Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

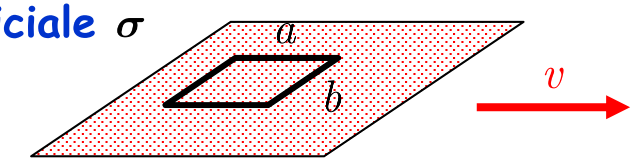
Lezione n. 26 – 21.03.2023

Trasformazione di E
Campo elettrico di una carica in moto rettilineo uniforme
Campo elettrico di una carica che si mette in moto o si arresta

Anno Accademico 2022/2023

Densità di carica

- Consideriamo un piano di carica con densità superficiale σ
- Consideriamo un rettangolo di lati a e b: $S = ab$
  - La carica all'interno del rettangolo è $q = \sigma S$



- Supponiamo adesso che il piano si muova con una velocità v parallela al lato a del rettangolo
  - Il lato a subisce una contrazione di Lorentz

$$a \longrightarrow \frac{a}{\gamma}$$

  - La superficie del rettangolo subisce la stessa contrazione

$$S = ab \quad \longrightarrow S' = \frac{ab}{\gamma} = \frac{S}{\gamma}$$

  - La carica dentro il rettangolo in moto è

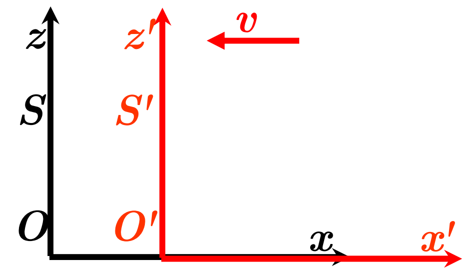
$$q' = \sigma' S' = \sigma' \frac{S}{\gamma}$$ ma la carica è un invariante $$q = q' \qquad \sigma S = \sigma' \frac{S}{\gamma}$$

$$\sigma = \frac{\sigma'}{\gamma} \qquad \sigma' = \gamma \sigma$$

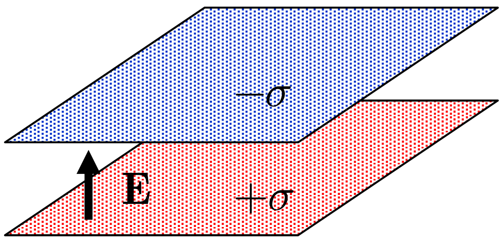
  - Vista nel sistema S la densità di carica del piano in movimento è aumentata
    - Valgono le stesse relazioni per le densità di volume e le densità lineari

Trasformazione di Lorentz del campo $\mathbf{E}$

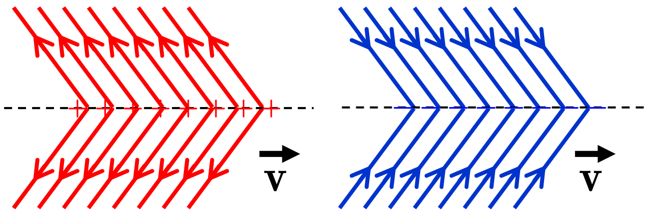
- Possiamo adesso ricavare le trasformazioni di Lorentz del campo elettrico
  - Da un sistema inerziale S ad un sistema S' che si muove con velocità v verso sinistra



- Utilizzeremo il campo di un sistema particolare
  - Il campo elettrico fra due piani infiniti di carica
  - Il risultato vale per qualsiasi campo elettrico
    - Indipendentemente dalle particolarità delle sorgenti del campo
    - Se le proprietà del campo dipendessero da come è stato generato sarebbe un concetto di nessuna utilità

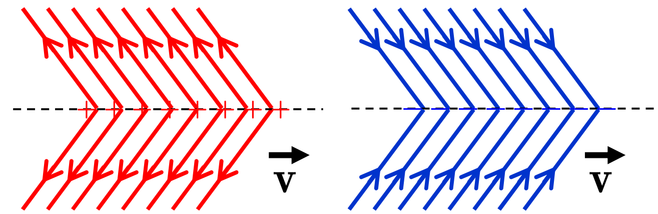


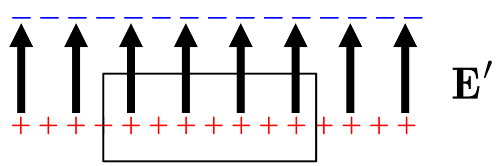
- I piani di densità $\pm\sigma$ sono a riposo in S
  - Sappiamo che in S il campo elettrico è perpendicolare ai piani e vale $\mathbf{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathrm{e}}_z$
    - Il campo elettrico non dipende dalla distanza dal piano
- Consideriamo adesso uno dei piani visto in S'
    - In S' il piano si muove con velocità v
      - Esiste una direzione privilegiata
    - Il campo potrebbe avere la forma in figura
  - Vedremo che in realtà le linee sono perpendicolari



Trasformazione di Lorentz del campo $\mathbf{E}$

- Anche se linee di campo non fossero perpendicolari il campo fra i due strati avrebbe la forma che conosciamo





- Sappiamo che la legge di Gauss vale in tutti i sistemi inerziali

$$\oint \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{a} = q \,/\, \varepsilon_0 \Rightarrow E' A = \sigma' A \,/\, \varepsilon_0 \Rightarrow E' = \sigma' \,/\, \varepsilon_0$$

  - Anche in S' il campo elettrico è determinato dalla densità di carica σ'
- Inoltre abbiamo visto che l'invarianza relativistica della carica richiede che

$$\boxed{\sigma' = \gamma\sigma}$$

- Abbiamo pertanto

$$\mathbf{E}' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{e}}_{z'} = \gamma\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{e}}_{z'} = \gamma\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{e}}_z = \gamma\mathbf{E}$$

