
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 25 - 16.03.2023

Forza su un dipolo magnetico

Campo di una sfera ruotante

Contrazione di Lorentz, dilatazione dei tempi

Invarianza della carica

Anno Accademico 2022/2023

Campo B di uno strato di corrente

- Consideriamo un piano infinito di corrente, parallelo al piano $z-y$ e che si estende da $x = -a$ a $x = +a$
- All'interno del parallelepipedo la densità di corrente è uniforme e vale

$$\mathbf{J} = J_0 \hat{\mathbf{e}}_z$$

- Calcolare il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$
- Innanzitutto utilizziamo considerazioni di simmetria per determinare la direzione del campo magnetico

- La componente B_z è nulla

- La legge di Biot e Savart dice che $\mathbf{B}$ è perpendicolare a $\mathbf{J}$

- La componente B_x è anch'essa nulla

- Supponiamo sia diversa da zero

- Il suo senso deve invertirsi se invertiamo $\mathbf{J}$

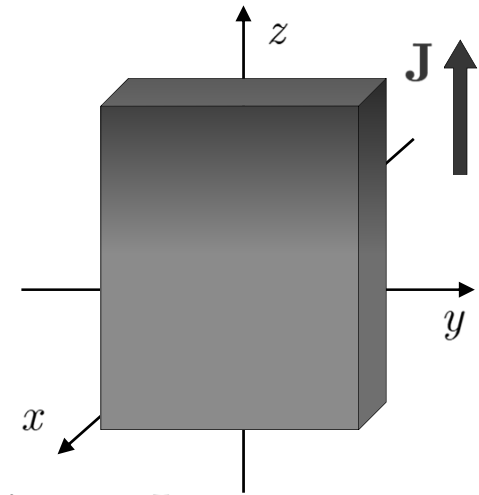
- Invertire il verso di $\mathbf{J}$ è equivalente a ruotare di π intorno all'asse x

- Pertanto $B_x = 0$

- Pertanto l'unica componente non nulla è B_y

- Per la legge di Biot e Savart $\mathbf{B}$ è nel senso positivo delle y per $x > 0$ e nel senso negativo delle y per $x < 0$

- Per $x = 0 \rightarrow B_y = 0$ perché i contributi di $\mathbf{J}$ simmetrici in x si elidono



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

Campo B di uno strato di corrente

- Riassumendo

$$B_x = B_z = 0 \quad B_y = \begin{cases} B_y > 0 & x > 0 \\ B_y < 0 & x < 0 \\ B_y = 0 & x = 0 \end{cases}$$

- Per determinare il modulo di B

utilizziamo la legge di Ampère

- Consideriamo la sezione sul piano $x-y$

- La densità di corrente "entra" nel piano

- Consideriamo il circuito amperiano in figura

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad B_y(x)l = \mu_0 J_0 x l$$

$$B_y(x)l = \mu_0 J_0 a l$$

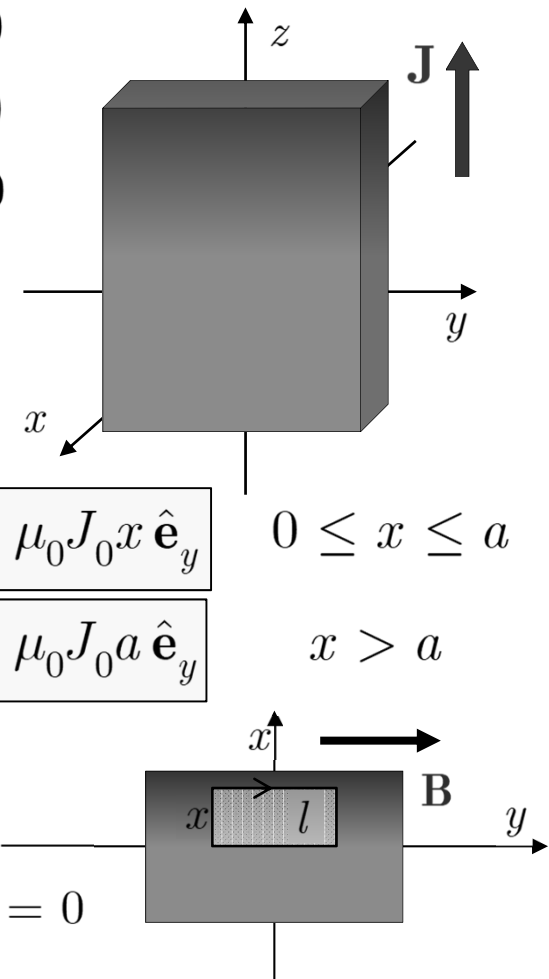
- Per $x < 0$ B ha un segno negativo

- Calcoliamo il rotore per $|x| < a$

- Altrove è nullo

$$(\nabla \times \mathbf{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \quad (\nabla \times \mathbf{B})_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0$$

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 J_0$$



$$\mathbf{B} = \mu_0 J_0 x \hat{\mathbf{e}}_y \quad 0 \leq x \leq a$$

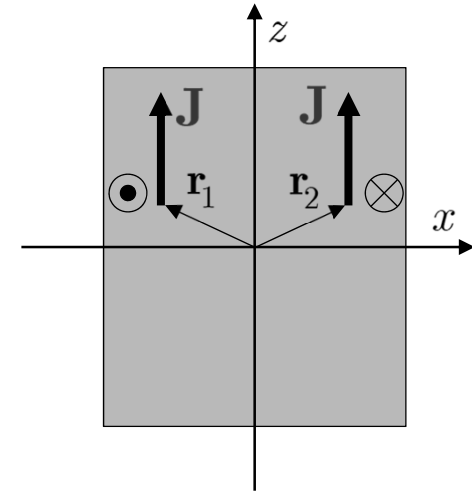
$$\mathbf{B} = \mu_0 J_0 a \hat{\mathbf{e}}_y \quad x > a$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Campo B di uno strato di corrente

- Componente y

- Per la componente y è possibile distinguere i due elementi di densità di corrente (rossi) sulla base del verso del prodotto vettoriale
- La rotazione di π intorno all'asse y è distinguibile dalla inversione del verso di J
- Questo è vero perché la posizione $x = 0$ è fissata dal fatto che la densità di corrente è limitata lungo la direzione x
- La situazione era diversa per rotazioni intorno all'asse x



Forza sul dipolo magnetico

- L'esercizio precedente ci fornisce l'esempio di un campo di induzione magnetica B non uniforme

- Il campo B non è uniforme per $|x| < a$

$$\mathbf{B} = J_0 x \hat{\mathbf{e}}_y$$

- Calcoliamo la forza su un dipolo magnetico

- Consideriamo un dipolo magnetico posto nell'origine e diretto lungo x

$$\mathbf{m} = m_0 \hat{\mathbf{e}}_x$$

- La forza sul dipolo è

$$\mathbf{F} = \nabla (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \mathbf{F} = 0$$

- Se la formula della forza fosse quella del dipolo elettrico

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad \mathbf{F} = m_0 \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{B} \quad \mathbf{F} = \mu_0 m_0 J_0 \hat{\mathbf{e}}_y \quad \text{sbagliato}$$

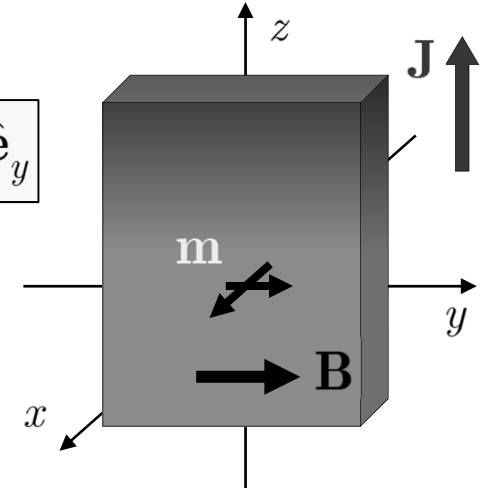
- La forza per un dipolo magnetico nell'origine e diretto lungo y $\mathbf{m} = m_0 \hat{\mathbf{e}}_y$

