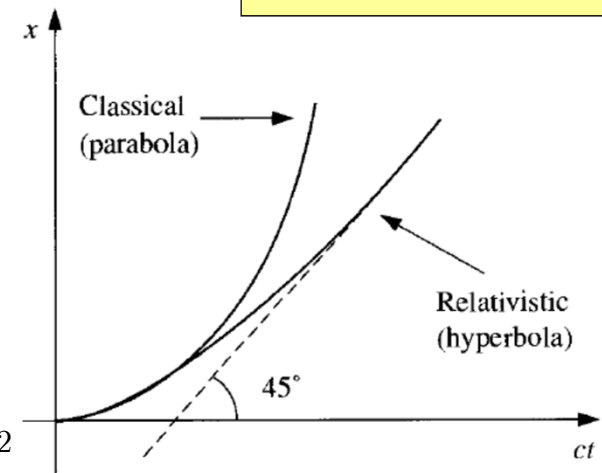
Limite relativistico

- La posizione si trova integrando

$$x(t) = x_0 + c \int \frac{Ft}{\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}} dt$$

$$x(t) = x_0 + \frac{m_0 c^2}{F} \left[\sqrt{1 + \frac{F^2 t^2}{m_0^2 c^2}} - 1 \right]$$

$$\text{Per } Ft \ll m_0 c \quad x(t) \approx + \frac{m_0}{F} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{F^2 t^2}{m_0^2} - 1 \right] = \frac{1}{2} \frac{F}{m_0} t^2$$



Teorema dell'energia cinetica

- Vediamo come si trasforma il teorema dell'energia cinetica
 - Il lavoro fatto è uguale alla variazione dell'energia cinetica

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot d\mathbf{l} = \int \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dt} dt = \int \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{u} dt$$

- $\mathbf{u}$ è la velocità del corpo a cui è applicata la forza

- Sviluppiamo l'integrando

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{u} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) \cdot \mathbf{u} = \left[\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} m_0 \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{\frac{u}{c^2} \frac{du}{dt}}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} m_0 \mathbf{u} \right] \cdot \mathbf{u} \\ &= \frac{1}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} m_0 u \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} = \frac{d}{dt} m_0 \gamma c^2 = \frac{dE}{dt} \end{aligned}$$

$u \frac{du}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{u}$

$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{u} = \frac{dE}{dt}$

- Inseriamo nella formula del lavoro

$$W = \int_0^t \frac{d\mathbf{p}}{d\alpha} \cdot \mathbf{u} d\alpha = \int_0^t \frac{dE}{d\alpha} d\alpha = \int_0^t dE = E_t - E_0 = m_0 c^2 \gamma - m_0 c^2$$

- Si definisce l'energia cinetica

$K = m_0 c^2 \gamma - m_0 c^2$

Trasformazione della forza

- Vogliamo trovare le leggi di trasformazione della forza

- Calcoliamo la forza $\mathbf{F}'$ nel sistema S'
- Consideriamo una componente trasversale a $\mathbf{v}$

$$F'_y = \frac{dp'_y}{dt'} = \frac{dp_y}{\gamma dt - \gamma \beta/c dx} = \frac{dp_y/dt}{\gamma - \gamma \beta/c dx/dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{F_y}{1 - \beta u_x/c}$$

- $\mathbf{u}$ è la velocità, in S , del corpo a cui è applicata la forza

- Si trova una formula analoga per F_z
- La componente F_x , parallela a $\mathbf{v}$, è più complicata

$$F'_x = \frac{dp'_x}{dt'} = \frac{-\gamma \beta/c dE + \gamma dp_x}{\gamma dt - \gamma \beta/c dx} = \frac{dp_x/dt - \beta/c dE/dt}{1 - \beta/c dx/dt}$$