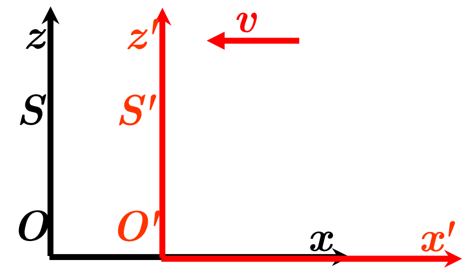
- Pertanto la trasformazione di un campo elettrico perpendicolare alla velocità relativa dei due sistemi di riferimento è

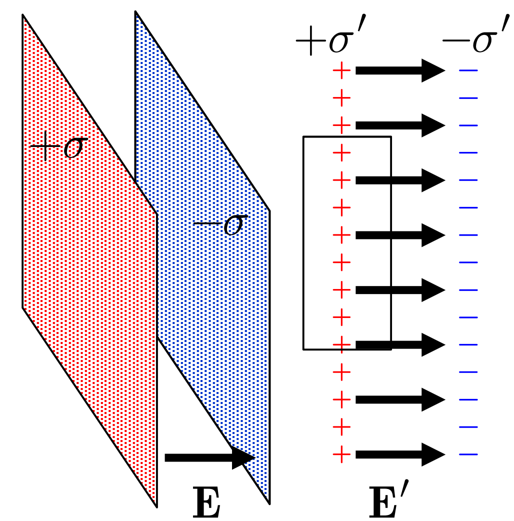
$$\boxed{\mathbf{E}' = \gamma\mathbf{E}}$$

Trasformazione di Lorentz del campo $\mathbf{E}$

- Si può seguire una procedura analoga per la componente del campo elettrico parallela alla velocità relativa fra i due sistemi
  - Consideriamo due piani infiniti di carica
    - La densità di carica è σ nel sistema S
  - Le dimensioni trasversali non cambiano in S'
    - La densità di carica è $\sigma' = \sigma$ anche in S'
  - In questo caso la simmetria del problema impone che le linee di campo siano lungo l'asse x'
  - Possiamo applicare la legge di Gauss
    - La distanza fra i piani in S' è ridotta del fattore γ
    - Tuttavia il valore del campo $\mathbf{E}$ ricavato con la legge di Gauss non dipende dalla distanza fra i piani
  - Otteniamo pertanto

$$\mathbf{E} = \sigma / \varepsilon_0 \qquad \mathbf{E}' = \sigma / \varepsilon_0 \qquad \boxed{\mathbf{E}' = \mathbf{E}}$$



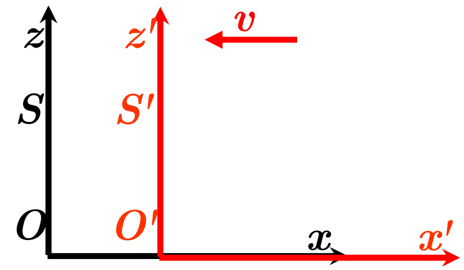


- Mettiamo insieme i due risultati

$$\boxed{\mathbf{E}'_\perp = \gamma \mathbf{E}_\perp} \qquad \boxed{\mathbf{E}'_{||} = \mathbf{E}_{||}}$$

  - $\mathbf{E}_{||}$ è la componente di $\mathbf{E}$ parallela alla velocità relativa
  - $\mathbf{E}_\perp$ è la componente di $\mathbf{E}$ perpendicolare alla velocità relativa

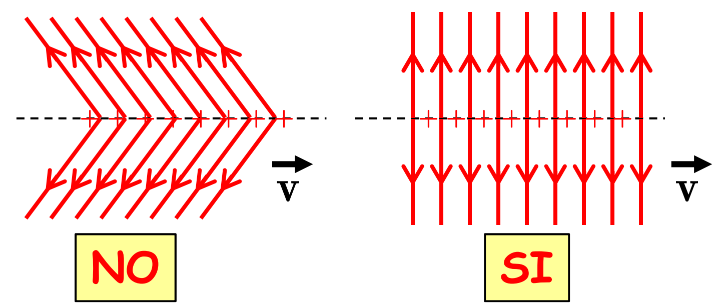
Trasformazione di Lorentz del campo $\mathbf{E}$



- Abbiamo pertanto ottenuto le trasformazioni di Lorentz per il campo elettrico

$$\boxed{\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma \mathbf{E}_{\perp}} \qquad \boxed{\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}}$$

  - Vale la pena sottolineare che in S stiamo considerando un campo elettrostatico $\mathbf{E}$ e che $\mathbf{B} = 0$ (le cariche sono a riposo in S)
- Nonostante siano state ottenute per un sistema particolare (due piani infiniti di carica) esse valgono qualunque sia la configurazione delle sorgenti
- Notiamo inoltre che non dipendono dal segno di $\mathbf{v}$
  - Questo ci permette di comprendere che la possibile forma ipotizzata per le linee di campo nel sistema S' non è possibile
    - Il campo trasformato deve essere lo stesso per $\pm\mathbf{v}$

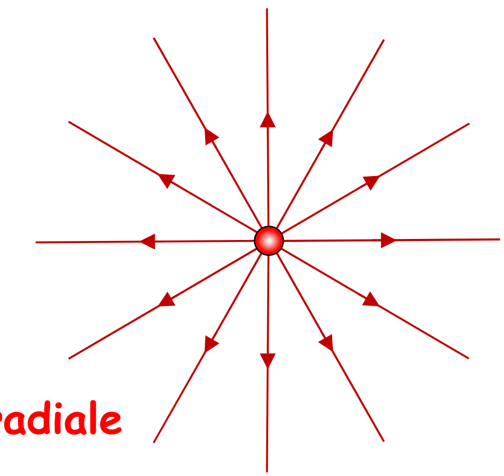


- Per rendere più semplice ricordarsi le formule:
  - Il sistema S è quello in cui le sorgenti sono a riposo
  - Il sistema S' è quello in cui le sorgenti si muovono con velocità v

