
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 23 - 9.03.2023

Filo di raggio finito - Spira $\cos\phi$

Potenziale vettore

Potenziale vettore di un campo costante,
di un filo infinito, di una spira

Anno Accademico 2022/2023

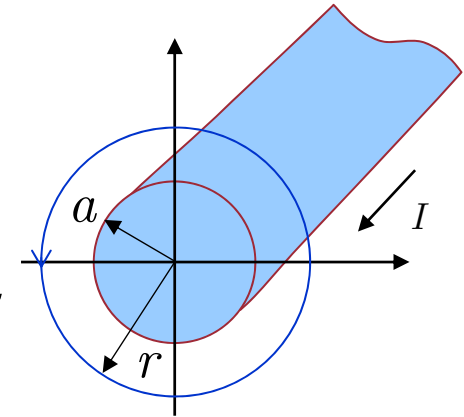
Filo di raggio a percorso da corrente

- Consideriamo un filo percorso da una corrente I

- Non trascuriamo il raggio del filo

- Supponiamo che la corrente sia dovuta ad una densità di corrente uniforme sulla sezione del filo

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = JS = J\pi a^2 \quad J(r) = \begin{cases} J_0 = \frac{I}{\pi a^2} & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases}$$



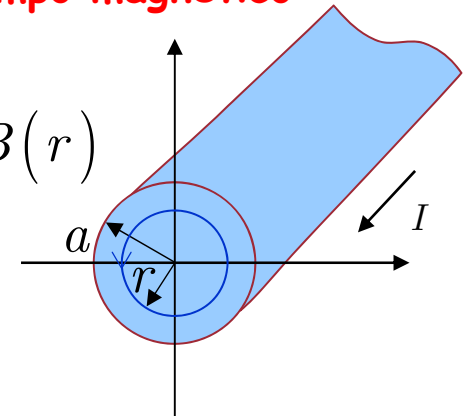
- Data la simmetria del problema le

linee di campo sono delle circonferenze concentriche al filo $\mathbf{B}(r) = B(r)\hat{e}_\phi$

- Possiamo utilizzare la legge di Ampère per calcolare il campo magnetico

- All'esterno del filo $r > a$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 I \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B(r)$$



- Uguagliando

$$2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- All'interno del filo $r < a$

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = J_0 \pi r^2 \quad B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{J_0 \pi r^2}{r} = \frac{\mu_0}{2} J_0 r$$

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{r}{a^2}$$

Filo di raggio a percorso da corrente

- Riepilogando

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \quad r > a \quad B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{r}{a^2} \quad r < a$$

- Scriviamo adesso il campo in forma vettoriale

- In coordinate cartesiane e in coordinate cilindriche

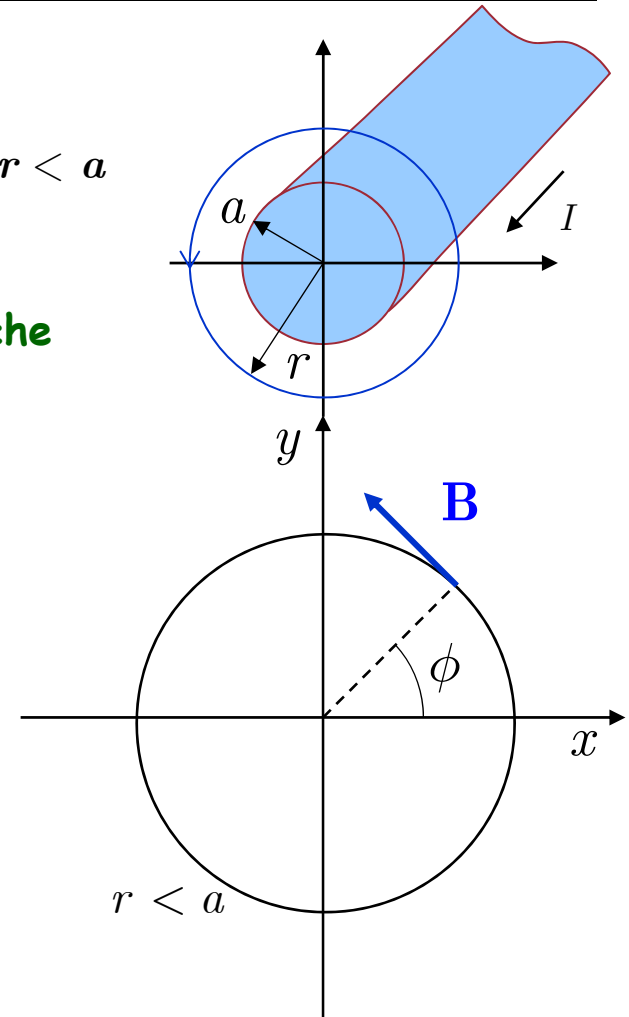
$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad r > a$$

- Abbiamo già verificato che $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ (diap. 64)

- All'interno del filo

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Ir}{a^2} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Ir}{a^2} \hat{\mathbf{e}}_\phi = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I(-y\hat{\mathbf{e}}_x + x\hat{\mathbf{e}}_y)}{a^2}$$

- Calcoliamo il rotore in coordinate cartesiane



Filo di raggio a percorso da corrente

- Calcoliamo il rotore in coordinate cartesiane
 - Sarebbe più semplice in coordinate cilindriche

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I(-y\hat{\mathbf{e}}_x + x\hat{\mathbf{e}}_y)}{a^2} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{e}}_x + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{e}}_y + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{e}}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} (1 + 1)\hat{\mathbf{e}}_z = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \hat{\mathbf{e}}_z = \mu_0 \mathbf{J}$$

