
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 24 - 13.03.2023

Potenziale di una spira
Forze sui dipoli magnetici
Energia potenziale del dipolo

Anno Accademico 2022/2023

Potenziale di una spira

- Calcoliamo infine il potenziale vettore di una spira
 - Facciamo un calcolo utile per il futuro del nostro studio
 - Una formula approssimata per distanze grandi dal centro della spira
 - Analogo alla forma del dipolo elettrico
 - Sarà utile nello studio dei campi magnetici nella materia
 - Utilizziamo una derivazione matematica utilizzando i vettori

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{d\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}$$

- Sviluppiamo il denominatore

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^{-1} = (r^2 + r_1^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

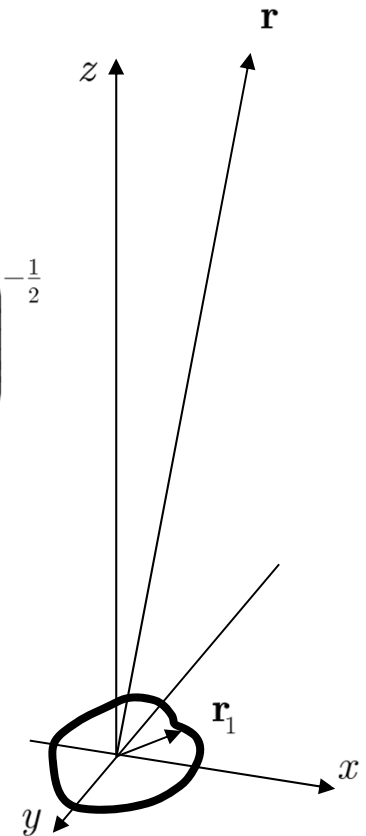
- Approssimando al primo ordine di r_1/r

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^{-1} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1}{r^2} \right)$$

- Otteniamo

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} \oint_C d\mathbf{r}_1 + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} \oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1$$



Potenziale di una spira

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} \oint_C d\mathbf{r}_1 + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} \oint_C (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1$$

- Il primo termine è nullo
- Sviluppiamo l'integrando del secondo termine
- Utilizziamo l'identità $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1) = \mathbf{r}_1 (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}_1) - d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1)$$

$$\implies d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1) = \mathbf{r}_1 (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}_1) + (\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}$$

ordine scambiato

- Inoltre

$$d[\mathbf{r}_1 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1)] = d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1) + \mathbf{r}_1 (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}_1)$$

$\mathbf{r}$ è costante

$$\implies d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1) = d[\mathbf{r}_1 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1)] - \mathbf{r}_1 (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}_1)$$

- Sommiamo le due equazioni
- I termini $\mathbf{r}_1(\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}_1)$ si elidono

$$2d\mathbf{r}_1 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1) = d[\mathbf{r}_1 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1)] + (\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}$$

- Introduciamo la relazione trovata nel secondo integrale di $\mathbf{A}(\mathbf{r})$

Potenziale di una spira

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} \oint_C \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \frac{I}{2} \left[\oint_C d[\mathbf{r}_1 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1)] + \oint_C (\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1) \times \mathbf{r} \right]$$

- Il primo integrale è ancora una volta un differenziale esatto
- L'integrale su un cammino chiuso è nullo

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \frac{I}{2} \oint_C (\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1) \times \mathbf{r}$$

- Definiamo il momento magnetico $\mathbf{m}$ del circuito

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_C \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1$$

- Otteniamo l'espressione finale per il potenziale vettore di una spira (dipolo)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

- Sottolineiamo che si tratta di una formula approssimata
 - Valida solo per r molto maggiore delle dimensioni del circuito
 - Approssimazione di dipolo
 - Il termine di monopolo è nullo

$$\oint_C d\mathbf{r}_1 = 0$$

Il momento di dipolo magnetico

- Nel caso di una densità di corrente $\mathbf{J}$

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_C \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1 = \frac{1}{2} \oint_C JS \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1 \quad \boxed{\mathbf{J} \parallel d\mathbf{r}_1}$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{J} d^3\mathbf{r}$$

- Cerchiamo adesso di comprendere meglio il significato della definizione di momento magnetico della spira

- Specializziamolo al caso di una spira circolare

$$\mathbf{r}_1 = \hat{\mathbf{e}}_x a \cos \theta + \hat{\mathbf{e}}_y a \sin \theta$$

$$d\mathbf{r}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{d\theta} d\theta = (-\hat{\mathbf{e}}_x \sin \theta + \hat{\mathbf{e}}_y \cos \theta) a d\theta$$

$$\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1 = (\hat{\mathbf{e}}_x \cos \theta + \hat{\mathbf{e}}_y \sin \theta) a \times (-\hat{\mathbf{e}}_x \sin \theta + \hat{\mathbf{e}}_y \cos \theta) a d\theta$$

