
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 22 - 02.03.2023

Campo B sull'asse di una spira
Sorgenti del campo magnetico
Circuitazione e rotore del campo magnetico
Legge di Ampère; applicazioni

Anno Accademico 2022/2023

Campo magnetico sull'asse di una spira

- Un altro problema semplice da risolvere è il calcolo del campo magnetico sull'asse di una spira di raggio a
 - Il calcolo è semplice sull'asse
 - Complicato altrove
- Utilizziamo un metodo completamente vettoriale

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

- I vettori del problema sono

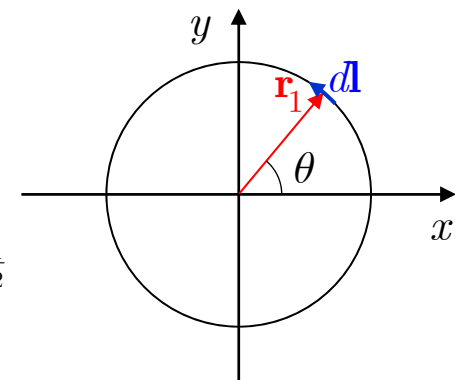
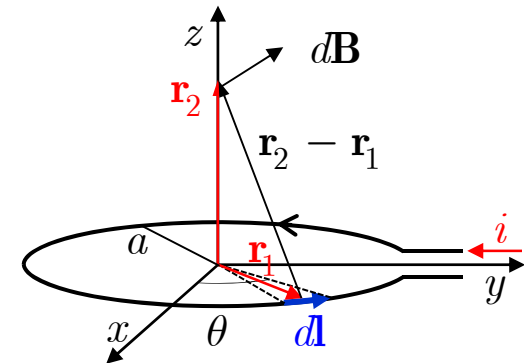
$$\mathbf{r}_1 = \hat{\mathbf{e}}_x a \cos \theta + \hat{\mathbf{e}}_y a \sin \theta \quad \mathbf{r}_2 = \hat{\mathbf{e}}_z z$$

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \hat{\mathbf{e}}_z z - \hat{\mathbf{e}}_x a \cos \theta - \hat{\mathbf{e}}_y a \sin \theta \quad |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = (a^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$d\mathbf{l} \equiv d\mathbf{r}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{d\theta} d\theta = (-\hat{\mathbf{e}}_x \sin \theta + \hat{\mathbf{e}}_y \cos \theta) a d\theta$$

- Calcoliamo il prodotto vettoriale

$$\begin{aligned} d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) &= (-\hat{\mathbf{e}}_x \sin \theta + \hat{\mathbf{e}}_y \cos \theta) \times (\hat{\mathbf{e}}_z z - \hat{\mathbf{e}}_x a \cos \theta - \hat{\mathbf{e}}_y a \sin \theta) a d\theta \\ &= (-\hat{\mathbf{e}}_x \times \hat{\mathbf{e}}_z z \sin \theta + \hat{\mathbf{e}}_x \times \hat{\mathbf{e}}_y a \sin^2 \theta + \hat{\mathbf{e}}_y \times \hat{\mathbf{e}}_z z \cos \theta - \hat{\mathbf{e}}_y \times \hat{\mathbf{e}}_x a \cos^2 \theta) a d\theta \end{aligned}$$



$$\hat{\mathbf{e}}_x \times \hat{\mathbf{e}}_x = \hat{\mathbf{e}}_y \times \hat{\mathbf{e}}_y = 0$$

Campo magnetico sull'asse di una spira

$$\begin{aligned} d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) &= \left(-\hat{\mathbf{e}}_x \times \hat{\mathbf{e}}_z z \sin \theta + \hat{\mathbf{e}}_x \times \hat{\mathbf{e}}_y a \sin^2 \theta + \hat{\mathbf{e}}_y \times \hat{\mathbf{e}}_z z \cos \theta - \hat{\mathbf{e}}_y \times \hat{\mathbf{e}}_x a \cos^2 \theta \right) a d\theta \\ &= \left(\hat{\mathbf{e}}_y z \sin \theta + \hat{\mathbf{e}}_z a \sin^2 \theta + \hat{\mathbf{e}}_x z \cos \theta + \hat{\mathbf{e}}_z a \cos^2 \theta \right) a d\theta \\ &= \left(\hat{\mathbf{e}}_x z \cos \theta + \hat{\mathbf{e}}_y z \sin \theta + \hat{\mathbf{e}}_z a \right) a d\theta \end{aligned}$$