La componente del campo elettrico perpendicolare alla velocità è meno intensa nel sistema inerziale in cui le cariche sono a riposo

Campo $\mathbf{E}$ di una carica in movimento

- Consideriamo il campo elettrico di una carica Q a riposo
  - Consideriamo in dettaglio il campo nel piano x–z
  - Le componenti del campo sono

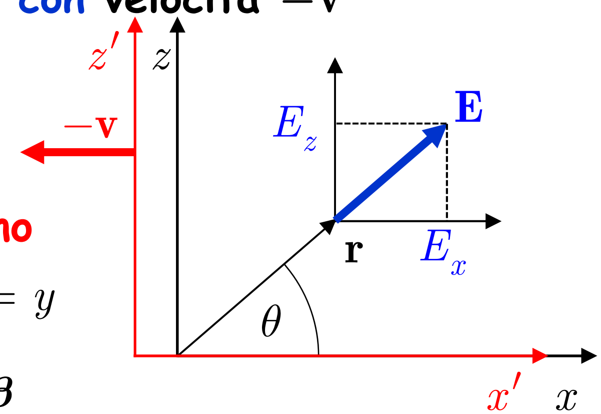


$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin\theta}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}} \qquad \frac{E_z}{E_x} = \frac{z}{x}$$

campo radiale

- Calcoliamo il campo $\mathbf{E}'$ in un sistema S' che si muove con velocita $-\mathbf{v}$
  - In S' la carica Q si muove con velocità $+\mathbf{v}$
- Assumiamo che le origini di S e S' coincidano per $t = 0$
  - Le trasformazioni di Lorentz per le coordinate sono



$$x' = \gamma x + \gamma\beta ct \qquad ct' = \gamma ct + \gamma\beta x \qquad z' = z \qquad y' = y$$

- Possono essere facilmente invertite con $\beta \to -\beta$ e scambio delle coordinate con apice e senza

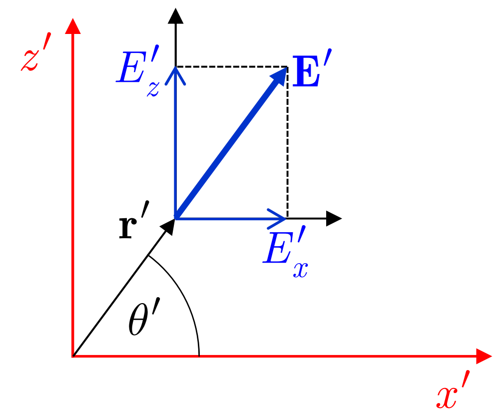
$$x = \gamma x' - \gamma\beta ct' \qquad ct = \gamma ct' - \gamma\beta x' \qquad z = z' \qquad y = y'$$

Campo $\mathbf{E}$ di una carica in movimento

- Possiamo adesso calcolare il campo elettrico nel sistema S'
  - In questo sistema abbiamo una carica Q che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $+\mathrm{v}$
    - Calcoliamo le componenti per $t = t' = 0$, quando, in S', la carica Q passa per l'origine
    - Al punto $\mathbf{r} = (x,y,z)$ corrisponde il punto $\mathbf{r}' = (x',y',z')$

$$x = \gamma x' - \gamma\beta c t' \rightarrow x = \gamma x' \qquad z = z'$$

È stato corretto disegnare $\mathbf{E}'$ allineato a $\mathbf{r}'$



  - Le due componenti del campo sono

$$E'_x = E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma x'}{\left[\left(\gamma x'\right)^2+z'^2\right]^{3/2}}$$

$$E'_z = \gamma E_z = \gamma\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{\left(x^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma z'}{\left[\left(\gamma x'\right)^2+z'^2\right]^{3/2}}$$

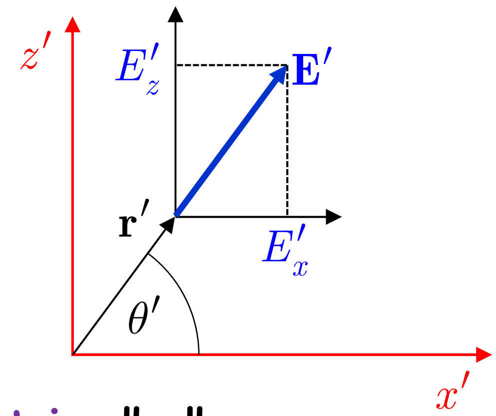
  - Notiamo innanzitutto che

$$\frac{E'_z}{E'_x} = \frac{z'}{x'}$$

- I vettori $\mathbf{E}'$ e $\mathbf{r}'$ formano lo stesso angolo con x'
- Il campo elettrico è ancora radiale
  - La componente E'_z moltiplicata per γ, la componente x' divisa per γ