- Riepilogando

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad r > a \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \hat{\mathbf{e}}_z = \mu_0 \mathbf{J} \quad r < a$$

- Come abbiamo visto questa è la condizione fisica reale
 - Se vogliamo il caso limite di un filo di raggio nullo $a \rightarrow 0$

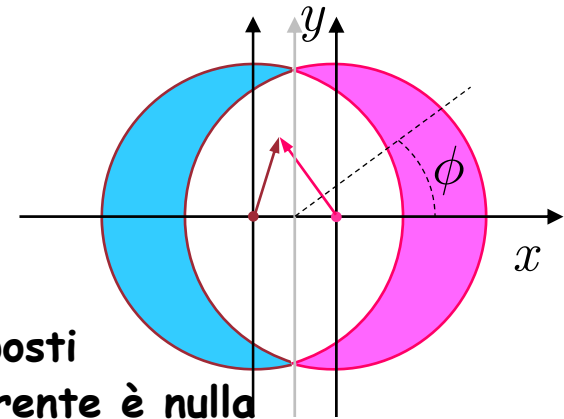
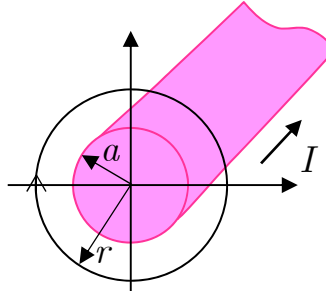
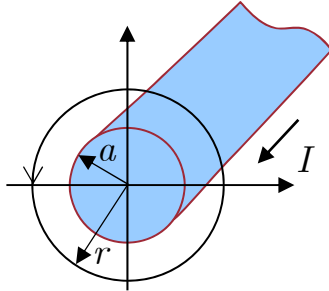
$$J_0 = \frac{I}{\pi a^2} \rightarrow \infty \quad S = \pi a^2 \rightarrow 0 \quad J_0 S \rightarrow I$$

- Come abbiamo visto nella diapositiva 64 si può esprimere matematicamente questo limite utilizzando la funzione δ

$$\nabla \times \mathbf{B} \rightarrow \mu_0 I \delta(x) \delta(y) \hat{\mathbf{e}}_z$$

La spira "cos ϕ "

- Consideriamo adesso il campo generato da due fili percorsi da corrente
 - La corrente nei due fili circola in senso opposto



- Consideriamo adesso i due fili parzialmente sovrapposti
 - Nella regione di sovrapposizione la densità di corrente è nulla
 - La parte bianca del disegno è una regione vuota, senza materiale
 - Le densità di corrente che non si annullano sono come in figura
 - Trasportano una densità di corrente uniforme ma con versi opposti
 - Hanno una forma tale che lo spessore della regione $J \neq 0$ varia come $\cos\phi$
- Consideriamo un punto nella regione in cui $J = 0$
 - Dimostriamo che in questa regione il campo B ha solo la componente y
 - Inoltre il campo ha modulo costante
 - Ricordiamo che i campi dei due fili sono

$$B_x = \mp \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Ir}{a^2} \sin \phi \quad B_y = \pm \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Ir}{a^2} \cos \phi$$

La spira "cos ϕ "

$$B_x = \mp \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Ir}{a^2} \sin \phi \quad B_y = \pm \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Ir}{a^2} \cos \phi$$

- Consideriamo in dettaglio la regione interna

$$B_x = B_{1x} + B_{2x}$$

$$B_{1x} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a^2} r_1 \sin \phi_1$$

$$B_{2x} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a^2} r_2 \sin \phi_2$$

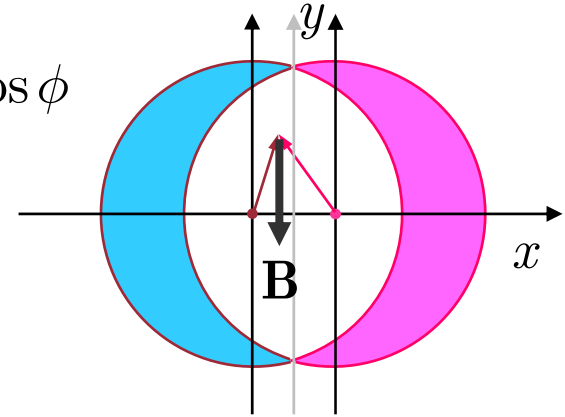
$$B_x = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a^2} (r_1 \sin \phi_1 - r_2 \sin \phi_2)$$