- La forza sul dipolo magnetico è

$$\mathbf{F} = \nabla (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \quad \mathbf{m} \cdot \mathbf{B} = \mu_0 m_0 J_0 x \quad \mathbf{F} = \nabla (\mu_0 m_0 J_0 x) = \mu_0 m_0 J_0 \hat{\mathbf{e}}_x$$

- Se la legge della forza fosse quella del dipolo elettrico

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad \mathbf{F} = m_0 \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{B} \quad \mathbf{F} = 0 \quad \text{sbagliato}$$



Forza sul dipolo magnetico

- Cerchiamo di comprendere meglio in cosa le due formule sono differenti
- Troviamo una relazione fra le due formule

$$\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \quad (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

- Utilizziamo la relazione della diapositiva **55**

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

- Otteniamo

$$\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times \cancel{(\nabla \times \mathbf{m})} + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\cancel{\mathbf{B} \cdot \nabla}) \mathbf{m}$$

- Il secondo e il quarto termine sono nulli
- Il momento di dipolo $\mathbf{m}$ è indipendente dalla posizione

$$\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

- Ma $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$

- Pertanto

$$\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = \mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{J} + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

- Osserviamo che in elettrostatica le due formule danno lo stesso risultato perché $\nabla \times \mathbf{E} = 0$

Forza sul dipolo magnetico

$$\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = \mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{J} + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

- Per finire verifichiamo che il termine aggiuntivo ripristina il risultato corretto
 - Nella regione $|x| < a$ la densità di corrente e il campo magnetico sono

$$\mathbf{J} = J_0 \hat{\mathbf{e}}_z \quad \mathbf{B} = \mu_0 J_0 x \hat{\mathbf{e}}_y$$

- Consideriamo il caso $\mathbf{m} = m_0 \hat{\mathbf{e}}_x$
 - Il risultato della formula sbagliata era

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \mu_0 m_0 J_0 \hat{\mathbf{e}}_y \quad \mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{J} = \mu_0 m_0 J_0 \hat{\mathbf{e}}_x \times \hat{\mathbf{e}}_z = -\mu_0 m_0 J_0 \hat{\mathbf{e}}_y$$

$$\mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{J} + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} = -\mu_0 m_0 J_0 \hat{\mathbf{e}}_y + \mu_0 m_0 J_0 \hat{\mathbf{e}}_y = 0$$

- Infine il caso $\mathbf{m} = m_0 \hat{\mathbf{e}}_y$
 - Il risultato della formula sbagliata era

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} = 0 \quad \mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{J} = \mu_0 m_0 J_0 \hat{\mathbf{e}}_y \times \hat{\mathbf{e}}_z = \mu_0 m_0 J_0 \hat{\mathbf{e}}_x$$

$$\mu_0 \mathbf{m} \times \mathbf{J} + (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \mu_0 m_0 J_0 \hat{\mathbf{e}}_x + 0 = \mu_0 m_0 J_0 \hat{\mathbf{e}}_x$$

Guscio sferico di carica

- Consideriamo un guscio sferico di carica di raggio R
 - La densità di carica è uniforme e pari a σ
 - Il guscio ruota con velocità angolare costante Ω intorno ad un asse

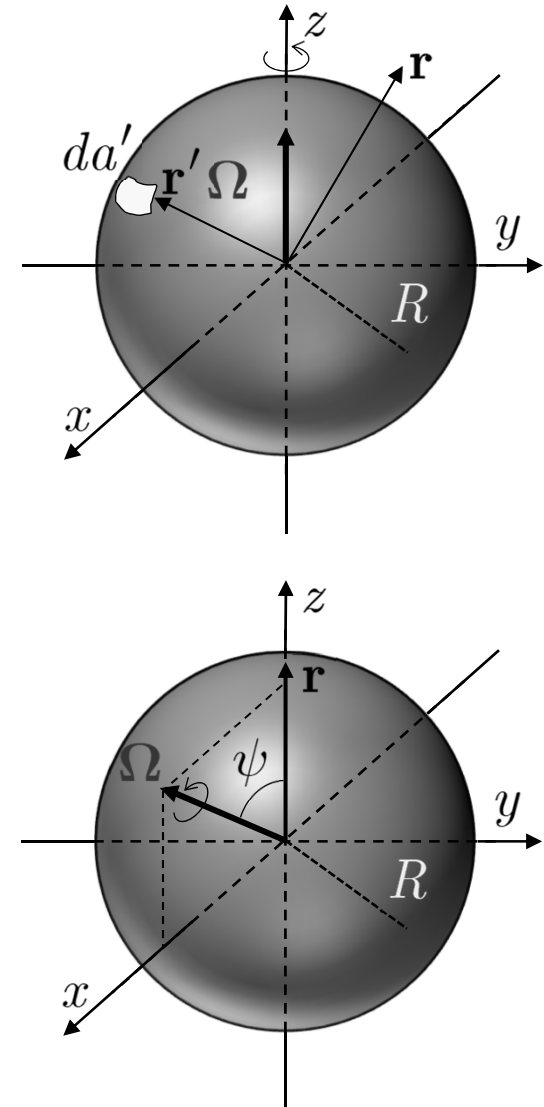
- La densità di corrente superficiale $\mathbf{K}$ è

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}') = \sigma \mathbf{v} = \sigma \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}' \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}') = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'$$

- Per un punto sulla superficie individuato con il vettore $\mathbf{r}'$, il potenziale vettore in $\mathbf{r}$ è dato da

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da'$$

- Il problema è risolto semplicemente calcolando l'integrale
 - L'integrale non è semplice
- Il problema risulta enormemente semplificato da una opportuna scelta di sistema di riferimento
 - Scegliere l'asse z nella direzione di $\mathbf{r}$
 - Il vettore $\boldsymbol{\Omega}$ giace nel piano $x - z$
 - Forma un angolo ψ con l'asse z



Guscio sferico di carica

- Scriviamo i vettori del problema in questo sistema

- Il vettore Ω $\Omega = \omega(\sin \psi \hat{e}_x + \cos \psi \hat{e}_z)$

- La variabile di integrazione r' e il vettore r

$$\mathbf{r}' = R(\sin \theta' \cos \phi' \hat{e}_x + \sin \theta' \sin \phi' \hat{e}_y + \cos \theta' \hat{e}_z)$$

- Il modulo del vettore $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ è

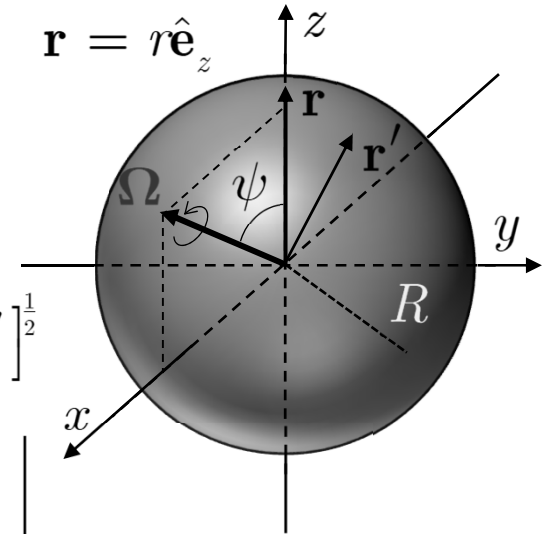
$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}']^{\frac{1}{2}} = [r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta']^{\frac{1}{2}}$$

- La velocità di un elemento di carica in r' è

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r}') = \Omega \times \mathbf{r}' &= R \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \omega \sin \psi & 0 & \omega \cos \psi \\ \sin \theta' \cos \phi' & \sin \theta' \sin \phi' & \cos \theta' \end{vmatrix} \\ &= R\omega \begin{bmatrix} -\hat{e}_x \cos \psi \sin \theta' \sin \phi' \\ +\hat{e}_y (\cos \psi \sin \theta' \cos \phi' - \sin \psi \cos \theta') \\ +\hat{e}_z \cos \psi \sin \theta' \cos \phi' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Calcoliamo $\mathbf{A}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\sigma \Omega \times \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} R^2 d\phi' \sin \theta' d\theta'$$