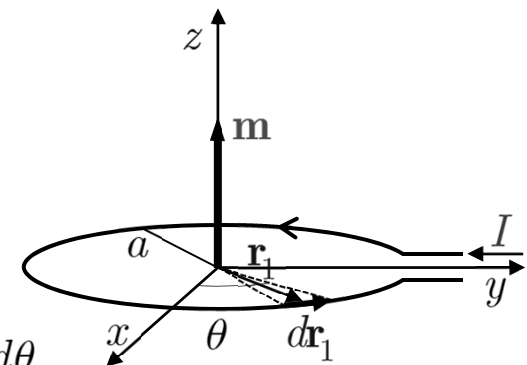
$$= (\hat{\mathbf{e}}_x \times \hat{\mathbf{e}}_y \cos^2 \theta - \hat{\mathbf{e}}_y \times \hat{\mathbf{e}}_x \sin^2 \theta) a^2 d\theta = (\hat{\mathbf{e}}_x \times \hat{\mathbf{e}}_y \cos^2 \theta + \hat{\mathbf{e}}_x \times \hat{\mathbf{e}}_y \sin^2 \theta) a^2 d\theta = \hat{\mathbf{e}}_z a^2 d\theta$$

- Pertanto il momento magnetico è

$$\mathbf{m} = \frac{I}{2} \oint_C \hat{\mathbf{e}}_z a^2 d\theta = \frac{I}{2} 2\pi a^2 \hat{\mathbf{e}}_z = I\pi a^2 \hat{\mathbf{e}}_z$$

- Il momento magnetico $\mathbf{m}$ è un vettore

- Perpendicolare al piano che contiene la spira
- Il modulo è uguale al prodotto della corrente per la superficie della spira



Esempio 2: una spira non piana

- Consideriamo adesso la spira in figura
 - La corrente della spira è I
 - Supponiamo che tutti i segmenti abbiano la stessa lunghezza w
 - Metà della spira giace nel piano $x-z$
 - L'altra metà della spira giace nel piano $y-z$
- La spira è equivalente a due spire piane
 - Le due correnti evidenziate in rosso e in blu si elidono quando si combinano le due spire piane per formare la spira iniziale
- Il momento magnetico delle due spire è semplice

- Per la spira 1 $\mathbf{m}_1 = w^2 I \hat{\mathbf{e}}_y$

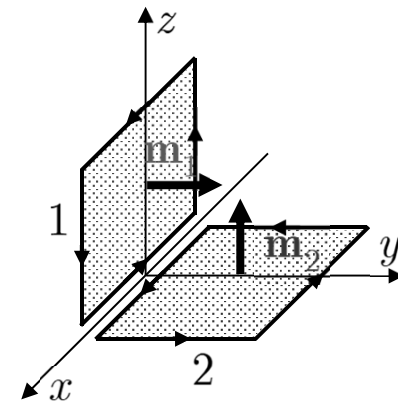
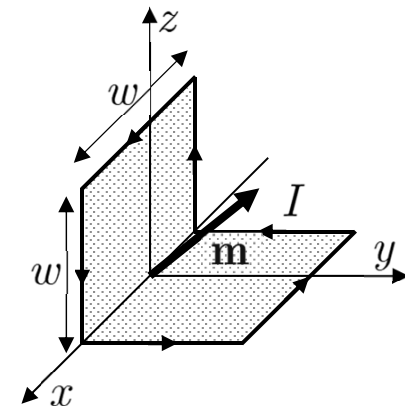
- Per la spira 2 $\mathbf{m}_2 = w^2 I \hat{\mathbf{e}}_z$

- Il momento magnetico della spira composta dalle spire 1 e 2 è pertanto

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 = w^2 I (\hat{\mathbf{e}}_y + \hat{\mathbf{e}}_z)$$

- Un vettore nel piano $z-y$, inclinato di 45° rispetto all'asse x e di modulo

$$|\mathbf{m}| = \sqrt{2} w^2 I$$



Potenziale di una spira

- Specializziamo al caso di un circuito con momento magnetico diretto lungo l'asse z
- Ad esempio la spira dell'esempio precedente

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{m}| \hat{\mathbf{e}}_z \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{e}}_x x + \hat{\mathbf{e}}_y y + \hat{\mathbf{e}}_z z \quad \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r} = \hat{\mathbf{e}}_z \times (\hat{\mathbf{e}}_x x + \hat{\mathbf{e}}_y y + \hat{\mathbf{e}}_z z)$$

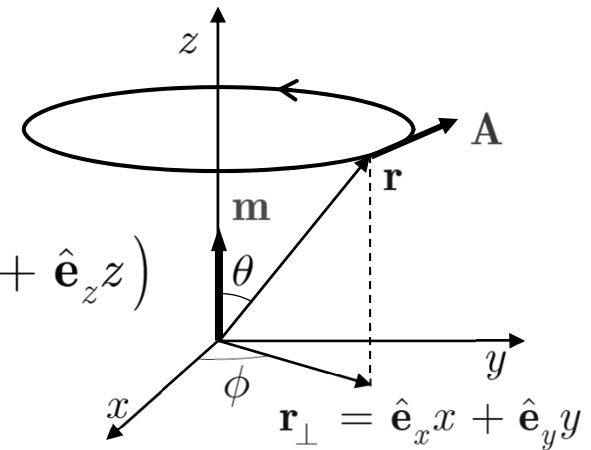
$$\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{r} = \hat{\mathbf{e}}_z \times \hat{\mathbf{e}}_x x + \hat{\mathbf{e}}_z \times \hat{\mathbf{e}}_y y = \hat{\mathbf{e}}_y x - \hat{\mathbf{e}}_x y$$