$$r_1 \sin \phi_1 = r_2 \sin \phi_2$$

$$B_x = 0$$

$$B_y = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a^2} d$$

- Campo uniforme diretto verso il basso



$$B_y = B_{1y} + B_{2y}$$

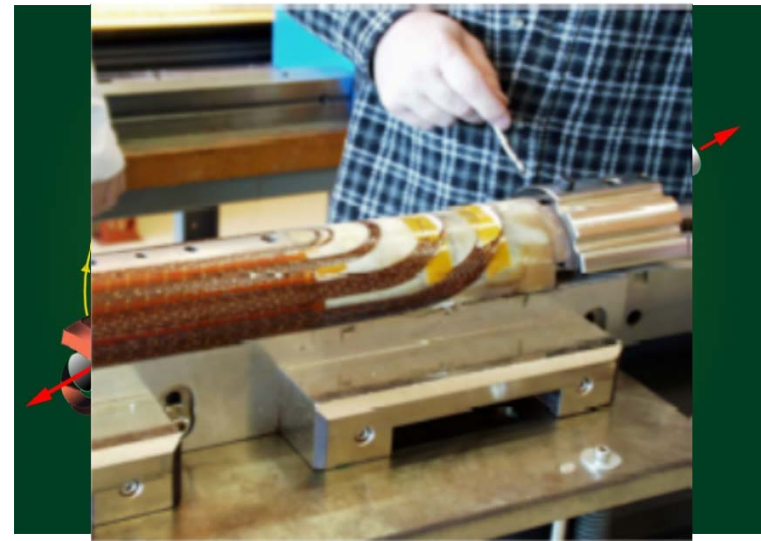
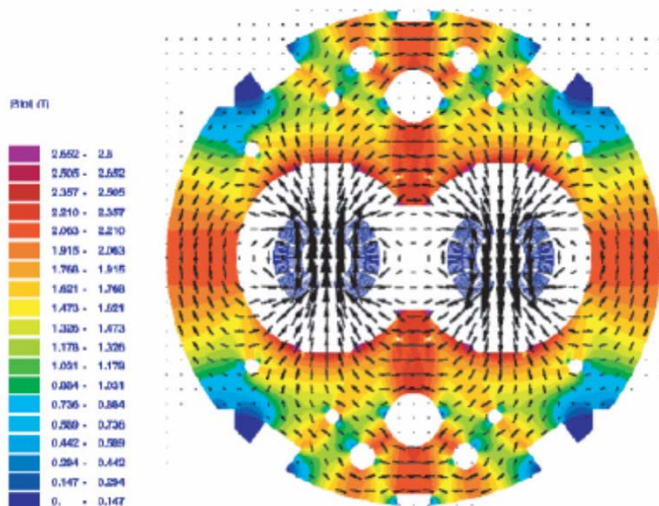
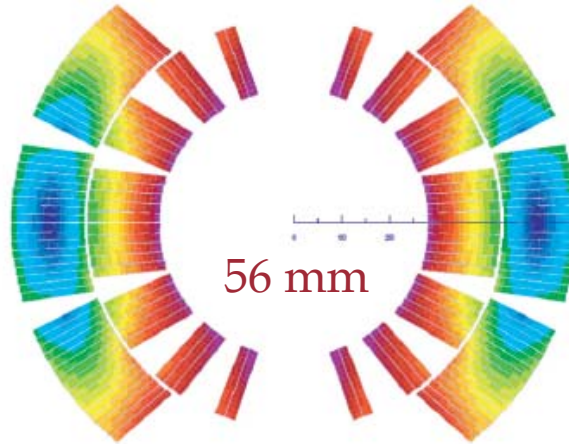
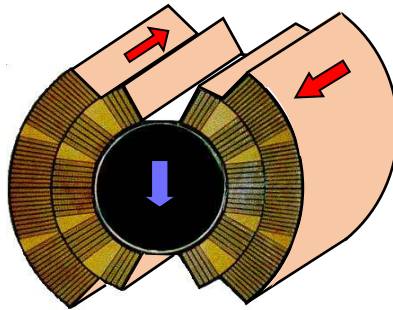
$$B_{1y} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a^2} r_1 \cos \phi_1$$

$$B_{2y} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a^2} r_2 \cos \phi_2$$

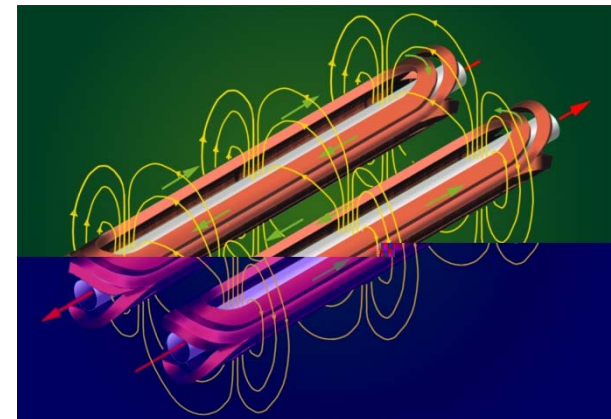
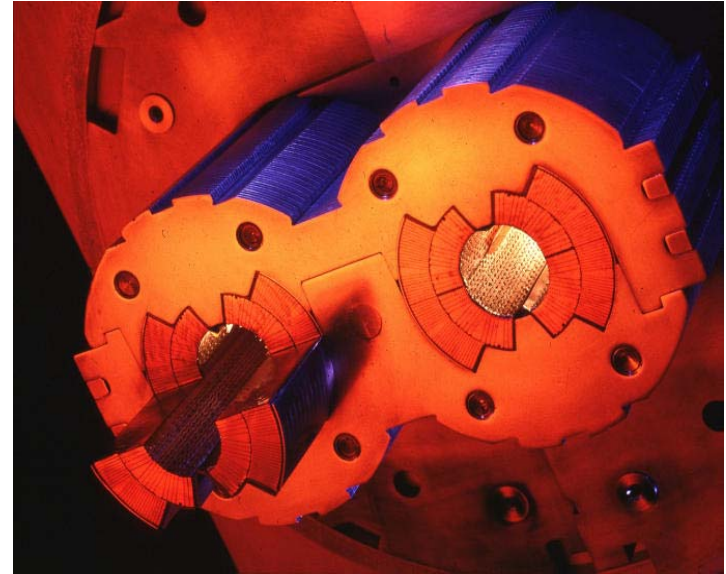
$$B_y = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a^2} (r_2 \cos \phi_2 - r_1 \cos \phi_1)$$