Guscio sferico di carica

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sigma \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} R^2 d\phi' \sin \theta' d\theta'$$

- Abbiamo utilizzato l'elemento di superficie da' in coordinate sferiche relativo al vettore posizione $\mathbf{r}'$ $da' = R^2 d\phi' \sin \theta' d\theta'$
- Osservazioni
- Il denominatore $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ dipende solo dalla variabile di integrazione θ' , non da ϕ' $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta']^{\frac{1}{2}}$
- La dipendenza da ϕ' è limitata al numeratore

$$\sigma \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}' = \sigma R \omega \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{e}}_x \cos \psi \sin \theta' \sin \phi' \\ +\hat{\mathbf{e}}_y (\cos \psi \sin \theta' \cos \phi' - \sin \psi \cos \theta') \\ +\hat{\mathbf{e}}_z \cos \psi \sin \theta' \cos \phi' \end{bmatrix}$$

- Poiché l'integrazione su ϕ' va da 0 a 2π , tutti gli integrali delle funzioni trigonometriche di ϕ' si annullano
 - Otteniamo
- $$\mathbf{A}(r, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{-\sigma R \omega \sin \psi \cos \theta' \hat{\mathbf{e}}_y}{[r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta']^{\frac{1}{2}}} R^2 d\phi' \sin \theta' d\theta'$$

Guscio sferico di carica

$$\mathbf{A}(r, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{-\sigma R \omega \sin \psi \cos \theta' \hat{\mathbf{e}}_y}{\left[r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta' \right]^{\frac{1}{2}}} R^2 d\phi' \sin \theta' d\theta'$$

- **Posto** $\cos \theta' = x$

$$\mathbf{A}(r, \theta) = \frac{\mu_0}{2} \sigma R^3 \omega \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_y \int_{-1}^{+1} \frac{x dx}{\left[r^2 + R^2 - 2rRx \right]^{\frac{1}{2}}}$$

- **Si verifica facilmente**

$$z = a + bx \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{z}} = \left(\frac{z}{3} - a \right) \frac{2\sqrt{z}}{b^2}$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x dx}{\left[r^2 + R^2 - 2rRx \right]^{\frac{1}{2}}} = - \frac{R^2 + r^2 + Rrx}{3R^2 r^2} \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rrx} \Big|_{-1}^{+1}$$

$$= - \frac{1}{3R^2 r^2} \left[(R^2 + r^2 + Rr) |R - r| - (R^2 + r^2 - Rr)(R + r) \right]$$

- **Notare l'inversione dell'ordine di integrazione**
- **Notare inoltre l'apparizione del modulo $|R - r|$ nella valutazione della primitiva per $x = +1$**
- **Differenzia la soluzione all'interno e all'esterno della sfera**

Guscio sferico di carica

- Specializziamo il risultato nelle due regioni
 - All'interno della sfera $r < R$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{3R^2r^2} \left[(R^2 + r^2 + Rr) |R - r| - (R^2 + r^2 - Rr)(R + r) \right] \\ &= -\frac{1}{3R^2r^2} \left[(R^2 + r^2 + Rr)(R - r) - (R^2 + r^2 - Rr)(R + r) \right] = \frac{2r}{3R^2} \end{aligned}$$

- All'esterno della sfera $r > R$

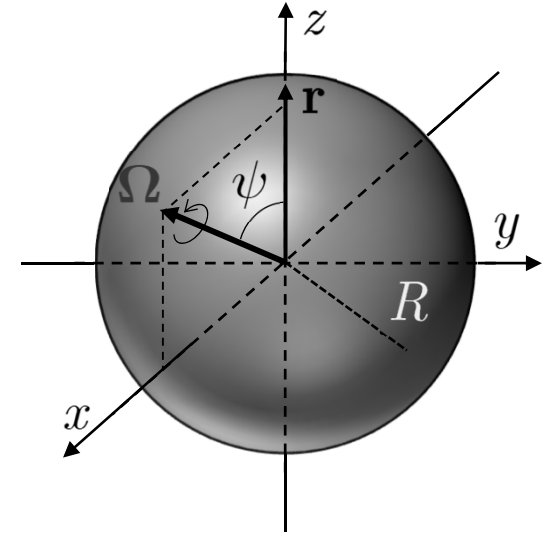
$$= -\frac{1}{3R^2r^2} \left[(R^2 + r^2 + Rr)(r - R) - (R^2 + r^2 - Rr)(R + r) \right] = \frac{2R}{3r^2}$$

- Ricordiamo l'espressione per $\mathbf{A}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{A}(r, \theta) = -\frac{\mu_0}{2} \sigma R^3 \omega \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_y \int_{-1}^{+1} \frac{xdx}{\left[r^2 + R^2 - 2rRx \right]^{\frac{1}{2}}} = \begin{cases} -\frac{\mu_0}{3} \sigma Rr \omega \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_y & r < R \\ -\frac{\mu_0}{3} \sigma \frac{R^4}{r^2} \omega \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_y & r > R \end{cases}$$

Guscio sferico di carica

$$\mathbf{A}(r, \theta) = \begin{cases} -\frac{\mu_0}{3} \sigma R r \omega \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_y & r < R \\ -\frac{\mu_0}{3} \sigma \frac{R^4}{r^2} \omega \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_y & r > R \end{cases}$$



- Rimane ancora un aspetto da elaborare
- Notiamo che
 - ψ è l'angolo fra $\mathbf{r}$ e $\boldsymbol{\Omega}$
 - Il potenziale vettore è perpendicolare al piano su cui giacciono $\boldsymbol{\Omega}$ e $\mathbf{r}$
- Abbiamo pertanto

$$r \omega \sin \psi \hat{\mathbf{e}}_y = -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$$

Indipendente dal sistema di coordinate usato

- Inserendo nella formula

$$\mathbf{A}(r, \theta) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{3} \sigma R \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} & r < R \\ \frac{\mu_0}{3} \sigma \frac{R^4}{r^3} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} & r > R \end{cases}$$

Da confrontare con il potenziale di un dipolo magnetico $\mathbf{m}$ (diap. 106)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \mathbf{m} = \frac{QR^2}{3} \boldsymbol{\Omega}$$

Guscio sferico di carica

- Ritornando al sistema di riferimento in cui Ω è parallelo all'asse z

$$\Omega = \omega \hat{e}_z \quad \hat{e}_z = \cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta$$

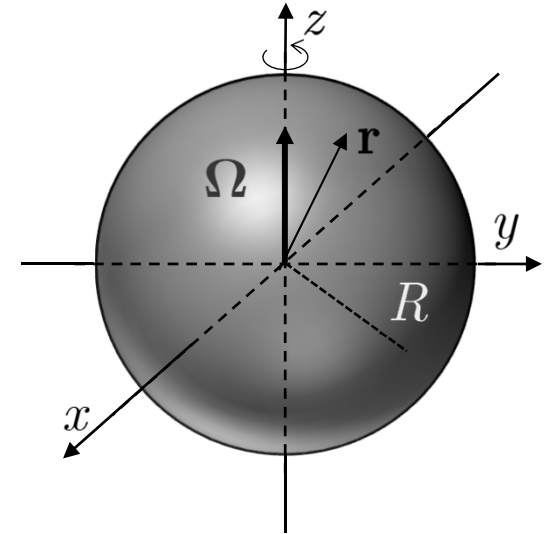
$$\mathbf{r} = r \hat{e}_r \quad \Omega \times \mathbf{r} = \omega r \sin \theta \hat{e}_\phi$$

$$\mathbf{A}(r, \theta) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{3} \sigma \omega R r \sin \theta \hat{e}_\phi & r < R \\ \frac{\mu_0}{3} \sigma \omega \frac{R^4}{r^2} \sin \theta \hat{e}_\phi & r > R \end{cases}$$