$$E'_z = \gamma E_z \qquad x' = x \,/\, \gamma$$

Campo $\mathbf{E}$ di una carica in movimento

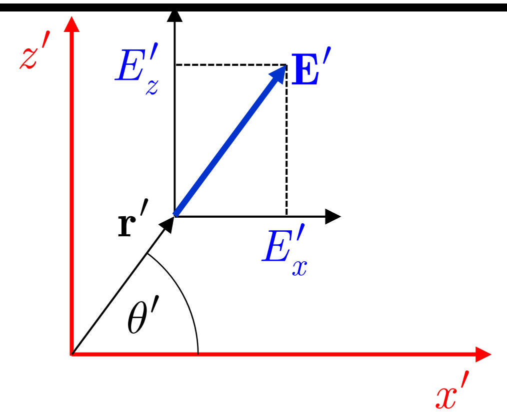


- Riflettiamo su questo risultato
  - Ad una prima superficiale analisi la cosa può apparire sorprendente
    - La carica Q è passata per l'origine al tempo $t' = 0$
    - In qualsiasi punto dello spazio, per quanto distante dell'origine, al tempo $t' = 0$ il campo elettrico punta verso l'origine
      - In qualsiasi punto dello spazio-tempo il campo elettrico "sa" che la carica è passata per l'origine al tempo $t' = 0$
      - Appare come una trasmissione istantanea dell'informazione!
- L'apparente paradosso si risolve notando che stiamo osservando in S' un sistema fisico che in S è statico
  - In S il campo è lo stesso da $t = -\infty$ a $t = +\infty$
    - Il campo $\mathbf{E}$ può essere previsto in qualsiasi punto dello spazio-tempo
  - Anche in S' il campo $\mathbf{E}'$ è prevedibile in ogni punto dello spazio-tempo
  - Da $t' = -\infty$ a $t' = +\infty$
    - In S' il campo in un punto generico $\mathbf{r}'$ al tempo $t' = 0$ è determinato dalla storia passata della carica

È lo stesso sistema fisico visto in due sistemi inerziali differenti

Campo $\mathbf{E}$ di una carica in movimento

- Calcoliamo il modulo del campo elettrico



$$E'_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma x'}{\left[\left(\gamma x'\right)^2 + z'^2\right]^{3/2}} \qquad E'_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\gamma z'}{\left[\left(\gamma x'\right)^2 + z'^2\right]^{3/2}}$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \qquad \frac{1}{\gamma^2} = 1-\beta^2$$

$$E'^2 = E'^2_x + E'^2_z = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{\gamma^2\left(x'^2+z'^2\right)}{\left[\left(\gamma x'\right)^2 + z'^2\right]^3}$$

$$E'^2 = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{\gamma^2\left(x'^2+z'^2\right)}{\left[\gamma^2\left(x'^2 + \frac{z'^2}{\gamma^2}\right)\right]^3} = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{\left(x'^2+z'^2\right)}{\gamma^4\left[\left(x'^2 + \left(1-\beta^2\right)z'^2\right)\right]^3}$$

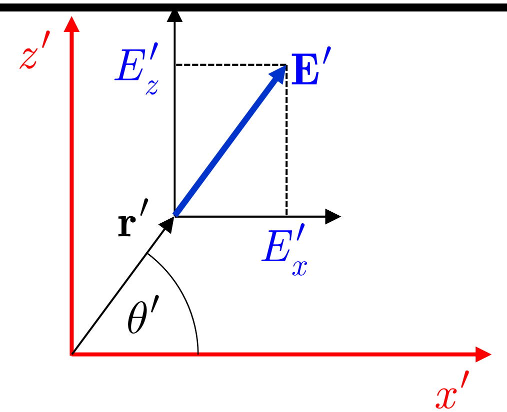
$$E'^2 = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{\left(x'^2+z'^2\right)}{\gamma^4\left[\left(x'^2 + z'^2 - \beta^2 z'^2\right)\right]^3} = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{\left(1-\beta^2\right)^2\left(x'^2+z'^2\right)}{\left(x'^2+z'^2\right)^3\left[\left(1 - \frac{\beta^2 z'^2}{x'^2+z'^2}\right)\right]^3}$$

$$E'^2 = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{\left(1-\beta^2\right)^2}{\left(x'^2+z'^2\right)^2\left[\left(1 - \frac{\beta^2 z'^2}{x'^2+z'^2}\right)\right]^3} = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{\left(1-\beta^2\right)^2}{r'^4\left[\left(1 - \frac{\beta^2 z'^2}{r'^2}\right)\right]^3}$$

Campo $\mathbf{E}$ di una carica in movimento

- Riepilogando

$$E'^2 = \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{\left(1-\beta^2\right)^2}{r'^4\left[\left(1-\frac{\beta^2 z'^2}{r'^2}\right)\right]^3}$$



- Osserviamo che $\quad \dfrac{z'^2}{r'^2} = \sin^2\theta'$

- Otteniamo in definitiva

$$\boxed{E' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r'^2}\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta'\right)^{3/2}}}$$

- Valori notevoli

$\boxed{r' = r}$

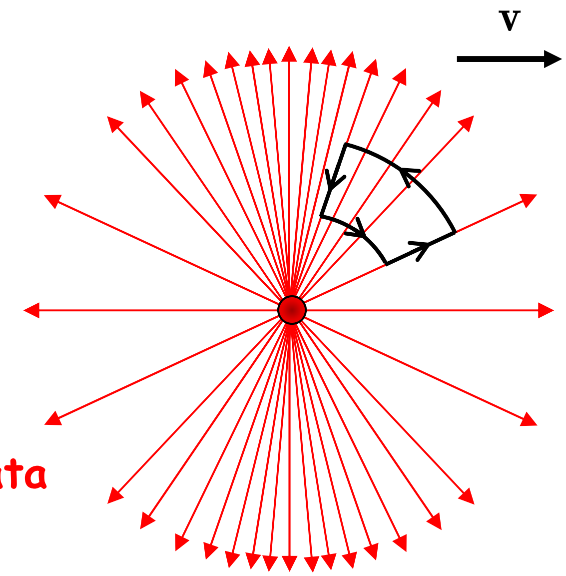
$$\boxed{\theta' = \frac{\pi}{2}} \qquad E' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r'^2}\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r'^2}\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r'^2}\gamma \qquad E' = \gamma E$$