- Inseriamo nella formula per $d\mathbf{B}$

$$\begin{aligned} d\mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i a \frac{\hat{\mathbf{e}}_x z \cos \theta + \hat{\mathbf{e}}_y z \sin \theta + \hat{\mathbf{e}}_z a}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} d\theta \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} i a \frac{\hat{\mathbf{e}}_x z \cos \theta + \hat{\mathbf{e}}_y z \sin \theta + \hat{\mathbf{e}}_z a}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta \end{aligned}$$

- Integriamo su tutta la spira (da $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$)

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} i a \int_0^{2\pi} \frac{\hat{\mathbf{e}}_x z \cos \theta + \hat{\mathbf{e}}_y z \sin \theta + \hat{\mathbf{e}}_z a}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta$$

Campo magnetico sull'asse di una spira

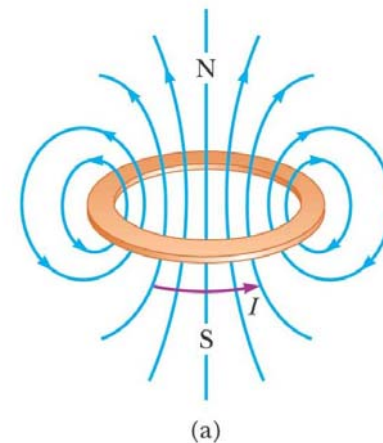
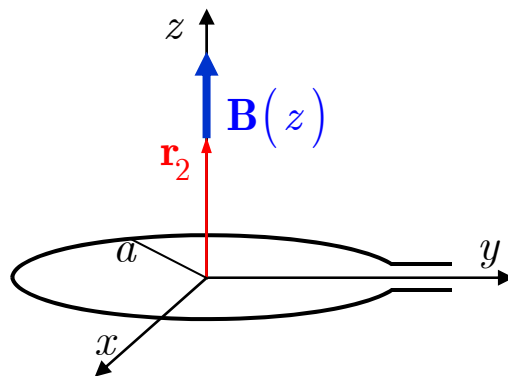
$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} ia \int_0^{2\pi} \frac{\hat{\mathbf{e}}_x z \cos \theta + \hat{\mathbf{e}}_y z \sin \theta + \hat{\mathbf{e}}_z a}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta$$

- Notiamo che il denominatore è costante
- Inoltre l'integrale dei primi due termini è nullo $\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0$

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} ia \int_0^{2\pi} \frac{\hat{\mathbf{e}}_z a}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\theta$$

$$\mathbf{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{ia^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\mathbf{e}}_z$$

- Come atteso il campo è diretto lungo l'asse z



©2004 Thomson - Brooks/Cole

Campo di una densità di corrente

- Anche la legge di Biot e Savart può essere generalizzata ad una densità di corrente $\mathbf{J}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_C \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad i = S|\mathbf{J}|$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{|\mathbf{J}| da d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

- In questa formula
 - Il vettore $d\mathbf{l}$ è perpendicolare a S (da): $da d\mathbf{l}_1 = dV_1$
 - Il vettore $d\mathbf{l}$ e il vettore $\mathbf{J}$ sono paralleli
- Estendendo l'integrazione anche a da su tutto il volume V otteniamo

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} dV_1$$

- Sottolineiamo che
 - L'integrazione è fatta rispetto alla variabile $\mathbf{r}_1$
 - La densità di corrente è calcolata nel punto $\mathbf{r}_1$

Campo di una densità di corrente

- La legge di Biot e Savart gioca per la magnetostatica un ruolo simile al ruolo che la legge di Coulomb gioca per l'elettrostatica