- Per $r > R$ abbiamo un potenziale di dipolo magnetico
- Calcoliamo il campo all'interno della sfera

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \hat{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r A_\theta - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \right] \hat{e}_\phi$$

$$B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) = \frac{\mu_0}{3} \sigma \omega R r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \sin \theta) = \frac{2\mu_0}{3} \sigma \omega R \cos \theta$$



Guscio sferico di carica

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

- Calcoliamo la componente θ

$$B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\mu_0}{3} \sigma \omega R r \sin \theta \right) = -\frac{2\mu_0}{3} \sigma \omega R \sin \theta$$

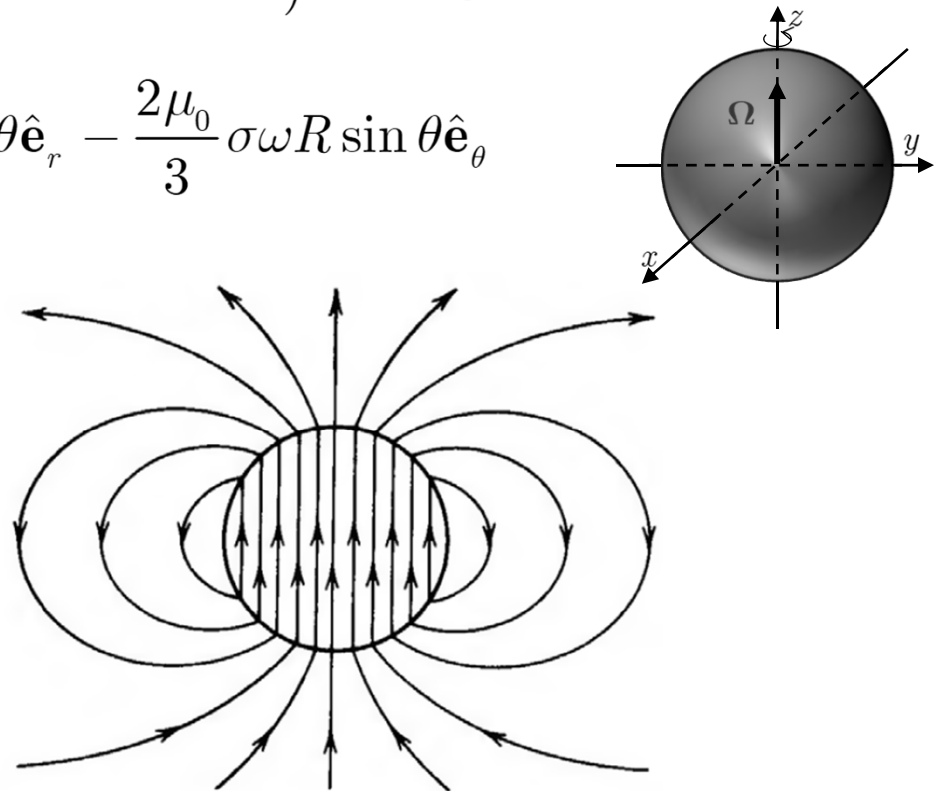
- In definitiva

$$\mathbf{B} = B_r \hat{\mathbf{e}}_r + B_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{2\mu_0}{3} \sigma \omega R \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r - \frac{2\mu_0}{3} \sigma \omega R \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$= \frac{2\mu_0}{3} \sigma \omega R (\cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta)$$

$$\mathbf{B} = \frac{2\mu_0}{3} \sigma \omega R \hat{\mathbf{e}}_z$$

- All'esterno un campo di dipolo
- All'interno un campo uniforme



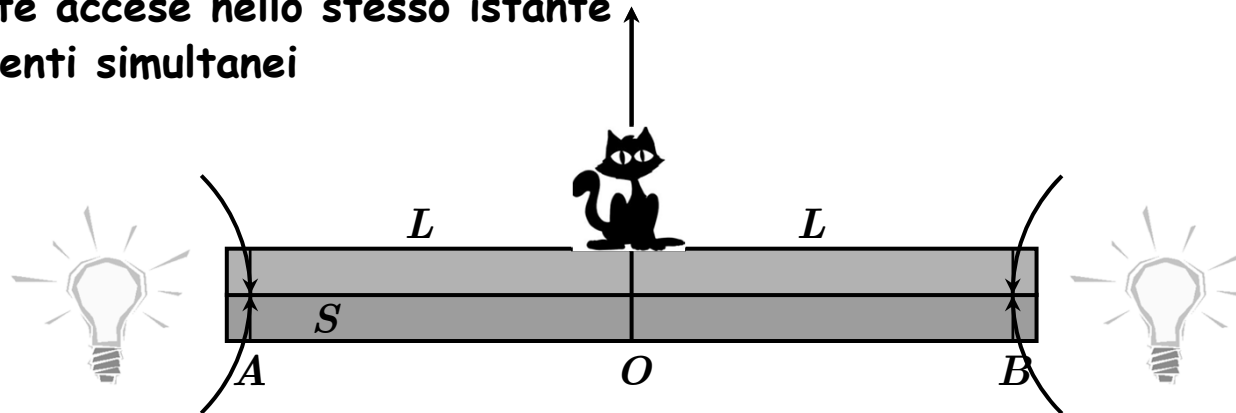
La Teoria della Relatività

- Einstein ipotizzò che la Relatività Galileiana non fosse adeguata per i fenomeni elettromagnetici
- Assunse pertanto i seguenti due postulati:
 - Tutte le leggi della fisica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali. Non esiste un sistema di riferimento privilegiato
 - Questo postulato è simile a quello Galileiano
 - Einstein lo rafforza assumendo che valga per TUTTE le leggi fisiche
 - Anche le leggi dell'elettromagnetismo
 - Inoltre tutti i sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti
 - La velocità della luce nello spazio vuoto ha lo stesso valore c in tutti i sistemi inerziali
 - Questo postulato è in evidente contraddizione con la Relatività Galileiana
- I due precedenti postulati costituiscono l'enunciazione del principio di Relatività Ristretta
 - Colpisce la semplicità dei due postulati
 - Tuttavia le conseguenze modificheranno profondamente la fisica e la stessa visione del mondo



Relatività della simultaneità

- La prima conseguenza dei Principi di Relatività di Einstein è la relatività del concetto di simultaneità
 - La simultaneità non è un concetto assoluto
 - Dipende dallo stato di moto dell'osservatore
- Consideriamo un sistema di riferimento S e un osservatore O , a riposo, posto nell'origine e equidistante dai punti A e B
 - Nei due punti sono poste due lampade
 - Le lampade vengono accese e la loro luce viaggia verso l'osservatore
 - La luce impiega lo stesso tempo L/c per raggiungere l'osservatore
- Le due onde raggiungono l'osservatore allo stesso tempo
 - L'osservatore conclude che le lampade, delle quali conosce la distanza da O , sono state accese nello stesso istante
 - Due eventi simultanei