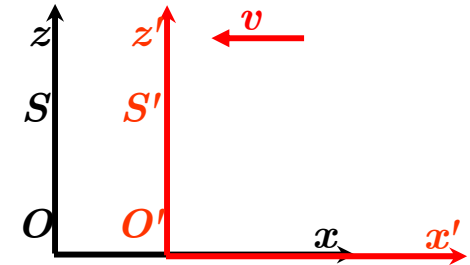
$$= \frac{F_x - \beta/c dE/dt}{1 - \beta u_x/c}$$

ricordiamo $\frac{dE}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$

- Otteniamo infine

$$F'_x = \frac{F_x - \beta (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u})/c}{1 - \beta u_x/c} \quad F'_y = \frac{1}{\gamma} \frac{F_y}{1 - \beta u_x/c} \quad F'_z = \frac{1}{\gamma} \frac{F_z}{1 - \beta u_x/c}$$

- Sottolineiamo che $\mathbf{u}$ è la velocità del corpo NEL SISTEMA S



$$\begin{aligned} ct' &= \gamma ct - \gamma \beta x \\ x' &= -\gamma \beta ct + \gamma x \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E'/c &= \gamma E/c - \gamma \beta p_x \\ p'_x &= -\gamma \beta E/c + \gamma p_x \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \end{aligned}$$

Trasformazione della forza

- La legge di trasformazione della forza che abbiamo trovato è piuttosto complicata
 - **Acquista una forma più semplice nel caso in cui il corpo su cui agisce la forza si trovi a riposo nel sistema S : $\mathbf{u} = 0$**
 - **In questo caso si ottiene**

$$F'_x = \frac{F_x - \beta (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u})/c}{1 - \beta u_x/c} \rightarrow F_x \quad F'_y = \frac{1}{\gamma} \frac{F_y}{1 - \beta u_x/c} \rightarrow \frac{F_y}{\gamma} \quad F'_z = \frac{1}{\gamma} \frac{F_z}{1 - \beta u_x/c} \rightarrow \frac{F_z}{\gamma}$$

- **In forma vettoriale**

$$\mathbf{F}'_{\parallel} = \mathbf{F}_{\parallel} \quad \mathbf{F}'_{\perp} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{F}_{\perp}$$

- Come per la quadri-velocità si può definire una forza quadri-dimensionale
 - **La forza di Minkowski ($\mathbf{u}$ è la velocità del corpo in S)**

$$f^{\mu} = \frac{dp^{\mu}}{d\tau} \quad f^0 = \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau} \quad \mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} \mathbf{F}$$

- **Vale la pena osservare che la forza di Lorentz è una forza ordinaria e non una forza di Minkowski**
- **Non svilupperemo ulteriormente la dinamica relativistica**

Forza su una carica in moto

- Fino ad ora abbiamo esaminato il caso della forza elettrica esercitata su una carica ferma
 - Abbiamo calcolato il campo elettrico generato da una carica in moto e il suo effetto su una carica ferma
- D'altro canto sappiamo che quando una particella è in movimento su di essa agiscono forze magnetiche
 - Dovremmo pertanto calcolare anche le leggi di trasformazione dei campi magnetici
 - Lo faremo in seguito
- Per la nostra discussione quindi esamineremo il problema nel sistema in cui la carica è a riposo
 - Eventuali campi magnetici non hanno effetto su cariche ferme
 - È sufficiente calcolare solo gli effetti dei campi elettrici
- Naturalmente una carica soggetta a forza viene accelerata
 - Esamineremo pertanto il problema in un sistema in cui la carica è istantaneamente a riposo
 - Abbiamo appena trovato la legge che trasforma la forza su un corpo fermo fra due sistemi inerziali in moto relativo con velocità v (γ, β)

$$\mathbf{F}_{\parallel} = \frac{d\mathbf{p}_{\parallel}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}'_{\parallel}}{dt'} = \mathbf{F}'_{\parallel} \qquad \mathbf{F}_{\perp} = \frac{d\mathbf{p}_{\perp}}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{d\mathbf{p}'_{\perp}}{dt} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{F}'_{\perp}$$