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

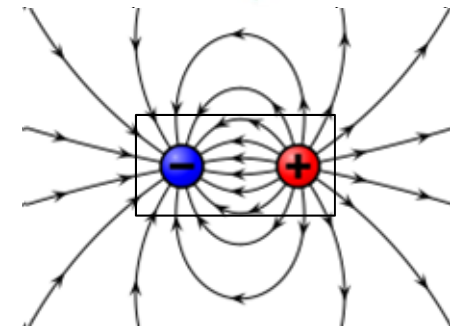
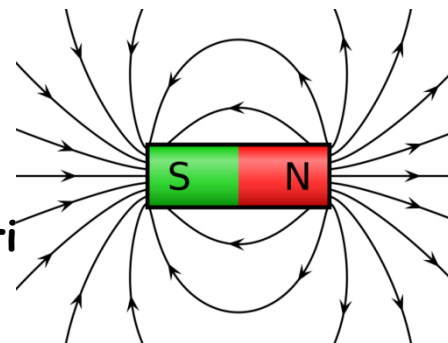
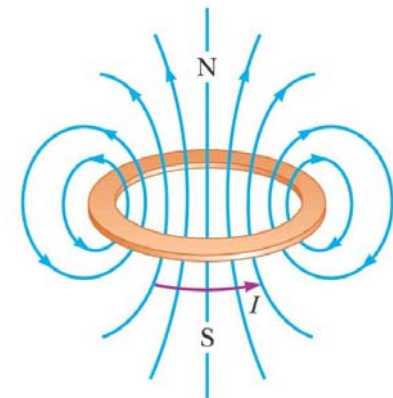
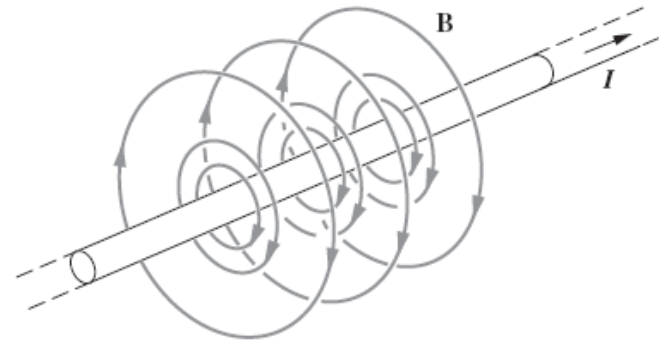
- Tuttavia, nel caso dell'elettrostatica l'integrando rappresenta il contributo al campo elettrico di una carica elementare
- Nel caso della magnetostatica l'elemento di corrente elementare non ha senso fisico definito
- Si potrebbe pensare che una carica in moto rappresenti una densità di corrente elementare che genera un campo magnetico elementare
 - Ad esempio un moto rettilineo uniforme

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') dV' = dq\mathbf{v} \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t \quad d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

- Questo è SBAGLIATO!
 - La densità di corrente $dq\mathbf{v}$ NON è stazionaria
 - Genera un campo magnetico dipendente dal tempo

L'assenza delle cariche magnetiche

- Richiamiamo la forma del campo generato da un filo infinito
 - Le linee di campo sono circonferenze intorno al filo
 - Sono linee chiuse, senza sorgente!
- Analogamente per il campo della spira
 - Anche in questo caso le linee di campo sono chiuse
 - Al limite partono e finiscono all'infinito
- Abbiamo già notato la similitudine fra il campo di un magnete permanente e un dipolo elettrico
 - Si potrebbe essere tentati di pensare che esistano le cariche magnetiche
 - Si tratterebbe di una teoria perfettamente consistente
- Tuttavia le cariche magnetiche non esistono
 - Vedremo che anche nella materia i campi sono generati da correnti
 - A livello microscopico, da correnti atomiche



L'assenza delle cariche magnetiche

- Per il campo elettrico abbiamo visto che il legame fra la carica elettrica e il campo poteva essere descritto matematicamente dalla legge di Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- L'evidenza sperimentale che non esistono le cariche magnetiche si esprime dicendo che il campo $\mathbf{B}$ ha la proprietà

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Questa legge esprime matematicamente il fatto che il campo magnetico non è generato da cariche magnetiche
- Esprime anche il fatto che le linee non hanno sorgente
- Infine dice anche che le linee di campo sono chiuse