- Le componenti del potenziale vettore sono

$$A_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{m}| \frac{y}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{m}| \frac{r_\perp}{r^3} \sin \phi$$

$$A_y = \frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{m}| \frac{x}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{m}| \frac{r_\perp \cos \phi}{r^3}$$

$$A_z = 0$$



$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{m}| \frac{r_\perp}{r^3} \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{m}| \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

- Le linee di campo di $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ sono circonferenze concentriche con l'asse z

Il campo magnetico del dipolo

- Possiamo adesso calcolare il campo magnetico

- È conveniente fare il calcolo in coordinate sferiche $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{m}| \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_\phi$

- Il potenziale vettore ha solo la componente A_ϕ

- Ricordiamo l'espressione del rotore in coordinate sferiche

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}) \right] \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

- La componente B_ϕ è nulla ($A_\theta = A_r = 0$)

$$B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) = \frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{m}| \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{m}| \frac{2 \cos \theta}{r^3}$$

$$B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{m}| \frac{\sin \theta}{r^2} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{m}| \sin \theta \left(-\frac{1}{r^2} \right)$$

$$\boxed{B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{m}| \frac{\sin \theta}{r^3}} \quad \boxed{B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{m}| \frac{2 \cos \theta}{r^3}} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2\hat{\mathbf{e}}_r \cos \theta + \hat{\mathbf{e}}_\theta \sin \theta)$$

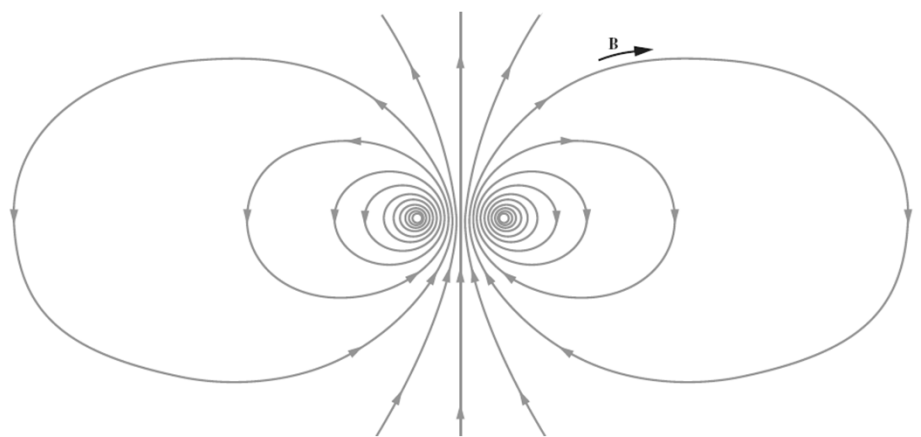
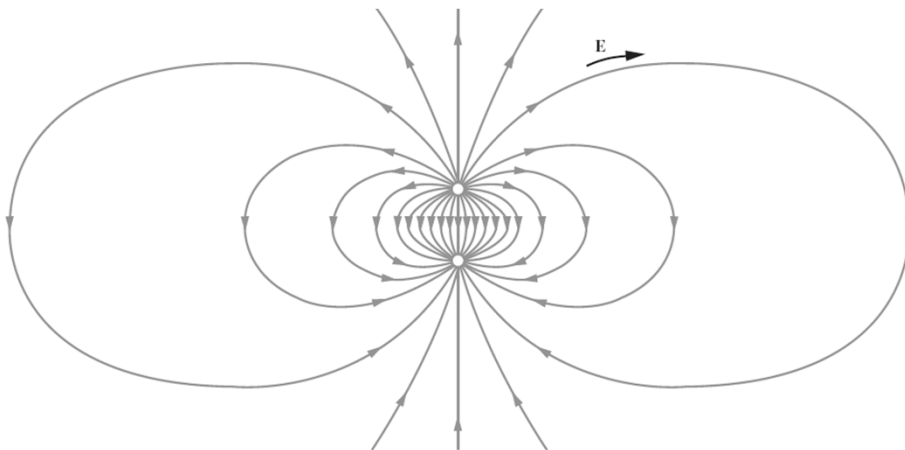
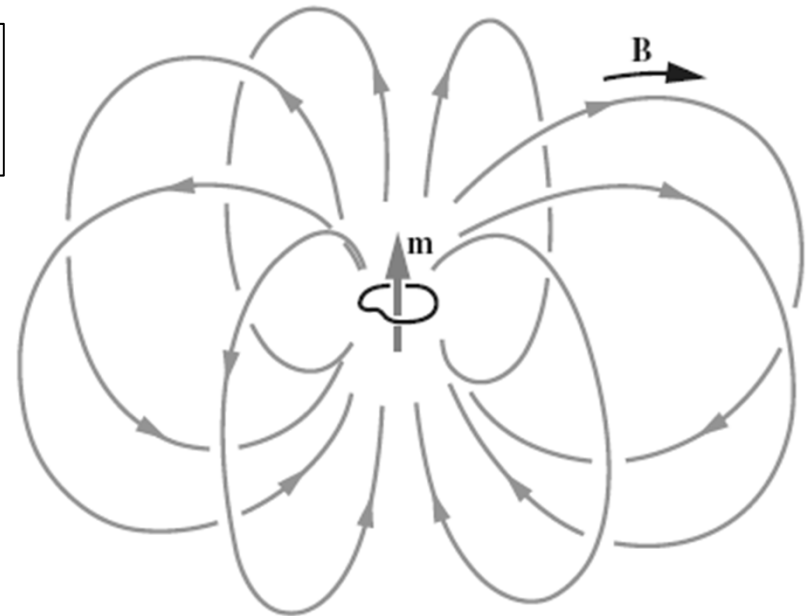
- Da confrontare con il campo del dipolo elettrico