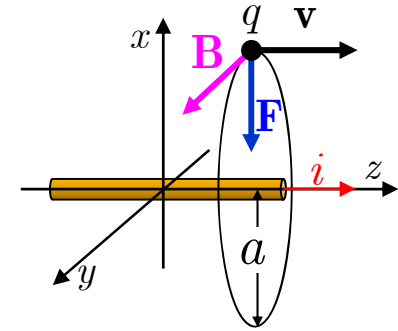
Forza su una carica in movimento

- Abbiamo visto che un filo percorso da corrente genera un campo magnetico

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}$$

- Abbiamo visto inoltre che su una carica $q > 0$ in movimento si esercita una forza

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

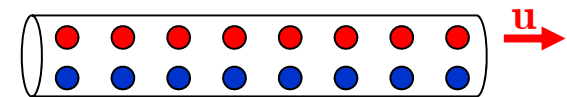


- Possiamo tuttavia analizzare il fenomeno in un sistema di riferimento S' in cui la carica q è a riposo
 - Ad esempio un sistema che si muove con la stessa velocità v della carica q
- In questo sistema la velocità è nulla e anche la forza magnetica su q è nulla
 - D'altro canto la forza non può scomparire passando da un sistema inerziale S ad un altro sistema inerziale S'
 - Chi esercita la forza sulla carica q nel sistema inerziale S' ?
- Analizziamo il filo nel sistema S

- Per semplificare supponiamo che la corrente sia dovuta ai portatori positivi
- Supponiamo inoltre che il filo sia neutro

- Le cariche hanno densità lineare

$$\lambda^+ = +\lambda \quad \lambda^- = -\lambda \quad i = \lambda u$$

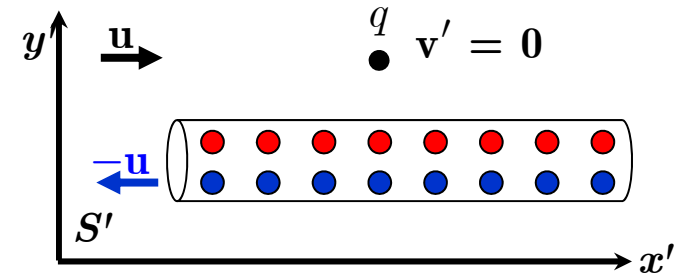


- Osserviamo che il filo non genera alcun campo elettrico: $\lambda^+ + \lambda^- = 0$
- Per semplificare ulteriormente il calcolo supponiamo che $v = u$
- Utilizzando λ , a , u la forza sulla carica q in moto è

$$F = qu \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\lambda u}{a}$$

Forza su una carica in movimento

- Analizziamo adesso il filo nel sistema S' in cui la carica q è ferma
- Le cariche positive sono adesso ferme
- Le cariche negative si muovono verso sinistra con velocità $-u$



- Le cariche negative (che si muovono) generano un campo magnetico
 - Tuttavia la carica q è adesso ferma
 - Non ci sono effetti magnetici dovuti al moto delle cariche negative
- Tuttavia le densità di carica cambiano: $\lambda' = \gamma\lambda$
- La densità delle cariche negative è adesso

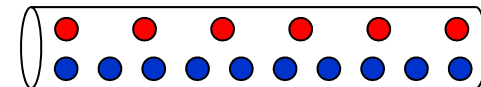
$$\lambda'^{-} = \frac{-\lambda}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}$$

- Le cariche positive sono adesso a riposo e hanno una densità $\lambda'^{+} = \lambda_0$
 - La densità λ^{+} che avevano nel sistema di partenza teneva conto del fatto che erano in movimento

$$\lambda^{+} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} = \frac{\lambda'^{+}}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}$$

$$\lambda'^{+} = \lambda^{+} \sqrt{1 - u^2 / c^2} = +\lambda \sqrt{1 - u^2 / c^2}$$

- $\lambda'^{+} \neq \lambda'^{-}$ Il filo è adesso carico!