$\boxed{\gamma r' = r}$

$$\boxed{\theta' = 0} \qquad E' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r'^2}\left(1-\beta^2\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r'^2\gamma^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad E' = E$$

Campo $\mathbf{E}$ di una carica in movimento

$$E' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r'^2}\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta'\right)^{3/2}}$$



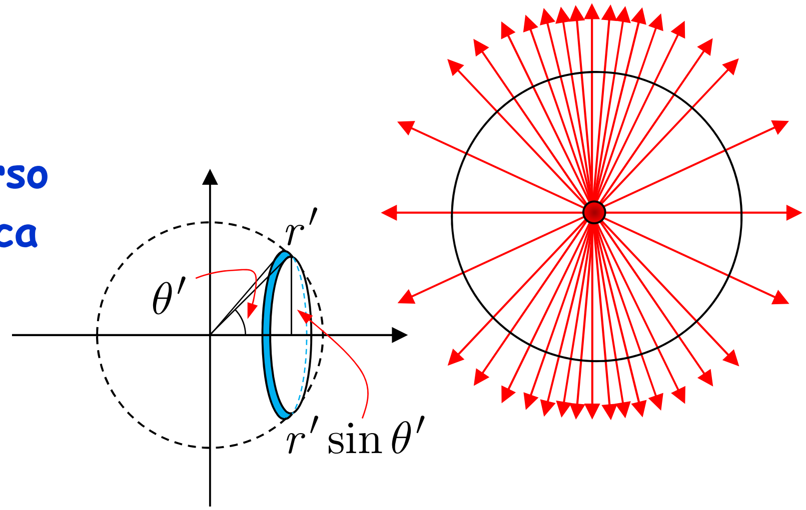
- Utilizzando l'espressione trovata si può dare una rappresentazione del campo con le linee di campo
  - Il campo è più intenso per $\theta' = \pi/2$
  - Il campo ha la simmetria "avanti/indietro" già notata
  - Il campo è radiale ma non ha simmetria sferica
- Questo campo ha delle particolarità interessanti
  - Non è un campo conservativo
  - Consideriamo la circuitazione lungo il cammino in figura $\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l}$
    - Lungo i tratti circolari il contributo è nullo
      - Il campo è radiale, perpendicolare al cammino
    - Lungo i tratti radiali il campo ha intensità diversa
      - Angoli differenti
  - La circuitazione è diversa da zero

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} \neq 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E}' \neq 0$$

Sarà molto interessate trovare a cosa è uguale $\nabla \times \mathbf{E}'$

La legge di Gauss

- Possiamo adesso verificare che la legge di Gauss vale anche nel sistema S'
  - Ricordiamo che abbiamo derivato le leggi di trasformazione assumendo la validità della legge di Gauss
  - Pertanto si tratta di una verifica
    - Deve essere così!
- Calcoliamo il flusso del campo $\mathbf{E}'$ attraverso una superficie sferica centrata sulla carica



$$\oint_S \mathbf{E}'\cdot\hat{\mathbf{n}}'da'$$

  - L'elemento di superficie è

$$da' = 2\pi r'^2 \sin\theta' d\theta'$$

  - Inoltre il campo è radiale

$$\mathbf{E}'\cdot\hat{\mathbf{n}}' = E' \qquad E' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r'^2}\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta'\right)^{3/2}}$$

  - Otteniamo pertanto

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E}'\cdot\hat{\mathbf{n}}'da' = \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r'^2}\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta'\right)^{3/2}}2\pi r'^2\sin\theta' d\theta'$$

$$= \frac{Q}{2\varepsilon_0}\int_0^\pi \frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta'\right)^{3/2}}\sin\theta' d\theta'$$

La legge di Gauss

$$\Phi = \frac{Q}{2\varepsilon_0}\int_0^\pi \frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta'\right)^{3/2}}\sin\theta' d\theta' = \frac{Q}{2\varepsilon_0}\int_0^\pi \frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2+\beta^2\cos^2\theta'\right)^{3/2}}\left(-d\cos\theta'\right)$$

$$= \frac{Q}{2\varepsilon_0}\frac{1-\beta^2}{\beta^3}\int_1^{-1}\frac{-d\cos\theta'}{\left(\frac{1-\beta^2}{\beta^2}+\cos^2\theta'\right)^{3/2}} = \frac{Q}{2\varepsilon_0}\frac{a^2}{\beta}\int_{-1}^{+1}\frac{du}{\left(a^2+u^2\right)^{3/2}}$$

$$\boxed{a^2 = \frac{1-\beta^2}{\beta^2}}$$

$$\boxed{u = \cos\theta'}$$

- Dalle tabelle si ha

$$\int \frac{du}{\left(a^2+u^2\right)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\left(a^2+u^2\right)^{1/2}}$$

- Otteniamo pertanto

$$\int_{-1}^{1}\frac{du}{\left(a^2+u^2\right)^{3/2}} = \frac{2}{a^2\left(a^2+1\right)^{1/2}} = \frac{2\beta}{a^2}$$

$$a^2+1 = \frac{1-\beta^2}{\beta^2}+1 = \frac{1}{\beta^2}$$

- E per finire

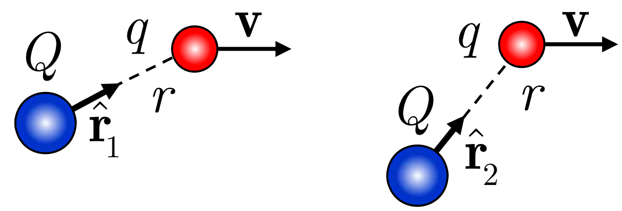
$$\Phi = \frac{Q}{2\varepsilon_0}\frac{a^2}{\beta}\frac{2\beta}{a^2}$$

$$\boxed{\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

Pertanto, anche se il modulo del campo elettrico è diverso in punti diversi della sfera il flusso è quello previsto dalla legge di Gauss