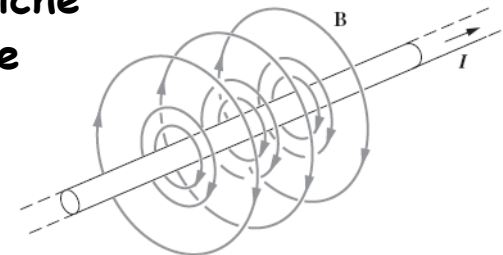
- Un campo con divergenza nulla è detto solenoidale

- Ritorniamo al campo del filo infinito

- Lo abbiamo calcolato con la formula di Biot e Savart

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_C \frac{d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

- Dimostriamo che un campo che si può scrivere con la formula di Biot e Savart ha divergenza nulla
- Preliminarmente alcune formule matematiche con l'operatore ∇



Operatore ∇ applicato a prodotti

- Con l'operatore "Nabla" (∇) abbiamo definito tre operazioni applicandolo ...
 - Ad una funzione scalare per costruire un vettore: gradiente $\nabla\phi$
 - Ad una funzione vettoriale per costruire uno scalare: divergenza $\nabla\cdot\mathbf{F}$
 - Ad una funzione vettoriale per costruire un vettore: rotore $\nabla\times\mathbf{F}$
- Ci sono due modi per costruire una funzione scalare a partire da due funzioni (scalari o vettoriali)
 - Prodotto di due funzioni scalari fg
 - Prodotto di due funzioni vettoriali $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$
- Analogamente ci sono due modi per costruire una funzione vettoriale a partire da due funzioni (scalari o vettoriali)
 - Prodotto di una funzione scalare e una vettoriale $f\mathbf{A}$
 - Prodotto di due funzioni vettoriali $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$
- Esamineremo le formule per calcolare ...
 - Il gradiente per i primi due casi
 - La divergenza per il terzo e quarto caso
 - Il rotore per il terzo e quarto caso
 - In totale sei formule
- Abbiamo così esaurito tutte le possibilità di applicare l'operatore Nabla al prodotto di due funzioni (scalari o vettoriali)

Operatore ∇ applicato a prodotti

- **Gradiente di una funzione scalare (risultato di un prodotto)**

$$\nabla fg = f \nabla g + g \nabla f$$

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

- **Divergenza di una funzione vettoriale (risultato di un prodotto)**

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$$

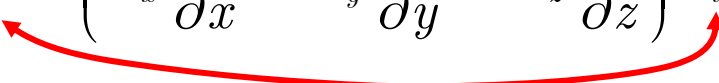
$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

- **Rotore di una funzione vettoriale (risultato di un prodotto)**

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

- **Una precisazione sull'espressione**

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad [(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}]_x = \left(A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \right) B_x$$


- **Analogamente per le componenti y e z**

Divergenza del campo magnetico

- Calcoliamo la divergenza di $\mathbf{B}$

- Sottolineiamo che calcoliamo le derivate rispetto a $\mathbf{r}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

- Con $\nabla_{\mathbf{r}}$ intendiamo l'operatore ∇ che agisce sulle coordinate $\mathbf{r}$
- Inoltre abbiamo scambiato l'ordine di derivazione integrazione
- Utilizziamo l'identità $\nabla \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot \nabla \times \mathbf{D}$
- Evidentemente $\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$
- $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ non dipende da $\mathbf{r}$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{J}(\mathbf{r}') \\ \mathbf{D} &= \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

- Notiamo che l'argomento di $\nabla_{\mathbf{r}} \times$ è sostanzialmente il campo elettrostatico di una carica puntiforme
- Il suo rotore è pertanto nullo
- Pertanto

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 0$$

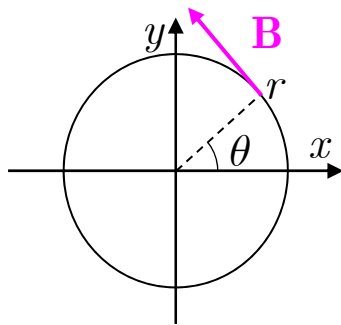
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Circuitazione del campo magnetico