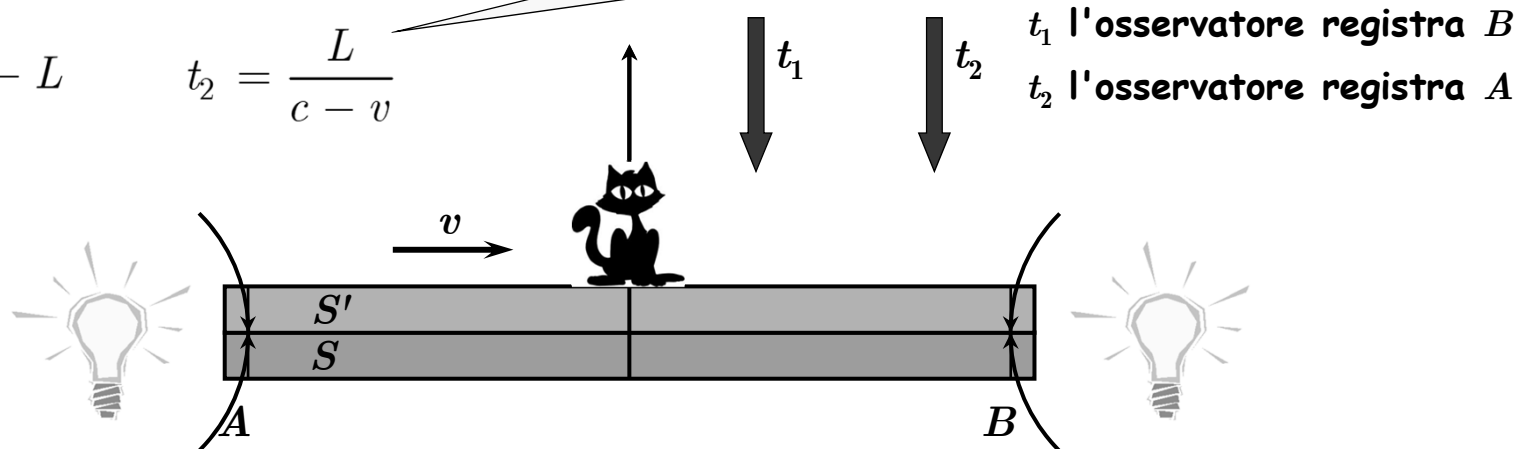
Relatività della simultaneità

- Ripetiamo l'esperimento considerando adesso l'osservatore solidale con il sistema di riferimento S' che si muove con velocità v verso destra
- L'osservatore vede i due segnali luminosi a due tempi differenti t_1 e t_2
- L'osservatore vede i due segnali che viaggiano sempre con velocità c (il secondo postulato di Einstein)
- Infine l'osservatore sa che quando le origini dei due sistemi coincidevano ($t = 0$) le due lampade erano equidistanti
- L'osservatore conclude che i due eventi non sono simultanei
- Calcoliamo i tempi

$$vt_1 = L - ct_1 \quad t_1 = \frac{L}{v + c}$$

$$vt_2 = ct_2 - L \quad t_2 = \frac{L}{c - v}$$

I due tempi sono differenti !



Relatività della simultaneità

- È necessario notare che l'osservatore calcola i tempi dei due eventi

- L'osservatore conosce le velocità dei segnali e le posizioni delle sorgenti

- Al tempo t_1

- L'osservatore ha percorso uno spazio vt_1

- Il fronte del segnale 1 si trova alla coordinata $L - vt_1$

- Al tempo t_2

- L'osservatore ha percorso uno spazio vt_2

- Il fronte del segnale 2 si trova alla coordinata $vt_2 - L$

- Se i segnali fossero suoni viaggerebbero con velocità differenti (c la velocità del suono)

$$v_1 = c - v \quad v_2 = c + v$$

$$vt_1 = L - ct_1 + vt_1$$

$$t_1 = L/c$$

$$vt_2 = (c + v)t_2 - L$$

$$t_2 = L/c$$

- Se i segnali sono luce entrambi viaggiano alla stessa velocità c

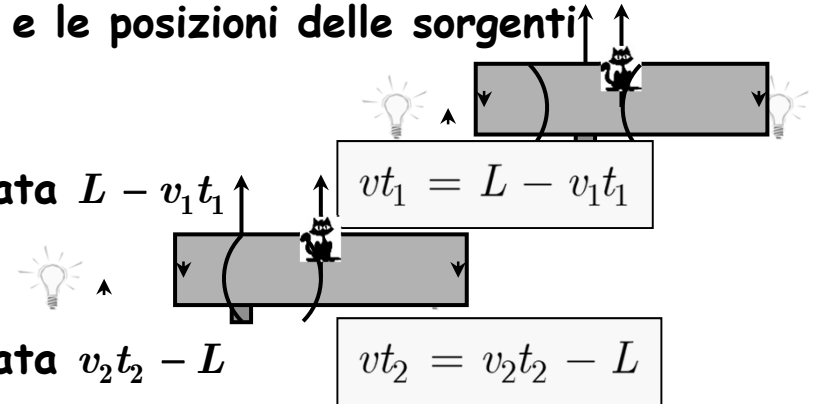
$$v_1 = c \quad v_2 = c$$

$$vt_1 = L - ct_1$$

$$t_1 = \frac{L}{v + c}$$

$$vt_2 = ct_2 - L$$

$$t_2 = \frac{L}{c - v}$$



La Teoria della Relatività

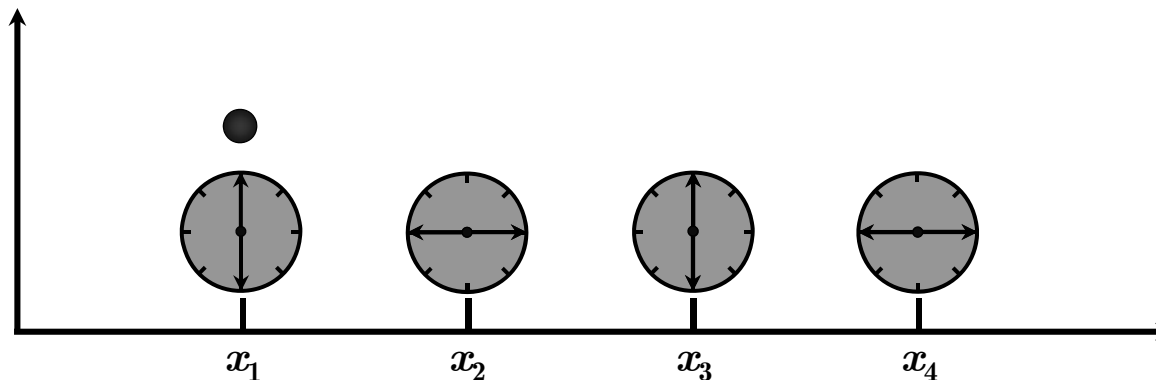
- Le considerazioni precedenti mostrano che l'ipotesi che la velocità della luce sia la stessa in tutti i sistemi inerziali ha delle conseguenze profonde
 - Due eventi simultanei in un sistema di riferimento non lo sono più in un altro sistema inerziale che si muove rispetto al primo
- Un evento viene individuato da 4 numeri $x = (t, \mathbf{r})$
 - La simultaneità di due eventi x_1 e x_2 significa $t_1 = t_2$
 - Nel sistema S' i due eventi x'_1 e x'_2 non sono più simultanei significa che $t'_1 \neq t'_2$
- Il tempo non è più assoluto come nella Relatività Galileiana
 - Dobbiamo trovare le leggi di trasformazione per passare da un sistema di riferimento all'altro
- Dobbiamo inoltre fare attenzione al fatto che la velocità della luce è finita
 - La trasmissione dei segnali non è istantanea
 - Nella definizione di simultaneità abbiamo tenuto conto del ritardo dei segnali
- In particolare la sincronizzazione di due orologi
 - Due orologi sono sincronizzati se sono nello stesso luogo e indicano lo stesso tempo
 - Se non sono nello stesso punto dello spazio bisogna utilizzare una procedura adeguata

Sincronizzazione degli orologi

- Consideriamo un sistema di riferimento
 - Immaginiamo che ci sia un orologio in ogni posizione $x_1, x_2, x_3, x_4 \dots$
- Per sincronizzare gli orologi utilizziamo un segnale luminoso
 - La luce ha la stessa velocità in ogni sistema inerziale
 - È il modo più veloce per trasmettere informazione
- Occorre tenere conto del ritardo dovuto al tempo necessario perché il segnale luminoso passi da x_i a x_{i+1}

$$\Delta t = \frac{x_{i+1} - x_i}{c}$$

- Quando facciamo partire il primo orologio inviamo un segnale luminoso agli altri orologi
 - Gli altri orologi partono (con opportuno ritardo) quando ricevono il segnale