$$r_1 \cos \phi_1 - r_2 \cos \phi_2 = d$$

I dipoli di LHC



I dipoli di LHC



I dipoli di LHC

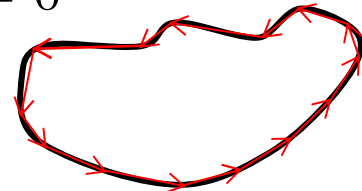


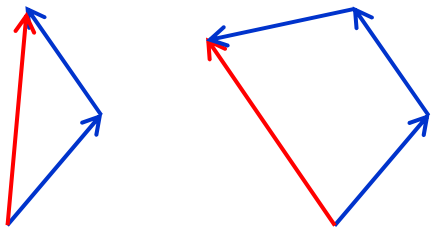
Question time ...

- Abbiamo che detto che se il campo magnetico è uniforme la forza su un filo che forma un circuito chiuso è nulla (vedi diapositiva [31](#))

$\mathbf{B} \uparrow$  $C \quad \mathbf{F} = I \oint_C d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \left(I \oint_C d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B} = 0$

- Perché la circuitazione di $d\mathbf{l}$ è nulla? $\oint_C d\mathbf{l} = 0$
- Intuitivamente l'integrale è il vettore somma di tutti i $d\mathbf{l}$ in cui si può scomporre il circuito
- La somma di n vettori ...

 $\oint_C d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^N d\mathbf{l}_i$



Se la successione dei vettori si chiude la risultante è nulla

- Analiticamente
- Il circuito è descritto da una curva chiusa parametrica

$$\mathbf{r}(u) \quad u_{\min} \leq u \leq u_{\max} \quad \mathbf{r}(u_{\min}) = \mathbf{r}(u_{\max})$$

$$\mathbf{r}(u) = x(u)\hat{\mathbf{e}}_x + y(u)\hat{\mathbf{e}}_y + z(u)\hat{\mathbf{e}}_z \quad x(u_{\min}) = x(u_{\max}) \dots$$

Domande ...

- **Calcoliamo il differenziale di** $\mathbf{r}(u) = x(u)\hat{\mathbf{e}}_x + y(u)\hat{\mathbf{e}}_y + z(u)\hat{\mathbf{e}}_z$

$$d\mathbf{r} \equiv d\mathbf{l} = dx(u)\hat{\mathbf{e}}_x + dy(u)\hat{\mathbf{e}}_y + dz(u)\hat{\mathbf{e}}_z$$

$$d\mathbf{l} = \frac{dx}{du} du \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{dy}{du} du \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{dz}{du} du \hat{\mathbf{e}}_z$$

- **Calcoliamo la circuitazione**

$$\oint_C d\mathbf{l} = \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{dx}{du} du \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{dy}{du} du \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{dz}{du} du \hat{\mathbf{e}}_z$$

- **Consideriamo la componente x (per le altre le considerazioni sono analoghe)**

$$\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{dx}{du} du = \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} dx = x \Big|_{u_{\min}}^{u_{\max}} = x(u_{\max}) - x(u_{\min}) = 0$$

- **Un esempio concreto: una circonferenza di raggio a sul piano $x - y$ centrata nell'origine**

$$\mathbf{r}(u) = a \cos u \hat{\mathbf{e}}_x + a \sin u \hat{\mathbf{e}}_y \quad 0 \leq u \leq 2\pi$$

Operatore ∇ applicato due volte

- Le relazioni viste nella diapositiva 55 contengono solo derivate prime
 - Applicando due volte l'operatore ∇ si ottengono espressioni con derivate seconde
- Una "derivata prima" costruita con ∇ può essere
 - Uno scalare costruito con la divergenza $\nabla \cdot \mathbf{A}$
 - Si può calcolare il gradiente $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$ 
 - Un vettore costruito con un gradiente $\nabla \phi$
 - Si può calcolare la divergenza $\nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi$
 - Si può calcolare il rotore $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$
 - Un vettore costruito con un rotore $\nabla \times \mathbf{A}$
 - Si può calcolare la divergenza $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
 - Si può calcolare il rotore $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$
- L'elenco esaurisce tutte le possibilità
 - Alcune espressioni le abbiamo già incontrate
 - Nello studio dell'elettrostatica
 - Il gradiente della divergenza è poco utile in fisica
 - Le ultime due si possono facilmente calcolare in coordinate cartesiane utilizzando la definizione esplicita di ∇
- Con $\nabla^2 \mathbf{A}$ si intende l'applicazione di ∇^2 a ogni componente di $\mathbf{A}$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \nabla^2 A_x \\ \nabla^2 A_y \\ \nabla^2 A_z \end{pmatrix}$$

Operatore ∇ applicato due volte

• Verifichiamo la relazione $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

• Ricordiamo le componenti di $\nabla \times \mathbf{A}$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

• Calcoliamo la divergenza

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y} \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

Campo magnetico di una spira¹

- Calcoliamo il campo di induzione magnetica B di una spira in un punto fuori dall'asse

- La simmetria azimutale del problema consente di scegliere il punto r sul piano $x-z$

$$\mathbf{r} = r \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_x + r \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_z$$

- Consideriamo un tratto $d\mathbf{l}$ sul filo

- È individuato dal vettore $\mathbf{r}' = \hat{\mathbf{e}}_x a \cos \phi' + \hat{\mathbf{e}}_y a \sin \phi'$