Il campo magnetico del dipolo

$$B_{\theta} = \frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{m}| \frac{\sin \theta}{r^3}$$

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi} |\mathbf{m}| \frac{2 \cos \theta}{r^3}$$

- Le linee di campo sono come in figura
- Sottolineiamo che le formule danno il campo a grandi distanze
- A piccole distanze i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ sono molto differenti



Forza fra due fili percorsi da corrente

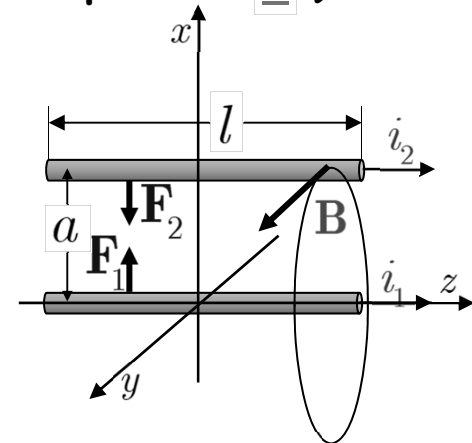
- Abbiamo iniziato la trattazione della magnetostatica citando la legge di Ampère sulla forza fra due fili percorsi da corrente (vedi diapositiva **7**)

$$F_{1,2} = \mu_0 \frac{i_1 i_2}{2\pi a} l$$

- Ricaviamo la legge di Ampère alla luce di quanto fin qui studiato
 - Il campo magnetico di un filo infinito

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

- Le linee del campo $\mathbf{B}$ sono circonferenze
- Nella posizione del filo 2 il campo magnetico vale
- La forza sul secondo filo è



$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_a) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1}{a} \hat{\mathbf{e}}_y$$

$$d\mathbf{F} = i_2 d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = i_2 dl \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{F} = i_2 l \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{B}$$

- Sostituendo il valore del campo magnetico $\mathbf{B}$

$$\mathbf{F} = i_2 l \hat{\mathbf{e}}_z \times \frac{\mu_0}{2\pi} \hat{\mathbf{e}}_y \frac{i_1}{a} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{a} l \hat{\mathbf{e}}_z \times \hat{\mathbf{e}}_y$$

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{a} l \hat{\mathbf{e}}_x$$

- Il modulo della forza è quello della legge di Ampère

Forza e momento della forza

- Abbiamo scritto l'espressione della forza su un circuito nella diapositiva **31**

$$\mathbf{F} = I \oint_C d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

- Se il campo magnetico è uniforme si può fattorizzare l'integrale

$$\mathbf{F} = \left(I \oint_C d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B}$$

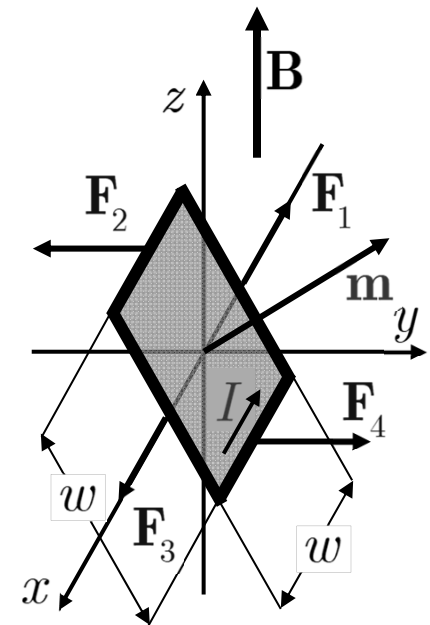
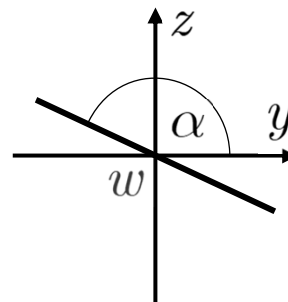
- Abbiamo già notato che l'integrale di $d\mathbf{l}$ su un circuito chiuso è nullo
- Concludiamo che in un campo magnetico uniforme la forza su una spira è nulla
- Tuttavia in generale il momento delle forze non è nullo
- Consideriamo la spira quadrata di lato w in figura
 - È percorsa da una corrente I ; il momento magnetico è $\mathbf{m}$
 - Può ruotare intorno ad un asse che giace sull'asse x
- Il campo magnetico $\mathbf{B}$ è lungo l'asse z
- Sui quattro lati agiscono le forze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_4$

$$\mathbf{F}_1 = Iw(\hat{\mathbf{e}}_y \cos \alpha + \hat{\mathbf{e}}_z \sin \alpha) \times B\hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\mathbf{F}_1 = IwB \cos \alpha \hat{\mathbf{e}}_x$$