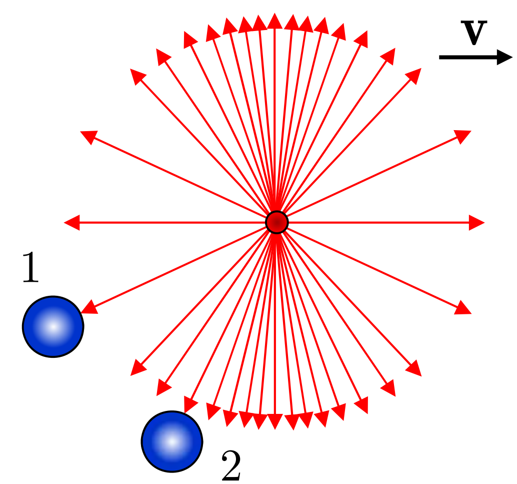
Ancora sulla misura della carica

- Siamo adesso in grado di comprendere in modo più quantitativo le osservazioni e le cautele relative alla misura del valore di una carica in moto (dia. 154)
  - Avevamo infatti detto che la forza fra due cariche avrebbe potuto dipendere dal modulo della velocità e dalla direzione



- Definiamo (in modo errato) il valore della carica in moto con la seguente procedura
  - Utilizziamo una carica di riferimento Q
    - Misuriamo la forza F fra q e Q
    - Definiamo il valore di q come

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2} \qquad q = \frac{r^2 F}{4\pi\varepsilon_0 Q}$$



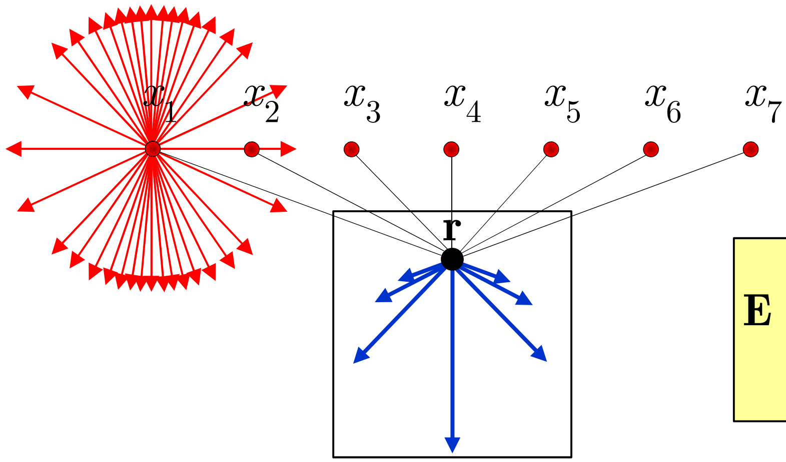
  - Alla luce di quanto studiato vediamo che la forza misurata ($Q\boldsymbol{E}$) è differente nelle posizioni 1 e 2

$$E_{1,2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta_{1,2}\right)^{3/2}}$$

  - Abbiamo appena visto che il flusso del campo elettrico non dipende da β
    - Equivale a misurare il campo medio (o la forza media) su una sfera

Un campo variabile nel tempo

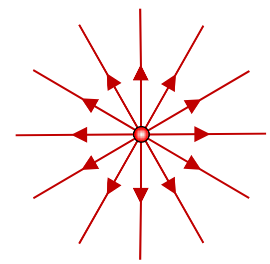
- Abbiamo disegnato qualitativamente il campo elettrico di una carica in moto
  - Al tempo $t = 0$ la carica era nell'origine
  - Nei tempi successivi la carica occupa le posizioni $x = vt$



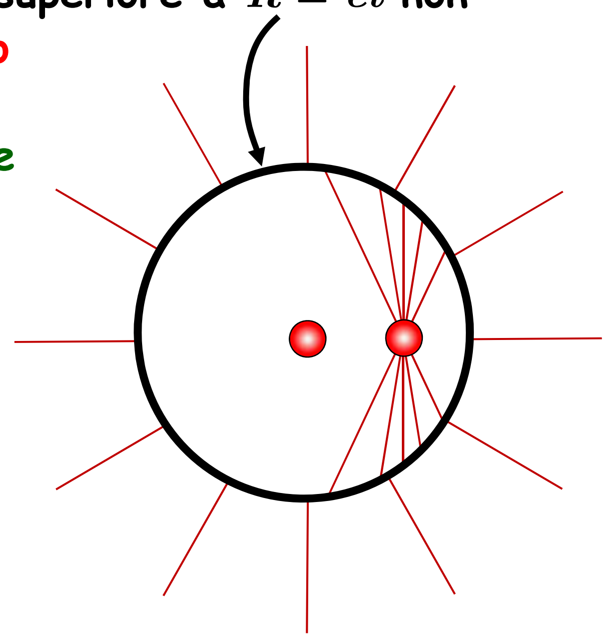
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}\hat{\mathbf{e}}_r$$

- Se misuriamo il campo elettrico sempre nello stesso punto punto r vedremo un campo elettrico $\mathbf{E}$ che varia nel tempo
  - Ai tempi t_j, $j = 1,7$ la carica in movimento occuperà le posizioni $x_j = vt_j$
  - Nel punto r il campo elettrico assumerà i valori $\mathrm{E}_j = \mathrm{E}(\mathrm{r},t_j)$
  - Il campo in r, $\mathrm{E}(\mathrm{r},t)$, varia in modulo e direzione in funzione del tempo