Forza su una carica in movimento

- Calcoliamo la densità di carica del filo

$$\lambda'^{-} = \frac{-\lambda}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} \quad \lambda'^{+} = +\lambda\sqrt{1 - u^2 / c^2}$$

- Sommando

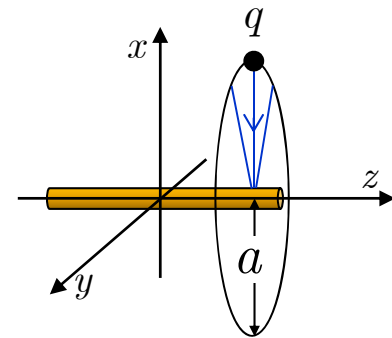
$$\lambda_{\text{tot}} = \lambda'^{+} + \lambda'^{-} = \lambda\sqrt{1 - u^2 / c^2} - \frac{\lambda}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} = \frac{-\lambda}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} \left[1 - \left(1 - u^2 / c^2 \right) \right]$$

$$\lambda_{\text{tot}} = -\frac{\lambda}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} \frac{u^2}{c^2}$$

- Il filo ha una densità di carica negativa
 - Genera un campo elettrico
 - Il modulo del campo elettrico è

$$E = \frac{\lambda_{\text{tot}}}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}$$

- La carica q , positiva e a riposo, è attratta verso il filo



Forza su una carica in movimento

- Calcoliamo il modulo della forza

$$F = qE = q \frac{\lambda_{\text{tot}}}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \quad \lambda_{\text{tot}} = -\frac{\lambda}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} \frac{u^2}{c^2}$$

$$F = q \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} \frac{u^2}{c^2} \frac{1}{a}$$

- Confrontiamo con la forza magnetica che avevamo calcolato nel sistema di riferimento iniziale

$$F = qu \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\lambda u}{a}$$

- Facciamo le seguenti identificazioni

$$\lambda u = i \quad \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = \mu_0 \quad \longrightarrow \quad F = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} qu \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\lambda u}{a}$$

- Il fattore in rosso deriva dalla trasformazione relativistica della forza (vedi diapositiva 193)

$$\mathbf{F}'_{\perp} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{F}_{\perp}$$

- La forza nel sistema in cui la particella è a riposo S è uguale alla forza misurata nel sistema in cui si muove S' moltiplicata per γ

- Abbiamo dimostrato che la forza magnetica del filo su una carica in moto è interpretabile come l'effetto relativistico della forza di Coulomb

Trasformazione dei campi E e B

- Per trovare le leggi di trasformazioni di B procediamo in modo analogo a quanto fatto per il campo elettrico

- Consideriamo due piani infiniti di carica paralleli al piano $z-x$

- I piani si muovono con velocità u lungo l'asse x nel sistema S

- Nel sistema S la loro densità di carica è $\pm\sigma$

- Nel sistema in cui i piani sono a riposo la loro densità di carica è minore ed è $\sigma_0 = \sigma/\gamma_u$

- Calcoliamo il campo elettrico E e il campo di induzione magnetica B nel sistema S

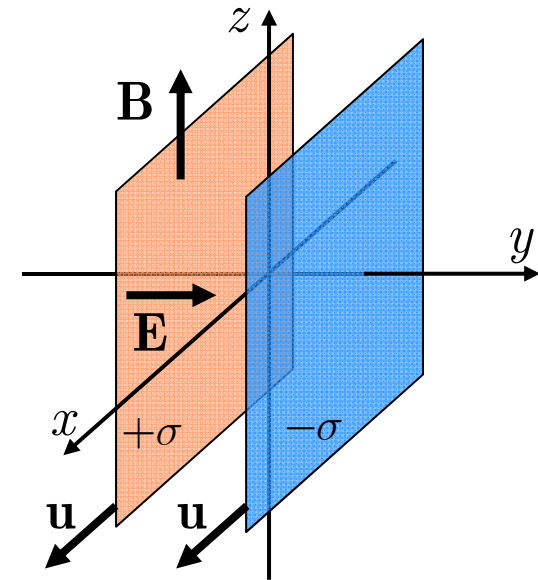
- Il campo elettrico fra i piani è (ricordiamo che all'esterno è nullo)