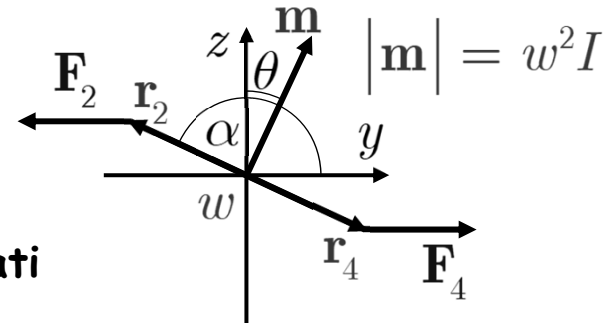
$$\mathbf{F}_2 = Iw\hat{\mathbf{e}}_x \times B\hat{\mathbf{e}}_z = -IwB\hat{\mathbf{e}}_y$$

$$\mathbf{F}_3 = -\mathbf{F}_1 \quad \mathbf{F}_4 = -\mathbf{F}_2$$



Forza e momento della forza

- Calcoliamo il momento delle forze rispetto all'asse di rotazione della spira (asse x)
- Le forze F_1 e F_3 sono lungo l'asse x
 - Il loro momento è nullo
- Le forze F_2 e F_4 sono applicate nei punti individuati dai vettori $\mathbf{r}_2$ e $\mathbf{r}_4$



$$\mathbf{r}_2 = \frac{w}{2} (\hat{\mathbf{e}}_y \cos \alpha + \hat{\mathbf{e}}_z \sin \alpha) \quad \mathbf{r}_4 = -\mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{F}_2 = -IwB\hat{\mathbf{e}}_y$$

$$\mathbf{F}_4 = -\mathbf{F}_2$$

- I momenti delle forze sono

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = -\frac{w}{2} (\hat{\mathbf{e}}_y \cos \alpha + \hat{\mathbf{e}}_z \sin \alpha) \times IwB\hat{\mathbf{e}}_y = \frac{w^2 I}{2} B \sin \alpha \hat{\mathbf{e}}_x$$

$$\boldsymbol{\tau}_4 = (-\mathbf{r}_2) \times (-\mathbf{F}_2) = \boldsymbol{\tau}_2 \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_4 = w^2 IB \sin \alpha \hat{\mathbf{e}}_x = |\mathbf{m}| B \sin \alpha \hat{\mathbf{e}}_x$$

- Il momento magnetico forma un angolo $\alpha - \pi/2$ con l'asse y

- L'angolo di $\mathbf{m}$ con l'asse z è $\theta = \pi/2 - (\alpha - \pi/2) = \pi - \alpha$

$$\boxed{\alpha = \pi - \theta}$$

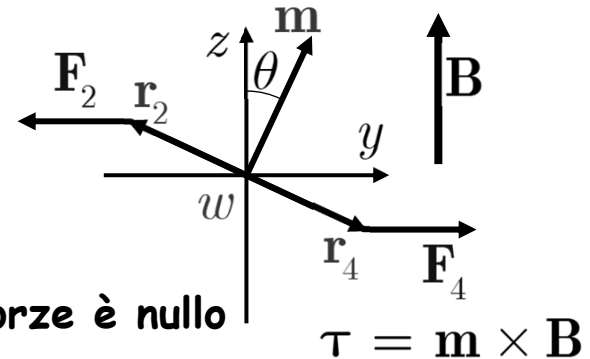
- Otteniamo pertanto

$$\sin \alpha = \sin \theta \quad \boldsymbol{\tau} = |\mathbf{m}| B \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_x$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$$

Forza e momento della forza

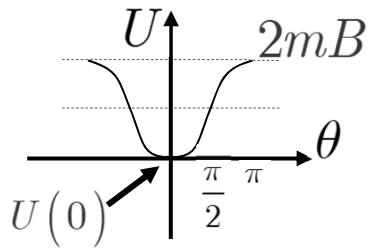
- Pertanto il momento delle forze è diretto lungo l'asse delle x (perpendicolare allo schermo)
- La spira ruota in senso antiorario
- Il momento magnetico si allinea con il campo magnetico B
 - Quando B e m sono paralleli il momento delle forze è nullo
- Supponiamo di avere una spira con momento magnetico m allineato con il campo magnetico B
 - Applichiamo una forza meccanica per ruotare lentamente la spira
 - Il lavoro fatto dalla forza esterna bilanciando esattamente il momento della forza magnetica è ($\tau_{\text{ext}} = -\tau$)



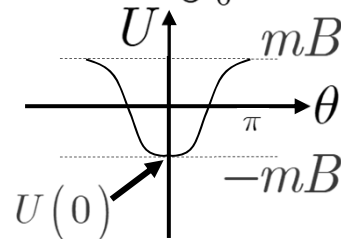
$$dW = \tau_{\text{ext}} \cdot d\theta = -\tau \cdot d\theta = -\tau d\theta$$

- Definiamo l'energia potenziale della spira nel campo magnetico $dU = -dW$

$$U(\theta) = \int_0^\theta dU = -\int_0^\theta dW = \int_0^\theta \tau d\alpha = mB \int_0^\theta \sin \alpha d\alpha = mB - mB \cos \theta$$