Una carica che si mette in moto

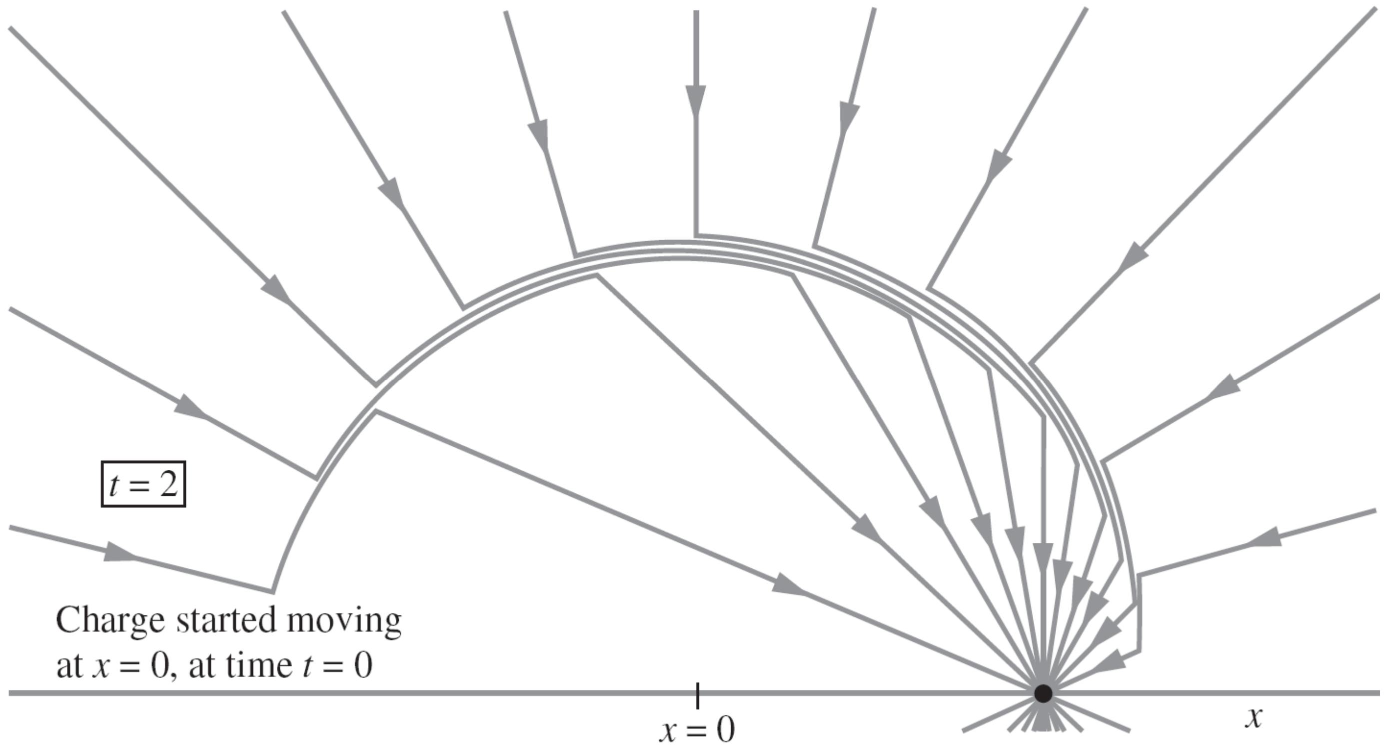


- Supponiamo di avere una carica a riposo
  - Ad esempio nell'origine
  - Disegniamo il suo campo elettrostatico
- Supponiamo che improvvisamente, a $t = 0$ la carica si metta in moto con velocità uniforme v
  - Le variazioni di campo elettrico determinate dal fatto che la carica adesso si muove non possono essere percepite istantaneamente in tutto lo spazio
    - La perturbazione viaggia con la velocità della luce c
  - Al tempo t i punti nello spazio ad una distanza superiore a $R = ct$ non possono sapere che la carica si è messa in moto
    - Per questi punti il campo deve essere ancora il campo elettrostatico della carica nell'origine
    - I punti più vicini di ct vedono il campo di una carica in moto
  - Lo "spessore" della regione di transizione dipende dal tempo che la particella ha impiegato per passare dallo stato di riposo al moto rettilineo uniforme
- Col passare del tempo la sfera di raggio ct diventa sempre più grande

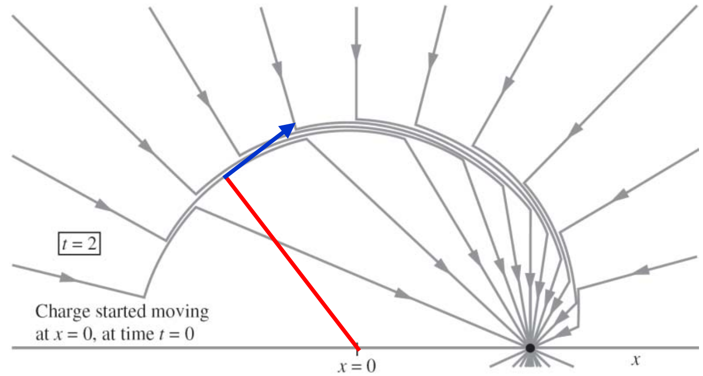


Una carica che si mette in moto

- La figura (presa dal libro di Purcell) mostra un disegno più accurato
  - È relativa a una carica negativa che si mette in moto
  - Le linee di campo fra la regione "interna" e la regione "esterna" sono state accuratamente raccordate
    - Si consulti il testo di Purcell per i dettagli