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{e}}_y$$

- I piani costituiscono due densità di corrente superficiale $\mathbf{K} = \pm\sigma\mathbf{u}$

- La densità di corrente genera un campo di induzione magnetica B fra i piani (all'esterno è nullo)

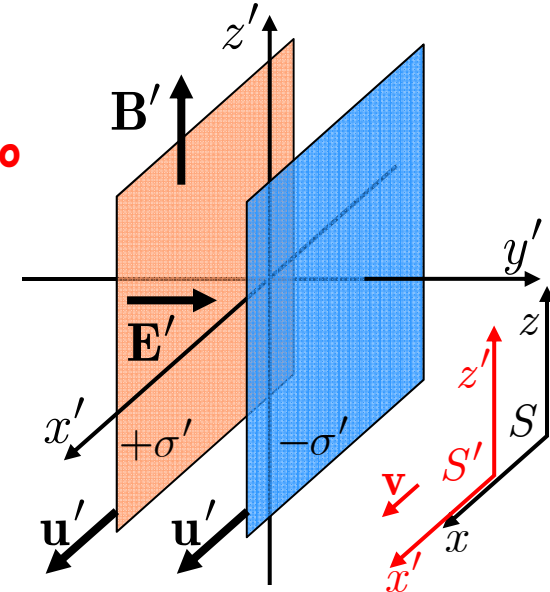
$$\mathbf{B} = \mu_0 \sigma u \hat{\mathbf{e}}_z$$



Trasformazione dei campi E e B

- Consideriamo adesso un sistema S' che si muove rispetto a S con velocità v lungo l'asse x
 - Per calcolare i campi E' e B' nel sistema S' vediamo innanzitutto come si sono trasformate le sorgenti
- Calcoliamo la velocità u' dei piani di carica in S'
 - Usiamo la formula della diapositiva 185
 - Scambiamo il ruolo di S e S' e cambiamo il segno di v

$$\mathbf{u}'_{\parallel} = \frac{u_{\parallel} - v}{1 - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} / c^2} \quad u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2} = c \frac{\beta_u - \beta}{1 - \beta_u \beta}$$



- In S' piani di carica si muovono con velocità u' (sempre lungo x)

- Calcoliamo $\gamma'_u = \frac{1}{\sqrt{1 - (u'/c)^2}}$ si può verificare che $\gamma'_u = \gamma_u \gamma (1 - \beta_u \beta)$

- La densità di carica diventa $\sigma' = \sigma_0 \gamma'_u = \frac{\sigma \gamma'_u}{\gamma_u} = \sigma \gamma (1 - \beta_u \beta)$
- E infine la densità di corrente

$$\mathbf{K}' = \sigma' \mathbf{u}' = \sigma \gamma (1 - \beta_u \beta) c \frac{\beta_u - \beta}{1 - \beta_u \beta} \hat{\mathbf{e}}_{x'} = \sigma \gamma c (\beta_u - \beta) \hat{\mathbf{e}}_{x'}$$

Trasformazione dei campi E e B

- Riassumendo $\sigma' = \sigma\gamma(1 - \beta_u\beta)$ $\mathbf{K}' = \sigma\gamma c(\beta_u - \beta)\hat{\mathbf{e}}_{x'}$