- Calcoliamo $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}'$

$$d\mathbf{l} \equiv d\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}'}{d\phi'} d\phi' = (-\hat{\mathbf{e}}_x \sin \phi' + \hat{\mathbf{e}}_y \cos \phi') a d\phi'$$

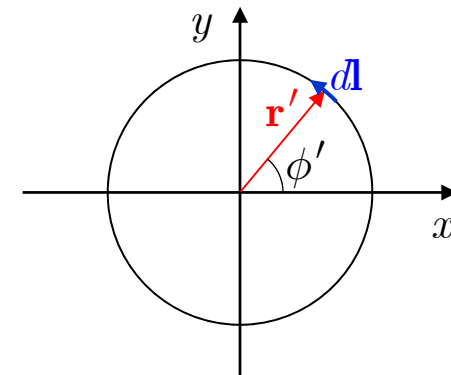
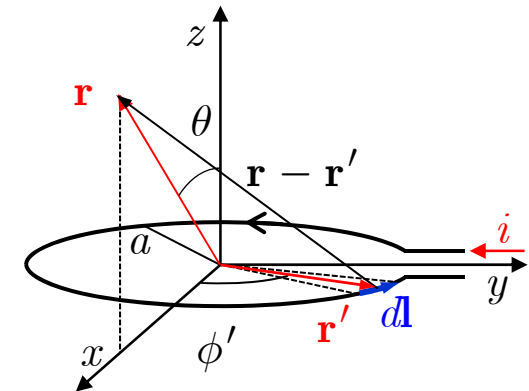
- Il contributo a B è $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = r \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_x + r \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_z - \hat{\mathbf{e}}_x a \cos \phi' - \hat{\mathbf{e}}_y a \sin \phi'$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \left[(r \sin \theta - a \cos \phi')^2 + a^2 \sin^2 \phi' + r^2 \cos^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \left[a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi' \right]^{\frac{1}{2}}$$

- ¹S. Datta – Electric and magnetic field from a circular coil using Elliptical integrals
– Physics Education September - October 2007 p. 203



Campo magnetico di una spira

$$d\mathbf{l} = (-\hat{\mathbf{e}}_x \sin \phi' + \hat{\mathbf{e}}_y \cos \phi') a d\phi'$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = r \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_x + r \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_z - \hat{\mathbf{e}}_x a \cos \phi' - \hat{\mathbf{e}}_y a \sin \phi'$$

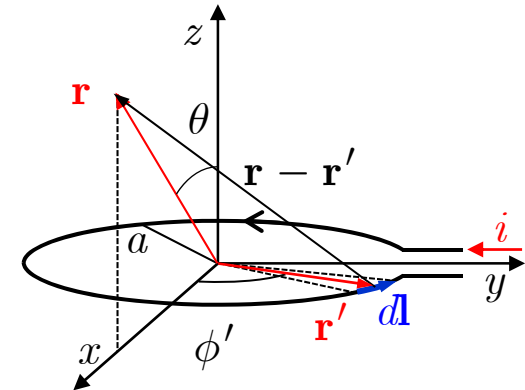
- Calcoliamo il prodotto vettoriale

$$d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = (-\hat{\mathbf{e}}_x \sin \phi' + \hat{\mathbf{e}}_y \cos \phi') \times$$

$$\times [(r \sin \theta - a \cos \phi') \hat{\mathbf{e}}_x - \hat{\mathbf{e}}_y a \sin \phi' + r \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_z] a d\phi'$$

$$= [r \cos \theta \cos \phi' \hat{\mathbf{e}}_x + r \cos \theta \sin \phi' \hat{\mathbf{e}}_y + (a \sin^2 \phi' + a \cos^2 \phi' - r \sin \theta \cos \phi') \hat{\mathbf{e}}_z] a d\phi'$$

$$= [r \cos \theta \cos \phi' \hat{\mathbf{e}}_x + r \cos \theta \sin \phi' \hat{\mathbf{e}}_y + (a - r \sin \theta \cos \phi') \hat{\mathbf{e}}_z] a d\phi'$$



- Il campo $\mathbf{B}$ è pertanto

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_0^{2\pi} \frac{r \cos \theta \cos \phi' \hat{\mathbf{e}}_x + r \cos \theta \sin \phi' \hat{\mathbf{e}}_y + (a - r \sin \theta \cos \phi') \hat{\mathbf{e}}_z}{[a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi']^{\frac{3}{2}}} a d\phi'$$

- Notiamo innanzitutto che il termine proporzionale a $\hat{\mathbf{e}}_y$ è nullo
- Basta fare la sostituzione $\phi' \rightarrow x + \pi$ e si ottiene una funzione dispari in x integrata da $-\pi$ a $+\pi$

- Pertanto

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_0^{2\pi} \frac{r \cos \theta \cos \phi' \hat{\mathbf{e}}_x + (a - r \sin \theta \cos \phi') \hat{\mathbf{e}}_z}{[a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi']^{\frac{3}{2}}} a d\phi'$$



Campo magnetico di una spira

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_0^{2\pi} \frac{r \cos \theta \cos \phi' \hat{\mathbf{e}}_x + (a - r \sin \theta \cos \phi') \hat{\mathbf{e}}_z}{[a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi']^{\frac{3}{2}}} a d\phi'$$

- Notiamo inoltre che

$$\cos \theta \hat{\mathbf{e}}_x - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\hat{\mathbf{e}}_z = \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