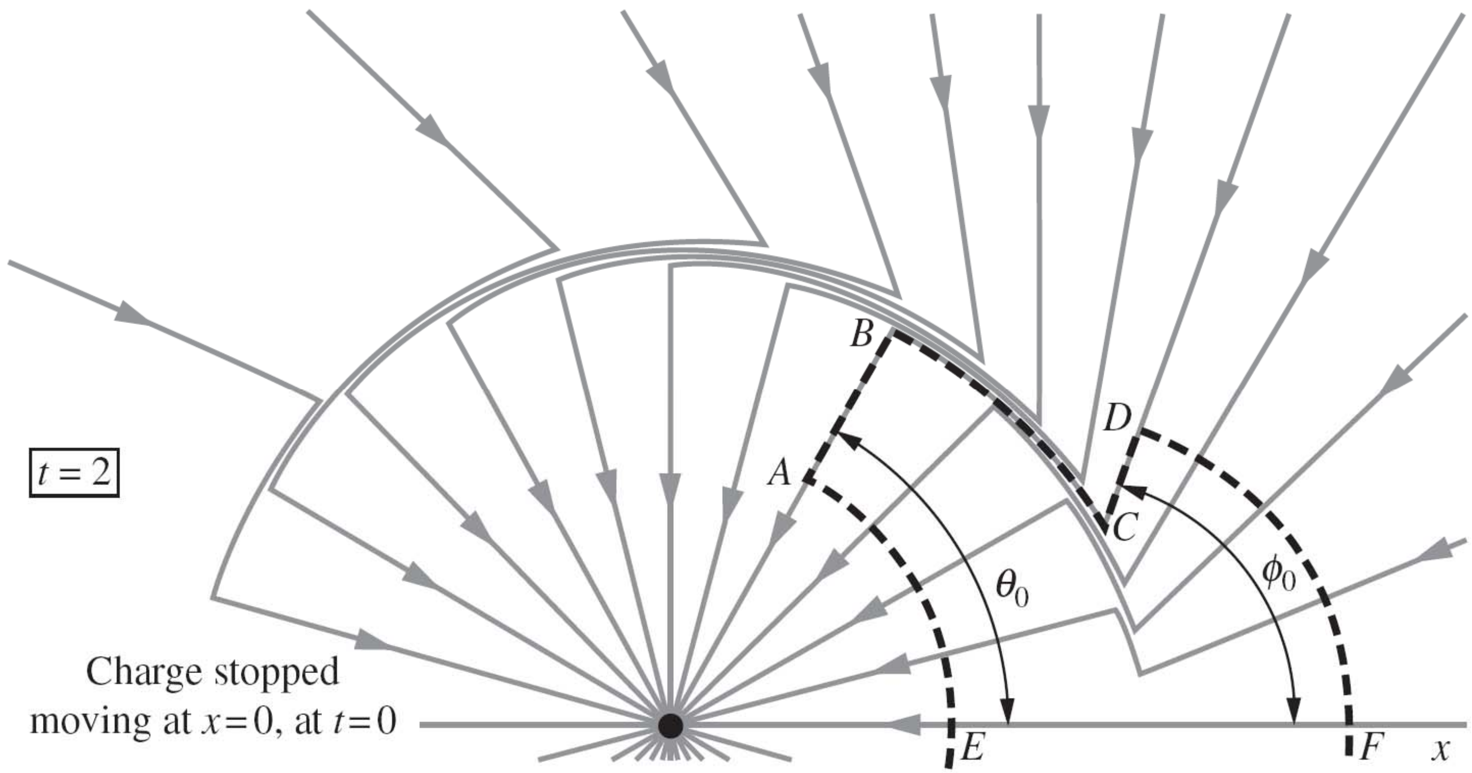
Una carica che si mette in moto



- Abbiamo osservato che lo "spessore" della regione di transizione è determinato dal tempo che la carica elettrica ha impiegato per passare
  - Dalla condizione "a riposo"
  - Alla condizione "in moto rettilineo uniforme"
    - Quindi dipende dall'intervallo di tempo in cui è stata accelerata
  - La regione di transizione è una sfera di raggio ct
    - Il tempo t è il tempo trascorso da quando la carica è stata accelerata
    - Con il passare del tempo il raggio della sfera aumenta
      - L'informazione che la carica si è messa in moto "viaggia" nello spazio e nel tempo
    - Come un'onda sulla superficie di un laghetto
- Osserviamo che il campo elettrico nella "regione di transizione" cambia bruscamente la sua direzione
  - Da campo radiale diventa più o meno perpendicolare al raggio
    - Un campo elettrico trasversale alla direzione di propagazione
- Vedremo che è presente anche un campo magnetico
  - La perturbazione dei due campi è un'onda elettromagnetica che propaga

Campo E di una carica che si arresta

- Si verifica un fenomeno analogo se una carica in moto rettilineo uniforme si arresta
  - Al di fuori di una sfera di raggio ct il campo elettrico è quello di una carica in moto che si muove con velocità costante
  - Per $r > ct$ il campo elettrico non sa che la carica si è fermata a $t = 0$



Campo E di una carica che si arresta

- Anche in questo caso nella regione di transizione il campo è trasversale
  - Un onda sferica che si allontana dall'origine
- Il raccordo fra le linee di campo all'interno della sfera e quelle all'esterno si fa utilizzando la legge di Gauss
  - Consideriamo il cammino in figura
    - Il tratto EA è perpendicolare al campo di una carica ferma in $x = 0$
    - Il tratto $ABCD$ segue una linea di campo
    - Il tratto DF è perpendicolare al campo radiale di una carica in moto
  - Il flusso attraverso la superficie chiusa ottenuta da una rotazione intorno all'asse x è nullo
    - Il contributo proviene solo dalle superfici generate da EA e DF
    - Il flusso è nullo attraverso $ABCD$
  - Il calcolo permette di calcolare

$$\boxed{\operatorname{tg}\phi_0 = \gamma \operatorname{tg}\theta_0}$$