- La divergenza del campo magnetico esprime una proprietà importante del campo
 - Come in elettrostatica, ci permetterà di scrivere equazioni differenziali
- Tuttavia non definisce il legame del campo con le sue sorgenti
 - Ricordiamo che nel caso del campo elettrico la circuitazione esprimeva la proprietà del campo di essere conservativo
- Ritorniamo al campo del filo infinito
 - Le linee di campo sono delle circonferenze intorno al filo
 - Il modulo del campo dipende dalla distanza dal filo

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{1}{r}$$

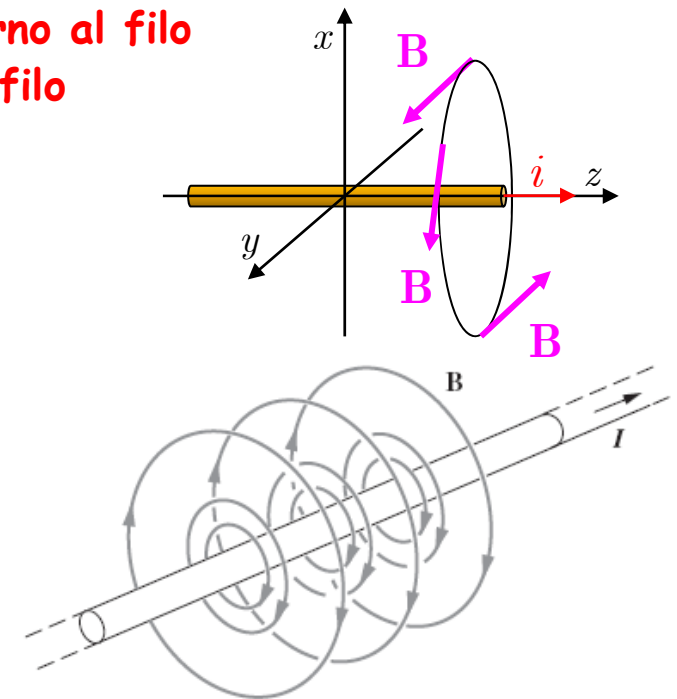
- Per completezza, le componenti cartesiane sono



$$B_x = -\frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{\sin \theta}{r}$$

$$B_y = +\frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{\cos \theta}{r}$$

$$B_z = 0$$



Circuitazione del campo magnetico

- Iniziamo con la circuitazione di B lungo il cammino indicato in figura

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Gamma_a} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Gamma_b} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Gamma_c} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Gamma_d} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

- L'integrale lungo Γ_a e lungo Γ_c è nullo

- Il cammino è radiale

- È perpendicolare al campo magnetico: $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$

- Lungo Γ_b il modulo di B è costante e l'integrale è

$$\int_{\Gamma_b} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B(r_2) \Delta l = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{1}{r_2} r_2 \Delta\theta = \mu_0 i \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

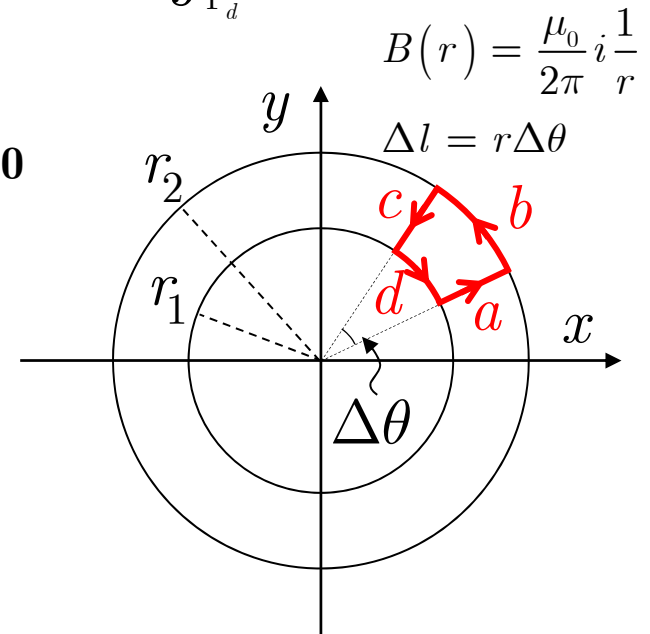
- Analogamente l'integrale lungo Γ_d è

$$\int_{\Gamma_d} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{r_1 \Delta\theta}{r_1} = -\mu_0 i \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