- Troviamo infine il campo elettrico $\mathbf{E}'$ e il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}'$

$$\mathbf{E}' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{e}}_{y'} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\gamma(1 - \beta_u\beta)\hat{\mathbf{e}}_y$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\gamma = \gamma E_y \quad \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\gamma\beta_u\beta = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 c^2}\gamma uv = \mu_0\sigma\gamma uv = \gamma v B_z$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} = \mu_0$$

$$\mu_0\sigma u = B_z$$

- Inserendo nella formula per $\mathbf{E}'$

$$E'_y = \gamma(E_y - vB_z)$$

- Analogamente per $\mathbf{B}'$

$$\mathbf{B}' = \mu_0 K' \hat{\mathbf{e}}_{z'} = \mu_0 \sigma \gamma c (\beta_u - \beta) \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\mu_0 \sigma \gamma c \beta = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \sigma \gamma c \beta = \gamma \frac{E_y}{c^2} v$$

$$\mu_0 \sigma \gamma c \beta_u = \mu_0 \gamma \sigma u = \gamma B_z$$

- Inserendo nella formula per $\mathbf{B}'$

$$B'_z = \gamma \left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right)$$

Trasformazione dei campi E e B

$$E'_y = \gamma E_y - \gamma v B_z \quad B'_z = \gamma B_z - \gamma \frac{v}{c^2} E_y$$

- Un modo alternativo di scrivere le formule precedenti è

$$(cB'_z) = \gamma(cB_z) - \gamma\beta E_y \quad E'_y = -\gamma\beta(cB_z) + \gamma E_y$$

- È evidente la somiglianza con

$$(ct') = \gamma(ct) - \gamma\beta x \quad x' = -\gamma\beta(ct) + \gamma x$$

- Troviamo adesso la legge di trasformazione di B_y

- Disponiamo i piani di carica paralleli al piano $x-y$

- Con un calcolo analogo al precedente otteniamo

$$(cB'_y) = \gamma(cB_y) + \gamma\beta E_z \quad E'_z = \gamma\beta(cB_y) + \gamma E_z$$

- Notare il segni di E_z e B_y rispetto a E_y e B_z

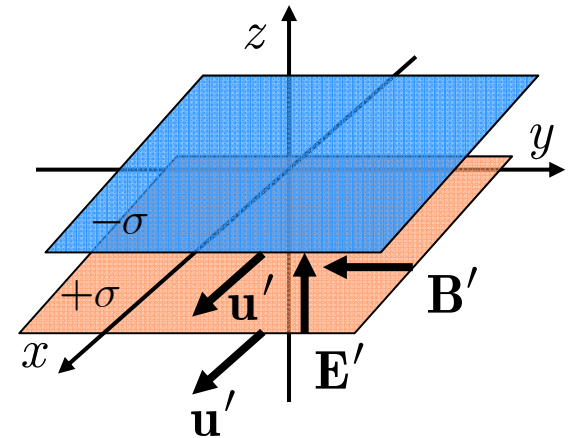
- Rimane da determinare il comportamento delle componenti dei campi lungo la direzione della velocità

- Per il campo E sappiamo che la componente parallela non cambia

$$E'_x = E_x$$

- Dimostriamo che anche per il campo B si ottiene lo stesso risultato

$$B'_x = B_x$$



Trasformazione dei campi E e B

- Per dimostrare l'ultima legge di trasformazione consideriamo un solenoide a riposo nel sistema S

- L'asse del solenoide è diretto lungo l'asse x
 - Sappiamo che il campo B è diretto lungo x e vale

$$B_x = n\mu_0 I$$

- Consideriamo adesso il sistema S' che si muove verso sinistra con velocità v

- Nel sistema S' il solenoide è in moto
 - Il campo B è comunque diretto lungo x'

$$B'_x = n'\mu_0 I'$$

- Nel sistema S' le lunghezze sono contratte

$$n' = \gamma n$$

- Nel sistema S' i tempi sono dilatati

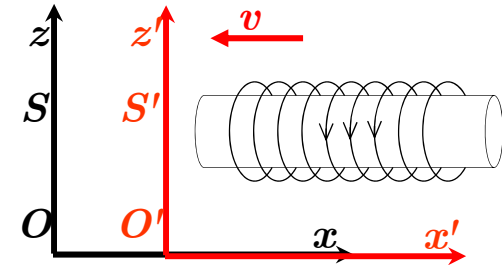
$$I' = \frac{dq}{dt'} = \frac{dq}{\gamma dt} = \frac{I}{\gamma}$$