- Posto

$$I_{\frac{3}{2}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{[a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi']^{\frac{3}{2}}}$$

$$X_{\frac{3}{2}} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi' d\phi'}{[a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi']^{\frac{3}{2}}}$$

- Otteniamo

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} ira \hat{\mathbf{e}}_\theta X_{\frac{3}{2}} + \frac{\mu_0}{4\pi} ia^2 (\cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta) I_{\frac{3}{2}}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} ia^2 I_{\frac{3}{2}} \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{\mu_0}{4\pi} ia (r X_{\frac{3}{2}} - a \sin \theta I_{\frac{3}{2}}) \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

- Le due espressioni $I_{3/2}$ e $X_{3/2}$ sono riconducibili a integrali ellittici
- Vedi anche elettromagnetismo 1 diapositiva 230



Campo magnetico di una spira

$$X_{\frac{3}{2}} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi' d\phi'}{\left[a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi' \right]^{\frac{3}{2}}} \quad I_{\frac{3}{2}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\left[a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi' \right]^{\frac{3}{2}}}$$

- Trasformiamo gli integrali in una forma opportuna rispetto alle definizioni standard degli integrali ellittici

- Prima di tutto operiamo un cambio di variabile: $\phi = \pi + 2t$

- I limiti di integrazione diventano

- $\phi = 0 \rightarrow t = -\pi/2$ $\phi = 2\pi \rightarrow t = +\pi/2$. Inoltre $d\phi = 2dt$

- La funzione trigonometrica: $\cos(\pi+2t) = -\cos 2t = -1 + 2\sin^2 t$

- Chiamiamo A il radicando

$$A = r^2 + a^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi = r^2 + a^2 + 2ar \sin \theta - 4ar \sin \theta \sin^2 t$$

- Definiamo

$$\xi^2 = r^2 + a^2 + 2ar \sin \theta \quad k^2 = \frac{4ar \sin \theta}{r^2 + a^2 + 2ar \sin \theta}$$

- Osserviamo che per $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq r < \infty$ abbiamo $0 \leq k \leq 1$

- Per l'integrale $I_{3/2}$ otteniamo

$$I_{\frac{3}{2}} = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\left[a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi' \right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\xi^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{2dt}{(1 - k^2 \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{\xi^3} \int_0^{+\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(1 - k^2 \sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$



Campo magnetico di una spira

- Ricordiamo le definizioni degli integrali ellittici di primo e secondo tipo

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{[1 - k^2 \sin^2 \phi]^{\frac{1}{2}}} \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - k^2 \sin^2 \phi]^{\frac{1}{2}} d\phi$$

- Da Gradshteyn Ryzhik 2007 3.617 otteniamo¹

$$F_1(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{[1 - k^2 \sin^2 \phi]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1 - k^2} E(k)$$

- Per l'integrale $X_{3/2}$ osserviamo innanzitutto²

$$X_{\frac{3}{2}} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \phi' d\phi'}{[a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi']^{\frac{3}{2}}}$$

$$\cos \phi' = \frac{r^2 + a^2 - (r^2 + a^2 - 2ra \sin \theta \cos \phi')}{2ra \sin \theta}$$

- Sostituendo

$$2ra \sin \theta X_{\frac{3}{2}} = \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 + a^2) d\phi'}{[a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi']^{\frac{3}{2}}} - \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi') d\phi'}{[a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi']^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{4(r^2 + a^2)}{\xi^3} \frac{E(k)}{1 - k^2} - \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{[a^2 + r^2 - 2ar \sin \theta \cos \phi']^{\frac{1}{2}}} = \frac{4(r^2 + a^2)}{\xi^3} \frac{E(k)}{1 - k^2} - \frac{4}{\xi} K(k)$$

- ¹I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik – Tables of Integrals, Series, and Products – Academic Press 2007
- ²S. Datta – Electric and magnetic field from a circular coil using Elliptical integrals – Physics Education September - October 2007 p. 203



Campo magnetico di una spira

- In definitiva otteniamo

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i a^2 I_{\frac{3}{2}} \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{\mu_0}{4\pi} i a (r X_{\frac{3}{2}} - a \sin \theta I_{\frac{3}{2}}) \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

- Con

$$I_{\frac{3}{2}} = \frac{4}{\xi^3} \frac{E(k)}{1 - k^2} \quad X_{\frac{3}{2}} = \frac{4(r^2 + a^2)}{2ra \sin \theta \xi^3} \frac{E(k)}{1 - k^2} - \frac{4}{2ra \sin \theta \xi} K(k)$$

$$\xi^2 = r^2 + a^2 + 2ar \sin \theta$$

$$k^2 = \frac{4ar \sin \theta}{r^2 + a^2 + 2ar \sin \theta}$$

- Sostituendo

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i a^2 \frac{4}{\xi^3} \frac{E(k)}{1 - k^2} \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{\mu_0}{4\pi} i \left[\left(\frac{4(r^2 + a^2)}{2 \sin \theta \xi^3} \frac{E(k)}{1 - k^2} - \frac{4}{2 \sin \theta \xi} K(k) \right) - a^2 \sin \theta \frac{4}{\xi^3} \frac{E(k)}{1 - k^2} \right] \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

- In definitiva le componenti di $\mathbf{B}$ sono

$$B_r(r, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} i a^2 \frac{4}{\xi^3} \frac{E(k)}{1 - k^2} \cos \theta$$

$$B_\theta(r, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \left[\left(\frac{4(r^2 + a^2)}{2 \sin \theta \xi^3} \frac{E(k)}{1 - k^2} - \frac{4}{2 \sin \theta \xi} K(k) \right) - a^2 \sin \theta \frac{4}{\xi^3} \frac{E(k)}{1 - k^2} \right]$$