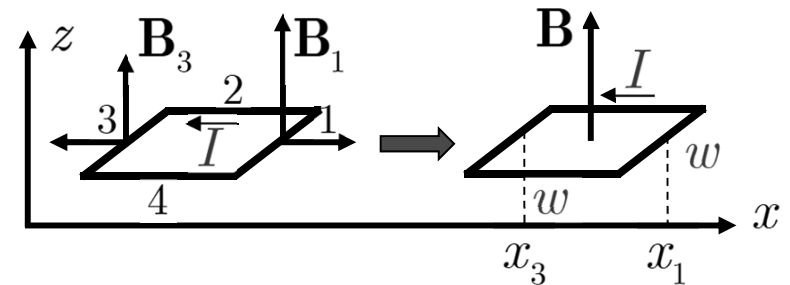
L'energia potenziale è definita a meno di una costante



$$U(\theta) = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

Campo non uniforme

- Supponiamo di costruire il sistema con la spira quadrata appena descritto
- Vogliamo trasportare una spira da una regione senza campo magnetico ad una regione con un campo B in modo che il momento magnetico sia allineato con B
 - Ovviamente occorre attraversare regioni in cui il campo B non è uniforme
- Supponiamo inoltre che la spira sia vincolata a muoversi solo nella direzione x
- Per effetto del campo magnetico vengono esercitate forze sui lati della spira
 - Ignoriamo le forze sui lati 2 e 4 dirette lungo l'asse y
- Le forze sui lati 1 e 3 sono rispettivamente $F_1 = IwB_1\hat{e}_x$ $F_3 = -IwB_3\hat{e}_x$
- Calcoliamo il lavoro fatto dalle forze esterne F_{e1} e F_{e3} che bilanciano esattamente le forze magnetiche



$$F_{e1} = -F_1 = -IwB_1\hat{e}_x \quad F_{e3} = -F_3 = IwB_3\hat{e}_x$$

- Il lavoro fatto per spostare i lati della spira dalla regione con campo nullo (x_i) a x_1 e x_3 è rispettivamente

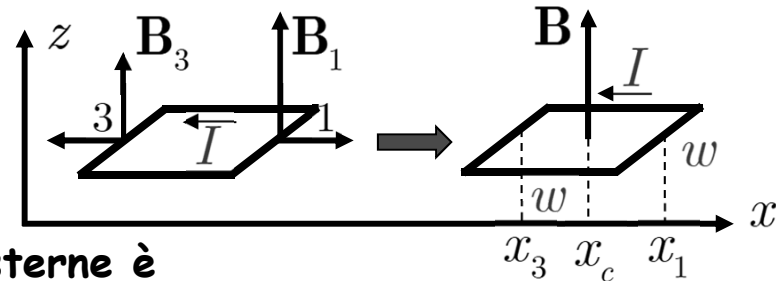
$$W_1 = \int_{x_i}^{x_1} \mathbf{F}_{e1} \cdot d\mathbf{r} = -Iw \int_{x_i}^{x_1} B_z(x) dx$$

$$W_3 = \int_{x_i}^{x_3} \mathbf{F}_{e3} \cdot d\mathbf{r} = +Iw \int_{x_i}^{x_3} B_z(x) dx$$

Campo non uniforme

$$W_1 = -Iw \int_{x_i}^{x_1} B_z(x) dx$$

$$W_2 = +Iw \int_{x_i}^{x_3} B_z(x) dx$$



- Pertanto il lavoro fatto dalle forze esterne è

$$W = W_1 + W_2 = -Iw \int_{x_i}^{x_1} B_z(x) dx + Iw \int_{x_i}^{x_3} B_z(x) dx = Iw \int_{x_1}^{x_3} B_z(x) dx$$

- Supponiamo adesso che le dimensioni della spira siano piccole
 - Supponiamo cioè che il campo B vari poco spostandosi di w

$$W \approx Iw B_z(x_c) \int_{x_1}^{x_3} dx = Iw B_{zxc}(x_1 - x_3) = -Iw^2 B_{zxc} = -|\mathbf{m}| B_{zxc}$$

- Naturalmente il lavoro meccanico fatto è uguale all'energia potenziale del sistema
 - Il valore trovato coincide con il risultato del calcolo precedente
- Possiamo anche calcolare la forza che agisce sulla spira ad ogni istante

$$\mathbf{F}_1 = Iw B_1 \hat{\mathbf{e}}_x \quad \mathbf{F}_3 = -Iw B_3 \hat{\mathbf{e}}_x \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3$$

$$\mathbf{F} = Iw [B_z(x_1) - B_z(x_3)] \hat{\mathbf{e}}_x$$

Campo non uniforme

$$\mathbf{F} = Iw [B_z(x_1) - B_z(x_3)] \hat{\mathbf{e}}_x$$

- Calcoliamo una forma approssimata per $B(x_k)$ rispetto a x_c

$$B_z(x_1) \approx B_z(x_c) + \left. \frac{\partial B_z}{\partial x} \right|_{x_c} \frac{w}{2} \quad B_z(x_3) \approx B_z(x_c) - \left. \frac{\partial B_z}{\partial x} \right|_{x_c} \frac{w}{2}$$

$$\mathbf{F} = Iw \left[B_z(x_c) + \frac{\partial B_z}{\partial x} \frac{w}{2} - \left(B_z(x_c) - \frac{\partial B_z}{\partial x} \frac{w}{2} \right) \right] \hat{\mathbf{e}}_x$$

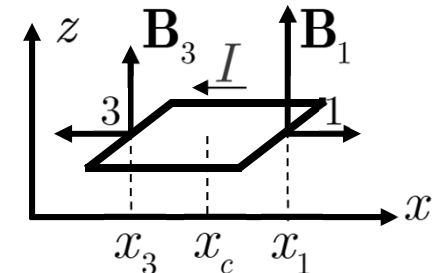
$$\mathbf{F} = Iw^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_x = |\mathbf{m}| \frac{\partial B_z}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_x = -\mathbf{F}_e$$