Trasformazioni di Lorentz

- Consideriamo due sistemi di riferimento inerziali S e S'
 - Nel sistema S un evento è descritto dalle coordinate (x, y, z, t)
 - Nel sistema S' lo stesso evento è descritto dalle coordinate (x', y', z', t')
- Innanzitutto la relazione fra i due gruppi di coordinate deve essere lineare
 - Se non fosse lineare lo spazio non sarebbe omogeneo
 - Ad esempio la lunghezza di un segmento dipenderebbe dalla sua posizione

- La trasformazione è pertanto

- Nel caso in considerazione gli assi x e x' coincidono sempre

- Un punto sull'asse x ($y = 0$ e $z = 0$) si trasforma nel punto con $y' = 0$, $z' = 0$

- y' e z' non possono dipendere da x o da t

$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \implies y' = a_{22}y + a_{23}z$$

$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \implies z' = a_{32}y + a_{33}z$$

- Il piano $z = 0$ si trasforma nel piano $z' = 0$

$$a_{32} = 0 \rightarrow z' = a_{33}z$$

- Analogamente il piano $y = 0 \rightarrow y' = 0$

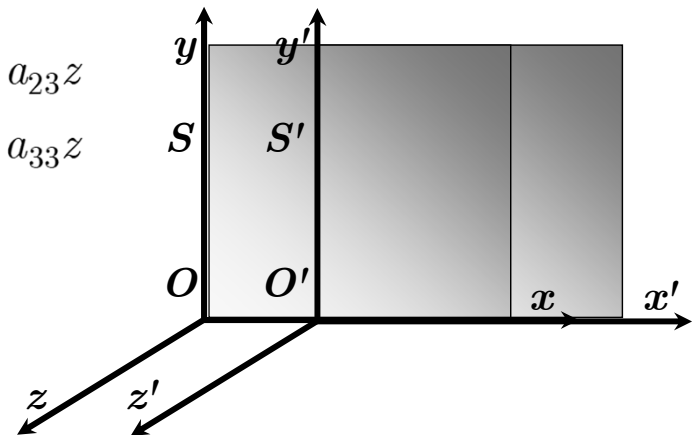
$$a_{23} = 0 \rightarrow y' = a_{22}y$$

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \quad \leftarrow$$

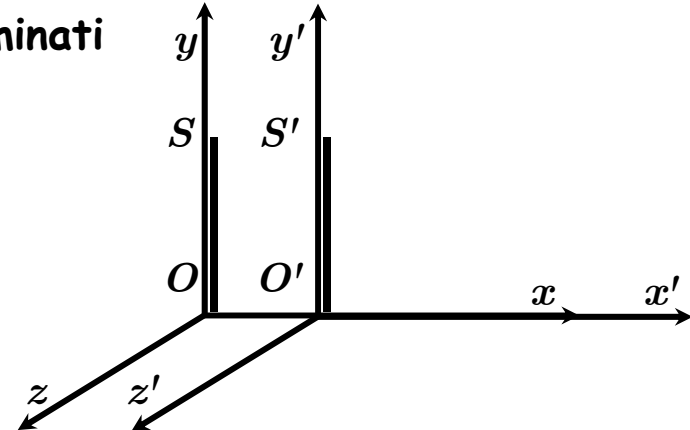
$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \quad \leftarrow$$

$$t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t$$



Trasformazioni di Lorentz

- I coefficienti a_{22} e a_{33} possono essere determinati utilizzando il principio di relatività
- Consideriamo la prima equazione $y' = a_{22}y$
 - Supponiamo che nel sistema S ci sia un'asta lunga 1 m posta parallela all'asse y nel punto $x = 0$ e $z = 0$
 - Nel sistema S' l'osservatore vede l'asta lunga $L' = a_{22} \times 1 = a_{22}$
- Portiamo adesso l'asta in S'
 - L'osservatore in S' adesso misura l'asta (a riposo) e ottiene 1 m
 - Per l'osservatore in S la legge di trasformazione è $y = \frac{1}{a_{22}} y'$
 - Per S pertanto l'asta è lunga $L = 1/a_{22} \times 1 = 1/a_{22}$
- Per il primo postulato di Einstein le due condizioni devono essere equivalenti
 - Altrimenti si potrebbero distinguere i due sistemi
 - Le due lunghezze devono essere le stesse $L = L' \rightarrow a_{22} = 1/a_{22}$
- Pertanto



$$a_{22} = 1 \rightarrow y' = y$$

e analogamente

$$a_{33} = 1 \rightarrow z' = z$$

Trasformazioni di Lorentz

- Veniamo adesso alle altre due equazioni
- Visto nel sistema S l'origine O' di S' si muove di moto rettilineo uniforme
 - Dato l'orientamento degli assi il punto O' è dato da

$$O' = (vt, 0, 0)$$

- Nel sistema S' l'origine è a riposo ed è data da

$$O' = (0, 0, 0)$$

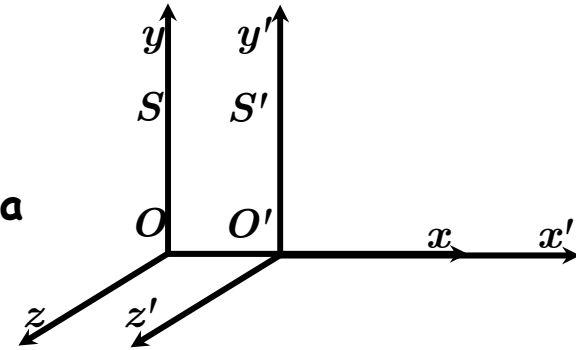
- Ricordiamo che per la coordinata x' si ha $x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t$
- Imponiamo la corrispondenza $x = vt \rightarrow x' = 0$ $0 = a_{11}vt + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t$
- Questa relazione deve essere valida per arbitrari y, z . Pertanto

$$a_{12} = 0 \quad a_{13} = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_{11}vt + a_{14}t = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_{11}v + a_{14} = 0 \quad \boxed{a_{14} = -a_{11}v}$$

$$\boxed{x' = a_{11}x - a_{11}vt}$$

- Per la trasformazione del tempo $t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t$
- Per l'isotropia dello spazio non può dipendere da y o da z
 - In caso contrario orologi disposti a y o a $-y$ (simmetricamente rispetto all'asse x) misurerebbero tempi diversi

$$a_{42} = 0 \quad a_{43} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{t' = a_{41}x + a_{44}t}$$



Trasformazioni di Lorentz

- La nostra trasformazione si è pertanto ridotta a
 - Dobbiamo trovare i 3 coefficienti a_{11} , a_{41} , a_{44}
- Per trovarli utilizziamo il secondo postulato di Einstein
 - La velocità della luce ha lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento
 - Un segnale luminoso emesso dall'origine si propaga come un'onda sferica
 - Al tempo t il fronte dell'onda ha un raggio dato da

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

- Nel sistema S' il fronte sarà ancora sferico

$$R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

- Sostituiamo in questa equazione le coordinate trasformate

$$(a_{11}x - a_{11}vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (a_{41}x + a_{44}t)^2$$

$$\underbrace{a_{11}^2 x^2} + \underbrace{a_{11}^2 v^2 t^2} - \underbrace{2a_{11}^2 xvt} + y^2 + z^2 = \underbrace{c^2 a_{41}^2 x^2} + \underbrace{c^2 a_{44}^2 t^2} + \underbrace{2c^2 a_{41} a_{44} xt}$$

- Raccogliamo i coefficienti

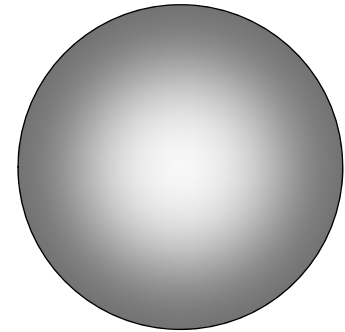
$$(a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2) x^2 + y^2 + z^2 = (c^2 a_{44}^2 - a_{11}^2 v^2) t^2 + 2(c^2 a_{41} a_{44} + a_{11}^2 v) xt$$

$$x' = a_{11}x - a_{11}vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = a_{41}x + a_{44}t$$