Il potenziale vettore

- In elettrostatica l'osservazione che la circuitazione di $\mathbf{E}$ era nulla ha permesso di introdurre il potenziale elettrostatico

- Ricordiamo la proprietà $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$

- Assumiamo che il campo elettrico $\mathbf{E}$ abbia la forma

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi$$

- Sottolineiamo che ϕ è determinato a meno di una costante
- L'equazione di campo è automaticamente soddisfatta

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

- In magnetostatica si può procedere in modo analogo
- Abbiamo visto che il campo magnetico $\mathbf{B}$ soddisfa l'equazione $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
- Questa equazione è soddisfatta automaticamente ponendo

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

- Abbiamo appena visto che la divergenza di un rotore è sempre nulla
- Il campo $\mathbf{A}$ prende il nome di Potenziale Vettore
- Il campo $\mathbf{A}$ non è univocamente definito (è definito a meno di un gradiente)
- Tutti i campi $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f(\mathbf{r})$ producono lo stesso campo $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \cancel{\nabla f} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \boxed{\mathbf{B}' = \mathbf{B}}$$

Il potenziale vettore

- **Continuiamo il parallelo fra elettrostatica e magnetostatica**
 - **In elettrostatica, dopo avere posto $\mathbf{E} = -\nabla \phi$, la legge di Gauss portava all'equazione per il potenziale ϕ**

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot (\nabla \phi) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \boxed{\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

- **La legge di Gauss definisce il legame fra il campo $\mathbf{E}$ e la sua sorgente (la carica elettrica)**
- **Ripetiamo gli stessi passi nella magnetostatica**
 - **Esprimiamo $\mathbf{B}$ tramite il potenziale vettore**

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

- **Utilizziamo la legge di Ampère in forma differenziale**

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

- **Sostituendo $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$**
- $$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J}$$

- **Nella diapositiva 82 abbiamo visto che**

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad \longrightarrow \quad \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Il potenziale vettore

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

- Abbiamo già notato che il potenziale vettore $\mathbf{A}$ non è univocamente definito
 - Si può sommare un campo che è il gradiente di un campo scalare, $\nabla f(\mathbf{r})$, e ottenere lo stesso campo $\mathbf{B}$
 - Si può dimostrare che è sempre possibile trovare una funzione $f(\mathbf{r})$ tale che

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla f) = 0$$

- Possiamo pertanto utilizzare la non univocità del potenziale vettore per imporre che $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ed eliminare il primo termine dell'equazione
 - Pertanto l'equazione per $\mathbf{A}$ diventa

$$-\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}$$

- Ribadiamo il significato di questa notazione (in coordinate cartesiane)
 - L'operatore laplaciano viene applicato indipendentemente a ciascuna delle tre componenti di $\mathbf{A}$

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x \quad \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \quad \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$$

- Matematicamente abbiamo tre equazioni di Poisson
 - Conosciamo le soluzioni

$$A_k(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_k(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Il potenziale vettore

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

- L'integrale è esteso a tutto lo spazio

- La condizione per la sua convergenza è che la densità di corrente $\mathbf{J}$ tenda a zero all'infinito

$$r^2 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \rightarrow 0 \quad r \rightarrow \infty$$

- La densità di corrente deve tendere a zero più velocemente di $1/r^2$

- Nel calcolo di $\mathbf{B}$ il potenziale vettore risulta meno utile del potenziale elettrico

- È una grandezza vettoriale (tre componenti; il potenziale elettrico solo una)

- Comunque in casi particolari si può definire un potenziale magnetico scalare che ha qualche utilità per problemi con materiali magnetici

- Tuttavia il potenziale vettore è di fondamentale importanza

- Come strumento teorico nello sviluppo dell'elettrodinamica

- Nella trattazione dei problemi con forze elettromagnetiche in meccanica quantistica

- Per un circuito con un filo ... $\mathbf{J} \parallel d\mathbf{r}' \quad d\mathbf{a}' \parallel d\mathbf{r}' \quad dV' = da' dl'$

$$\int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{a}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{l}' \rightarrow I \oint_C \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Teorema di Helmholtz

- A questo punto vale la pena ribadire alcuni aspetti matematici
 - Abbiamo trovato delle equazioni differenziali per i campi E e B
 - In entrambi i casi le equazioni definiscono il rotore e la divergenza del campo
 - È legittimo chiedersi se matematicamente il problema sia ben posto
- Il teorema di Helmholtz assicura che quanto asseriamo è matematicamente consistente

Teorema di Helmholtz

Sia dato un campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ di cui sono noti rotore e divergenza

a) $\nabla \cdot \mathbf{F} = \rho(\mathbf{r})$

b) $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{J}(\mathbf{r})$

c) Le funzioni $\rho(\mathbf{r})$ e $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ si annullano all'infinito più velocemente di $1/r^2$

Sotto queste condizioni il campo $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ è univocamente determinato e ha la forma

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \nabla \times \mathbf{A} \equiv \mathbf{F}_{\text{irr}} + \mathbf{F}_{\text{sol}} \quad \begin{array}{l} \text{Componente solenoidale} \\ \nabla \cdot \mathbf{F}_{\text{sol}} = 0 \end{array}$$

dove

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$\begin{array}{l} \text{Componente irrotazionale} \\ \nabla \times \mathbf{F}_{\text{irr}} = 0 \end{array}$$