- Calcoliamo nuovamente il lavoro fatto dalla forza esterna $\mathbf{F}_e$ per passare dalla regione iniziale dove $B_z = 0$ alla posizione finale con campo B_z

$$W = \int_{x_i}^{x_f} \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{l} = - \int_{x_i}^{x_f} |\mathbf{m}| \frac{\partial B_z}{\partial x} dx = - \int_{x_i}^{x_f} |\mathbf{m}| dB_z = -|\mathbf{m}|(B_{zf} - B_{zi})$$

$$W = -|\mathbf{m}| B_z = U$$

- Ancora una volta abbiamo ritrovato il risultato della diapositiva [112](#)



Campo non uniforme

- L'espressione per l'energia potenziale che abbiamo trovato

$$U(\theta) = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$$

- È il lavoro fatto per costruire un sistema con un dipolo magnetico allineato al campo magnetico
 - Ci sono molte sottigliezze in questa energia
 - Per trattarle adeguatamente occorre prima comprendere il fenomeno dell'induzione elettromagnetica
- Dimostriamo adesso che nel caso generale di campo $\mathbf{B}$ e momento magnetico in direzioni arbitrarie la formula per la forza è

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$

- È interessante confrontare con la formula che avevamo trovato per la forza su un dipolo elettrico
 - Nella diapositiva 276 del primo semestre avevamo trovato

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

- Le due formule sono simili ma la differenza è sostanziale
- Sottolineeremo con degli esempi la differenza
- Vedremo che le due formule sono equivalenti solo in particolari situazioni

Dipolo in campo non uniforme

- Calcoliamo la forza esercitata su un circuito percorso da corrente in un campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ non uniforme
- Consideriamo una spira quadrata sul piano $z-y$, di lato Δ e percorsa da una corrente I
 - Il suo momento magnetico è lungo l'asse x

$$\mathbf{m} = m_0 \hat{\mathbf{e}}_x \quad m_0 = I \Delta^2$$

- Il campo di induzione magnetica al centro è $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$
- Calcoliamo la forza sulla spira

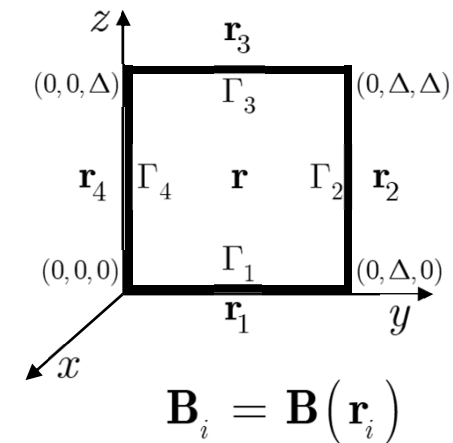
$$\mathbf{F} = \oint_C d\mathbf{F} = I \oint_C d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$\mathbf{F} = I \int_{\Gamma_1} d\mathbf{l} \times \mathbf{B} + I \int_{\Gamma_2} d\mathbf{l} \times \mathbf{B} + I \int_{\Gamma_3} d\mathbf{l} \times \mathbf{B} + I \int_{\Gamma_4} d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

- Gli integrandi dei 4 integrali sono

$$d\mathbf{F} = I \left\{ \hat{\mathbf{e}}_y dy \times \mathbf{B}_1 + \hat{\mathbf{e}}_z dz \times \mathbf{B}_2 - \hat{\mathbf{e}}_y dy \times \mathbf{B}_3 - \hat{\mathbf{e}}_z dz \times \mathbf{B}_4 \right\}$$

$$d\mathbf{F} = I \left\{ -\hat{\mathbf{e}}_y dy \times [\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1] + \hat{\mathbf{e}}_z dz \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_4) \right\}$$



$\mathbf{r} =$	(x, y, z)
$\mathbf{r}_1 =$	$(x, y, z - \Delta / 2)$
$\mathbf{r}_2 =$	$(x, y + \Delta / 2, z)$
$\mathbf{r}_3 =$	$(x, y, z + \Delta / 2)$
$\mathbf{r}_4 =$	$(x, y - \Delta / 2, z)$

Dipolo in campo non uniforme

$$d\mathbf{F} = I \left\{ -\hat{\mathbf{e}}_y dy \times [\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1] + \hat{\mathbf{e}}_z dz \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_4) \right\}$$

- Sviluppiamo i campi al primo ordine

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}(\mathbf{r}_1) \approx \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right|_{\mathbf{r}} \left(-\frac{\Delta}{2} \right)$$

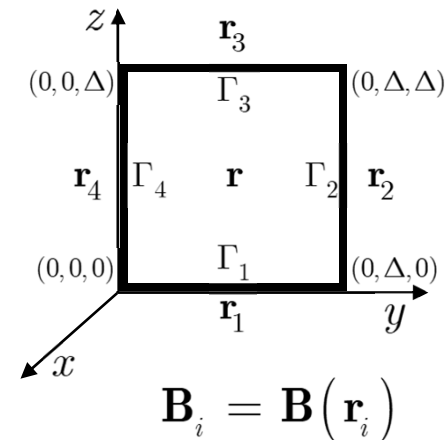
$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}(\mathbf{r}_2) \approx \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right|_{\mathbf{r}} \frac{\Delta}{2}$$

$$\mathbf{B}_3 = \mathbf{B}(\mathbf{r}_3) \approx \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right|_{\mathbf{r}} \frac{\Delta}{2}$$

$$\mathbf{B}_4 = \mathbf{B}(\mathbf{r}_4) \approx \mathbf{B}(\mathbf{r}) + \left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right|_{\mathbf{r}} \left(-\frac{\Delta}{2} \right)$$