- Il segno meno deriva dal fatto che il campo magnetico e il cammino hanno verso opposto

- In definitiva

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \frac{\Delta\theta}{2\pi} - \mu_0 i \frac{\Delta\theta}{2\pi} = 0$$



Circuitazione del campo magnetico

- Consideriamo ancora il campo magnetico di un filo infinito
 - Calcoliamo adesso la circuitazione lungo il cammino Γ in figura
 - Una circonferenza di raggio r_1 centrata sul filo
 - Il campo magnetico e il cammino sono sempre paralleli

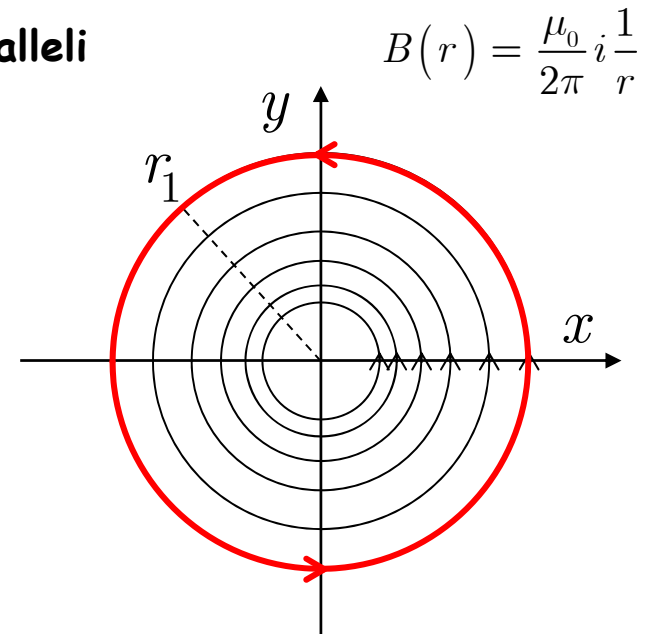
$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B dl = B(r_1) r_1 d\theta$$

- Otteniamo pertanto

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} B(r_1) r_1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i}{r_1} r_1 d\theta$$

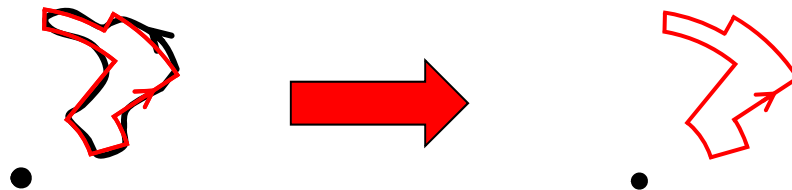
$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$$

- In questo caso la circuitazione non è nulla
- A differenza dal caso precedente il cammino "gira intorno" a una corrente
 - Si dice che la corrente è concatenata con il cammino
- Notiamo che il campo magnetico $\mathbf{B}$ non è conservativo



Circuitazione del campo magnetico

- I due risultati trovati possono essere espressi con una unica legge
 - La circuitazione del campo magnetico è uguale alla corrente concatenata con il cammino
 - Se non c'è corrente concatenata la circuitazione è nulla
- Tuttavia abbiamo utilizzato cammini particolari
 - Circonferenze, archi di circonferenza, raggi
- Si dimostra facilmente che i due risultati trovati valgono per cammini arbitrari
- Iniziamo con un cammino senza corrente concatenata
 - Consideriamo ad esempio il cammino in figura



Ogni arco $\frac{\mu_0}{2\pi} i \Delta\theta$

$\Delta\theta$ negativo o positivo

$$\sum_k \Delta\theta_k = 0$$

- È evidente che può essere approssimato con cammini infinitesimi fatti con raggi e circonferenze
- Ci si convince facilmente che la circuitazione lungo il cammino è nulla
 - I cammini radiali non contribuiscono
 - I contributi dei cammini lungo gli archi si elidono