Trasformazioni di Lorentz

$$\left(a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2\right) x^2 + y^2 + z^2 = \left(c^2 a_{44}^2 - a_{11}^2 v^2\right) t^2 + 2\left(c^2 a_{41} a_{44} + a_{11}^2 v\right) x t$$

- Questa equazione deve essere identica a

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

- Per il principio di identità dei polinomi
 - È un sistema di 3 equazioni e 3 incognite
 - Si può verificare che la soluzione è

$$\begin{cases} a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2 = 1 \\ c^2 a_{44}^2 - a_{11}^2 v^2 = c^2 \\ c^2 a_{41} a_{44} + a_{11}^2 v = 0 \end{cases}$$

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \quad a_{44} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \quad a_{41} = -\frac{v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

- In conclusione la legge di trasformazione (Trasformazione di Lorentz) è

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - vx / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \end{aligned}$$

- Osservazione

- La trasformazione lascia invariata la quantità

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$



Trasformazioni di Lorentz

- Se si invertono le equazioni

$$\begin{array}{l} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - vx / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + vx' / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \end{array}$$

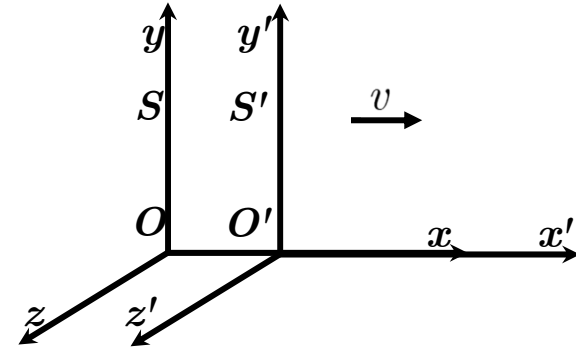
- Come ci saremmo potuti aspettare con ragionamenti fisici, sulla base del primo postulato le equazioni devono essere formalmente identiche
 - L'unica differenza possibile è il cambiamento $v \rightarrow -v$
- Un'altra osservazione è che per velocità piccole rispetto alla velocità della luce

$$\frac{v}{c} \approx 0 \quad \sqrt{1 - v^2 / c^2} \approx 1 \quad x' \approx x - vt \quad t' \approx t$$

- Per velocità piccole rispetto alla velocità della luce ritroviamo le trasformazioni di Galileo

Trasformazioni di Lorentz

- Ricordiamo la forma delle trasformazioni di Lorentz
- Consideriamo due sistemi S e S' , di origine O e O'
 - Gli assi x e x' coincidono
 - Gli assi y e y' e gli assi z e z' rimangono sempre paralleli
 - Il sistema S' si muove rispetto al sistema S con velocità v costante nella direzione x
- Un punto nello spazio-tempo è individuato dalle 4 coordinate $x^\mu = (ct, x, y, z)$
 - Rispettivamente in S x^μ e in S' x'^μ
 - La legge di trasformazione e la sua inversa sono



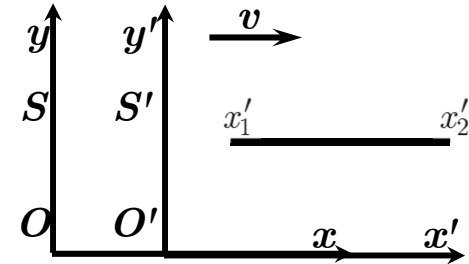
$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} & y' &= y & x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} & y &= y' \\ct' &= \frac{ct - vx / c}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} & z' &= z & ct &= \frac{ct' + vx' / c}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} & z &= z'\end{aligned}$$

- Osservazione: La trasformazione lascia invariata la quantità

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

Contrazione di Lorentz

- Veniamo alle conseguenze delle trasformazioni di Lorentz
- Consideriamo un sistema S' in moto con velocità v rispetto al sistema S
 - Consideriamo una barra di lunghezza L_0 a riposo nel sistema S'
 - La barra ovviamente si muove con velocità v rispetto a S
 - Supponiamo che in S' gli estremi siano $x'_1 = 0$ $x'_2 = L_0$
- Vediamo dove sono gli estremi della barra nel sistema S ad uno stesso tempo t per le due estremità (per semplicità $t = 0$)



- La trasformazione di Lorentz è

$$\begin{aligned} x'_1 &= \gamma(x_1 - vt_1) & 0 &= \gamma x_1 & x_1 &= 0 \\ x'_2 &= \gamma(x_2 - vt_2) & L_0 &= \gamma x_2 & x_2 &= \frac{L_0}{\gamma} \end{aligned}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \gamma(x - vt)$$

- Pertanto la lunghezza della barra in S è $L = x_2 - x_1 = \frac{L_0}{\gamma}$ $t_2 = t_1$

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0 \sqrt{1 - v^2 / c^2}$$

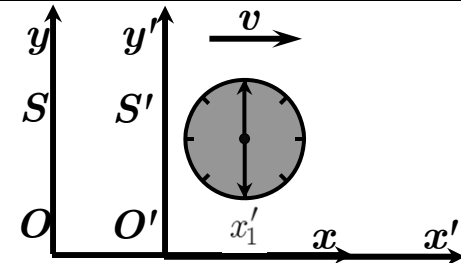
Contrazione di Lorentz

- Nel sistema S la barra è più corta !!
 - NB: abbiamo scelto $t_1 = t_2 = 0$ per semplicità
 - Avremmo trovato lo stesso risultato per qualsiasi $t_1 = t_2$

L_0 : lunghezza propria

Dilatazione del tempo

- Consideriamo un sistema S' in moto con velocità v rispetto al sistema S
- Consideriamo un orologio a riposo nel sistema S' e posto in x'_1
 - L'orologio si muove con velocità v rispetto a S
 - Un intervallo di tempo $\Delta t'$ misurato dall'orologio in S' (fermo in x'_1) è dato da $\Delta t' = t'_2 - t'_1$
- Nel sistema S le due misure dell'orologio t_1 e t_2 sono legate a quelle fatte nel sistema S' dalla trasformazione di Lorentz



$$t = \frac{t' + vx'_1 / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$t_1 = \frac{t'_1 + vx'_1 / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \quad t_2 = \frac{t'_2 + vx'_1 / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

- L'intervallo di tempo Δt misurato in S è pertanto

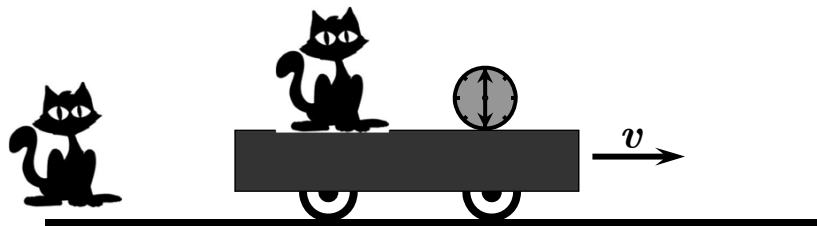
$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1 + v(x'_1 - x'_1) / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

- Nel sistema S l'intervallo di tempo è più lungo
 - Visto in S l'orologio "batte il tempo più lentamente" !
 - Visto da S ogni fenomeno di S' dura più a lungo
 - Ad esempio la vita media di una particella instabile
 - NB: nel sistema S t_1 e t_2 sono misurati in posizioni differenti

Dilatazione del tempo

- Per capire meglio il significato della dilatazione del tempo confrontiamo le letture di un orologio
 - Letture fatte da un osservatore fermo rispetto all'orologio
 - Letture fatte da un osservatore che vede l'orologio in movimento



- Nella diapositiva precedente abbiamo utilizzato la trasformazione di Lorentz per concludere che l'osservatore S vede scorrere il tempo più velocemente di quanto vede S'
- Per comprendere meglio questo sorprendente fenomeno costruiamo un orologio e esaminiamone il funzionamento nei due casi