- Inseriamo nella formula

$$d\mathbf{F} = I \left\{ -\hat{\mathbf{e}}_y dy \times \Delta \left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \right|_{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{e}}_z dz \times \Delta \left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right|_{\mathbf{r}} \right\}$$



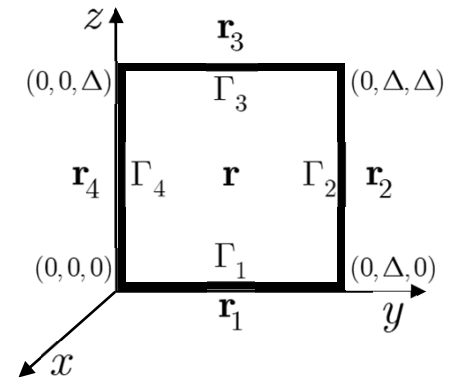
$\mathbf{r} =$	(x, y, z)
$\mathbf{r}_1 =$	$(x, y, z - \Delta / 2)$
$\mathbf{r}_2 =$	$(x, y + \Delta / 2, z)$
$\mathbf{r}_3 =$	$(x, y, z + \Delta / 2)$
$\mathbf{r}_4 =$	$(x, y - \Delta / 2, z)$

Dipolo in campo non uniforme

$$d\mathbf{F} = I \left\{ -\hat{\mathbf{e}}_y dy \times \Delta \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \Big|_{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{e}}_z dz \times \Delta \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \Big|_{\mathbf{r}} \right\}$$

- Calcoliamo l'integrale

$$\mathbf{F} = \oint_C d\mathbf{F} = I \int_0^\Delta \left\{ -\hat{\mathbf{e}}_y dy \times \Delta \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \Big|_{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{e}}_z dz \times \Delta \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \Big|_{\mathbf{r}} \right\}$$



- Consideriamo le derivate costanti lungo l'integrale (Δ è piccolo)

$$\int_0^\Delta \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \Big|_{\mathbf{r}} dy \simeq \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \Big|_{\mathbf{r}} \Delta \quad \int_0^\Delta \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \Big|_{\mathbf{r}} dz \simeq \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \Big|_{\mathbf{r}} \Delta$$

- Da ora in poi le derivate sono calcolate nel punto $\mathbf{r}$
- Otteniamo

$$\mathbf{F} = I \Delta^2 \left\{ -\hat{\mathbf{e}}_y \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} + \hat{\mathbf{e}}_z \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right\} = m_0 \left\{ -\hat{\mathbf{e}}_y \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} + \hat{\mathbf{e}}_z \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right\}$$

Dipolo in campo non uniforme

$$\mathbf{F} = m_0 \left\{ -\hat{\mathbf{e}}_y \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} + \hat{\mathbf{e}}_z \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right\}$$

- Calcoliamo i prodotti vettoriali

$$\hat{\mathbf{e}}_y \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} & \frac{\partial B_y}{\partial z} & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{vmatrix} = \left[\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial B_z}{\partial z} - \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right] \quad \bigg| \quad \hat{\mathbf{e}}_z \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial B_x}{\partial y} & \frac{\partial B_y}{\partial y} & \frac{\partial B_z}{\partial y} \end{vmatrix} = \left[\hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial B_x}{\partial y} - \hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial B_y}{\partial y} \right]$$

- Otteniamo infine

$$\mathbf{F} = m_0 \left\{ -\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial B_z}{\partial z} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial B_x}{\partial z} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial B_x}{\partial y} - \hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial B_y}{\partial y} \right\} = m_0 \left\{ \hat{\mathbf{e}}_x \left[-\frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial z} \right] + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right\}$$

- Ricordiamo che

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \longrightarrow \quad -\frac{\partial B_y}{\partial y} - \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial x}$$

$$\mathbf{F} = m_0 \left\{ \hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right\}$$

Dipolo in campo non uniforme

$$\mathbf{F} = m_0 \left\{ \hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right\}$$

- Ricordiamo che questa formula è stata ricavata per
 - Un dipolo magnetico orientato lungo l'asse x
 - Un campo magnetico non uniforme e in direzione arbitraria
- Osserviamo che
 - Dentro la parentesi graffa abbiamo l'operatore ∇ applicato a B_x

$$\nabla B_x = \left\{ \hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z} \right\} B_x$$

- Il dipolo orientato lungo x ha "selezionato" la componente B_x
 - Se avessimo scelto un dipolo lungo y o lungo z la componente del campo $\mathbf{B}$ interessata sarebbe stata B_y o B_z rispettivamente
 - L'argomento dell'operatore ∇ deve pertanto essere $\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$
- Possiamo pertanto scrivere la formula nella sua forma finale

$$\mathbf{F} = \nabla (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$$