- Otteniamo pertanto

$$B'_x = n'\mu_0 I' = \gamma n\mu_0 \frac{I}{\gamma} = n\mu_0 I = B_x$$

- Riassumendo, le leggi di trasformazione di E e B sono

$$\begin{array}{lll} E'_x = E_x & E'_y = \gamma(E_y - vB_z) & E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \\ B'_x = B_x & B'_y = \gamma(B_y + (v/c^2)E_z) & B'_z = \gamma(B_z - (v/c^2)E_y) \end{array}$$



Trasformazione dei campi E e B

- È spesso utile una forma vettoriale delle leggi di trasformazione
 - Per una velocità in direzione arbitraria
- Scomponiamo i campi in una componente parallela e in una perpendicolare a $\mathbf{v}$
 - $\mathbf{v}$ è la velocità del sistema S' rispetto al sistema S

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp} \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp} \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{B}'_{\perp}$$

- I campi nel sistema S' sono

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp})$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp})$$

- I casi che abbiamo studiato possono facilmente essere verificati ponendo

$$\mathbf{E}_{\parallel} = 0 \quad \mathbf{B}_{\parallel} = 0 \quad \mathbf{E}_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{e}}_y \quad \mathbf{B}_{\perp} = \mu_0 \sigma u \hat{\mathbf{e}}_z \quad \mathbf{v} = v \hat{\mathbf{e}}_x \quad \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$$

- Osserviamo che le trasformazioni dei campi mescolano le componenti di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$
 - Analogamente a quanto visto per t e r (o per E e p) $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ devono essere le componenti di un'unica grandezza fisica. Lo vedremo fra poco

Trasformazione dei campi E e B

- Le relazioni che abbiamo trovato permettono di calcolare la relazione fra campo elettrico e magnetico in alcuni casi semplici ma importanti

- Consideriamo il caso in cui B sia nullo nel sistema di riferimento S

- Ad es. il caso che abbiamo visto della carica in moto rettilineo uniforme

- Attenzione: la velocità della particella è $\mathbf{v}$, la velocità di S' è $-\mathbf{v}$

$$\begin{array}{ll} \mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} & \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} & \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp}) \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} & \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma \mathbf{E}_{\perp} \\ \mathbf{B}'_{\parallel} = 0 & \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\perp} \end{array}$$

- Dato che $\mathbf{B}'_{\parallel} = 0$ possiamo dire che $\mathbf{B}' = \mathbf{B}'_{\perp}$
- Inoltre dato che per definizione $\mathbf{v} \times \mathbf{E}_{\parallel} = 0$ $\mathbf{v} \times \gamma \mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}'_{\perp} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}'$
- Pertanto nel sistema S' i campi sono

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma \mathbf{E}_{\perp} \quad \mathbf{B}' = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E}' \quad \boxed{\mathbf{B} = 0}$$

- Analogamente se E è nullo in S

$$\begin{array}{ll} \mathbf{E}'_{\parallel} = 0 & \mathbf{E}'_{\perp} = -\gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\perp} \\ \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} & \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \mathbf{B}_{\perp} \end{array}$$

Notare che

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}' = 0$$

- Pertanto i campi in S' sono

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \mathbf{B}_{\perp} \quad \mathbf{E}' = -\gamma \mathbf{v} \times \mathbf{B}' \quad \boxed{\mathbf{E} = 0}$$