Dilatazione del tempo

- L'orologio consiste di una sorgente di impulsi luminosi e di uno specchio
 - L'impulso luminoso è emesso in basso
 - Viaggia fino allo specchio dove è riflesso
 - Quando ritorna nella parte in basso fa partire un altro impulso
- Il periodo dell'orologio è $2T'$
- L'osservatore S vede l'orologio in movimento
 - In un semiperiodo l'orologio si sposta di vT
 - Il semiperiodo è adesso dato dall'equazione $T = \frac{\sqrt{L^2 + v^2 T'^2}}{c}$

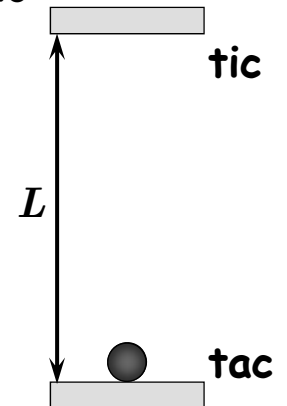
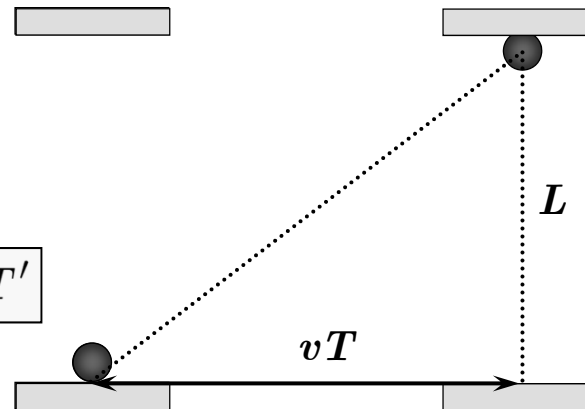
$$T' = L / c$$

$$T^2 = \frac{L^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} T'^2$$

$$T^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = \frac{L^2}{c^2}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{L}{c}$$

$$T = \gamma T'$$

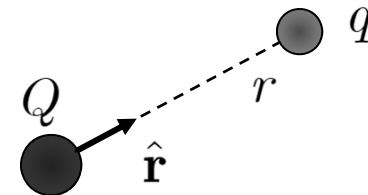


- Il tempo di S scorre più velocemente
 - Osserviamo che la velocità della luce è la stessa nei due casi

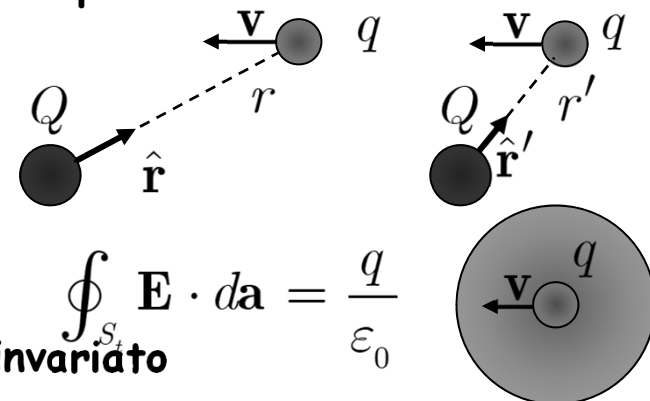
Invarianza relativistica della carica

- Iniziamo una serie di ragionamenti e di studi che ci porteranno a comprendere come la forza magnetica sia un fenomeno intimamente connesso con la forza elettrica e con la relatività ristretta
- Iniziamo con la misura della carica elettrica quando la particella carica è in movimento
- Possiamo misurare una carica q utilizzando una carica nota Q e la legge di Coulomb

$$\mathbf{F} = q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$



- Questa procedura va benissimo quando le cariche sono a riposo
- Se le cariche sono in movimento la forza può dipendere da altri fattori
 - Può dipendere dal modulo della velocità e dalla sua direzione
- Esaminiamo due casi la carica misurata potrebbe essere diversa
- È un fatto sperimentale di fondamentale importanza che la legge di Gauss vale anche per le cariche in movimento
- Significa che sebbene il valore del campo $\mathbf{E}$ in ogni punto della superficie può essere differente rispetto al suo valore quando $v = 0$ tuttavia il flusso totale attraverso S_t è invariato

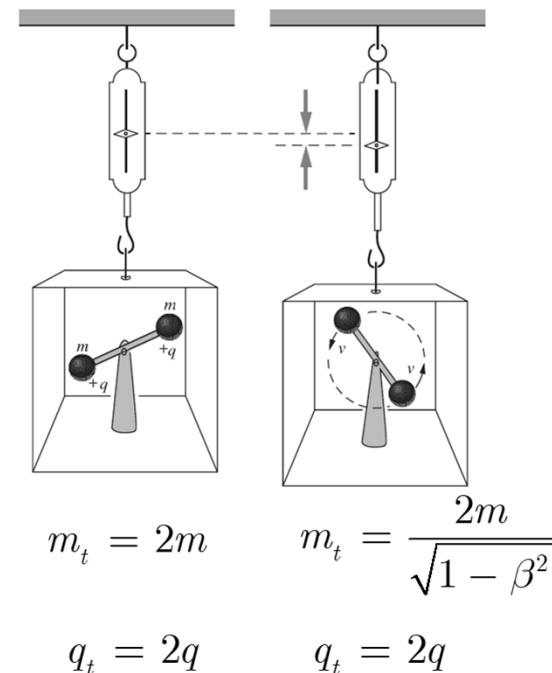
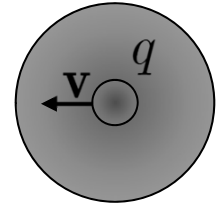


$$\oint_{S_t} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Invarianza relativistica della carica

- Il significato di S_t (dipendente dal tempo) è il seguente
 - Il campo elettrico generato da q è misurato in tutti i punti della superficie allo stesso tempo t
- Un altro fatto di fondamentale importanza è che il valore della carica elettrica all'interno della superficie non dipende dalla velocità con cui si muove la carica
 - Una situazione completamente differente da quanto succede per la massa
 - La massa dipende dalla velocità con cui essa si muove
 - La carica è sempre la stessa
- Si pensi ad esempio ad un conduttore
 - La carica totale (ioni + elettroni) è nulla
 - Se si scalda il conduttore la velocità delle particelle aumenta
 - Aumenta di più per gli elettroni che per gli ioni
 - Se la carica dipendesse dalla velocità il conduttore non sarebbe più neutro

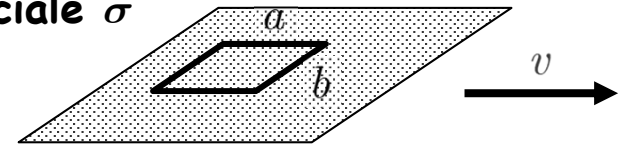
$$\oint_{S_t} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{\epsilon_0}$$



La carica elettrica è un invariante relativistico

Densità di carica

- Consideriamo un piano di carica con densità superficiale σ
- Consideriamo un rettangolo di lati a e b : $S = ab$
 - La carica all'interno del rettangolo è $q = \sigma S$
- Supponiamo adesso che il piano si muova con una velocità v parallela al lato a del rettangolo
 - Il lato a subisce una contrazione di Lorentz



$$a \rightarrow \frac{a}{\gamma}$$

- La superficie del rettangolo subisce la stessa contrazione

$$S = ab \rightarrow S' = \frac{ab}{\gamma} = \frac{S}{\gamma}$$

- La carica dentro il rettangolo in moto è

$$q' = \sigma' S' = \sigma' \frac{S}{\gamma} \quad \text{ma la carica è un invariante} \quad q = q' \quad \sigma S = \sigma' \frac{S}{\gamma}$$

$$\sigma = \frac{\sigma'}{\gamma} \quad \sigma' = \gamma \sigma$$

- Vista nel sistema S la densità di carica del piano in movimento è aumentata
- Valgono le stesse relazioni per le densità di volume e le densità lineari