Il potenziale vettore

- Abbiamo già detto che il potenziale vettore è di scarsa utilità per i problemi elementari che trattiamo in questo corso
 - Vogliamo tuttavia familiarizzare un po' con questa nuova grandezza
 - Purtroppo il calcolo del potenziale vettore del filo infinito con la formula introdotta nella diapositiva 92 non è possibile
 - La corrente non va a zero all'infinito
 - Il calcolo del potenziale vettore per una spira circolare è complesso come lo è stato il calcolo di B con gli integrali ellittici
 - È semplice solo sull'asse della spira
 - Non è sufficiente per calcolarne il rotore e quindi il campo B
- Tuttavia cerchiamo di capire la forma del potenziale vettore in alcuni semplici casi senza l'uso della formula integrale citata
 - Faremo il percorso inverso: noto il campo B troveremo il potenziale A !
 - Il caso più semplice è quello del potenziale vettore di un campo magnetico B costante
 - Assumiamo B lungo l'asse z : $B_z = B_0$, $B_x = B_y = 0$ $B = B_0 \hat{e}_z$
 - Avremo pertanto

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0$$

Potenziale vettore di un campo costante

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0 \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0$$

- Non c'è una soluzione unica

- Una possibile scelta potrebbe essere

$$A_x = 0 \quad A_y = B_0 x \quad A_z = 0$$

- Una scelta alternativa

$$A_x = -B_0 y \quad A_y = 0 \quad A_z = 0$$

- O anche la media delle due soluzioni trovate

$$A_x = -\frac{1}{2} B_0 y \quad A_y = \frac{1}{2} B_0 x \quad A_z = 0$$

- Con una formulazione indipendente dall'orientamento di B

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B}_0 \times \mathbf{r} = -\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{B}_0$$

- Si verifica facilmente che

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}_0$$

Potenziale vettore di un filo

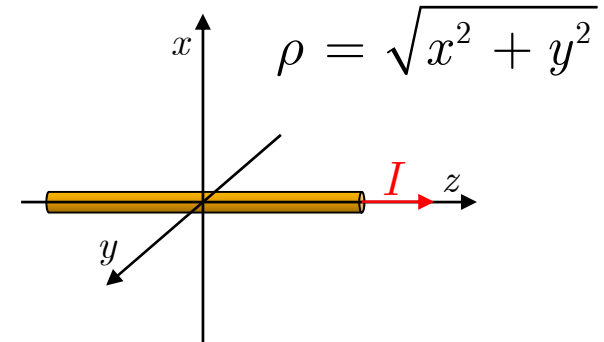
- Consideriamo un filo di raggio a percorso da una corrente I

- All'interno del filo la densità di corrente $\mathbf{J}$ è uniforme e vale

$$J_x = 0 \quad J_y = 0 \quad J_z = \frac{I}{\pi a^2}$$

- Ricordiamo la formula per il potenziale vettore

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$



- Osserviamo preliminarmente che

$$J_x = J_y = 0 \quad \longrightarrow \quad A_x = 0 \quad A_y = 0 \quad A_z(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_z(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$A_z(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_z(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' dz' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$A_z(\mathbf{r}) = A_z(\rho, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} 2 \int_0^{+\infty} \frac{dz'}{\sqrt{\rho^2 + z'^2}}$$

- Sfortunatamente per la densità di corrente data la formula per A_z diverge

Potenziale vettore di un filo

- Infatti

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} = \ln \frac{\sqrt{z^2 + \rho^2} + z}{\rho} \Big|_0^\infty = \infty$$

- Facciamo il calcolo per un filo di lunghezza finita L

$$A_z(\rho, 0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^L \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{z^2 + \rho^2} + z}{\rho} \Big|_0^L = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{L^2 + \rho^2} + L}{\rho}$$

- In definitiva

$$A_z(\rho, 0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left[\frac{L}{\rho} \left(\sqrt{1 + \frac{\rho^2}{L^2}} + 1 \right) \right] \quad \text{per } \frac{\rho}{L} \ll 1 \quad \longrightarrow \quad A_z(\rho, 0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{2L}{\rho}$$

- Possiamo anche scriverlo come

$$A_z(\rho, 0) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \rho + c \quad c = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln 2L$$

- Nel caso di filo infinito la costante è infinita
- Come avveniva nel caso elettrostatico di un filo di carica

$$\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \Leftrightarrow \frac{\mu_0 I}{2\pi}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\rho}{a} \quad \longrightarrow \quad A_z(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho}{a}$$

Potenziale vettore di un filo

$$A_z(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{\rho}{a} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- **Calcoliamo il campo magnetico**

- **La componente B_z è nulla** ($A_x = A_y = 0$)

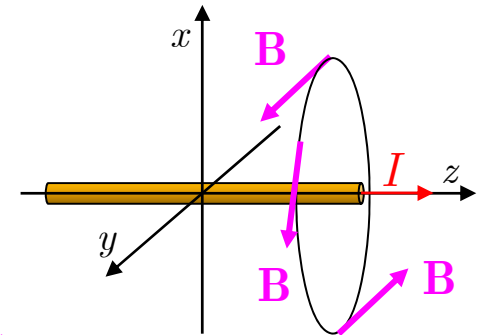
$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0$$

- **Calcoliamo le componenti B_x e B_y**

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \frac{y}{\rho} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \sin \phi$$

$$B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \frac{x}{\rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \cos \phi$$



$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