Circuitazione del campo magnetico

- Consideriamo adesso un cammino Γ_a concatenato con una corrente

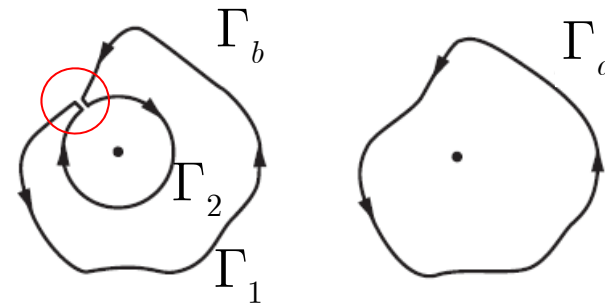
- Consideriamo anche il cammino Γ_b

- La parte di "raccordo" può essere resa trascurabile

- La parte esterna Γ_1 coincide, a meno di un tratto infinitesimo, con Γ_a

- La parte interna Γ_2 , a meno di un tratto infinitesimo mancante, è una circonferenza come quelle utilizzate fino ad ora

- Rispetto alla corrente concatenata i cammini Γ_1 e Γ_2 sono percorsi in senso opposto



- Avremo

$$\oint_{\Gamma_b} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \oint_{\Gamma_b} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \approx \oint_{\Gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{\Gamma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad \boxed{\oint_{\Gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\oint_{\Gamma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}}$$

- Abbiamo visto che la circuitazione lungo Γ_2 è proporzionale alla corrente concatenata

- In questo caso con il segno meno

$$\oint_{\Gamma_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\mu_0 i \quad \longrightarrow \quad \oint_{\Gamma_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \quad \longrightarrow \quad \boxed{\oint_{\Gamma_a} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i}$$

Circuitazione del campo magnetico

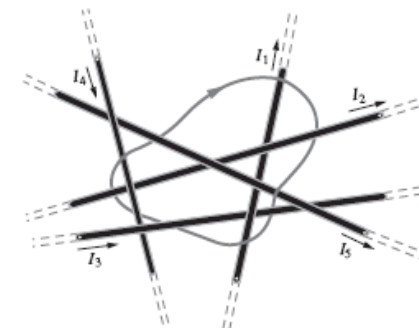
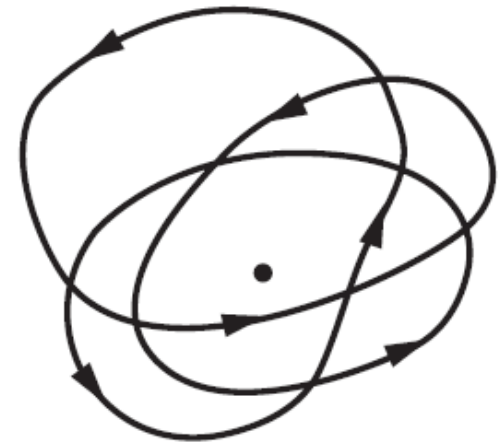
- Per finire consideriamo un cammino che "gira" intorno alla corrente più di una volta
 - Utilizzando opportuni tratti radiali rispetto al filo, il cammino può essere suddiviso in più cammini chiusi ognuno dei quali "gira" intorno al filo una sola volta
 - Se complessivamente il cammino gira intorno al filo N volte avremo

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = N\mu_0 i$$

- Per tutti i casi considerati abbiamo usato il campo magnetico di un filo infinito
 - Possiamo considerare un fatto sperimentale il risultato che la legge trovata vale per qualunque campo magnetico generato da un sistema arbitrario di correnti stazionarie
 - Anche più fili percorsi da correnti diverse
 - Il risultato è sempre

Legge di Ampère

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_k i_k$$



Rotore del campo magnetico

- Finora abbiamo considerato le correnti trasportate da fili conduttori
 - I risultati trovati possono essere estesi a sistemi descritti dalla densità di corrente
 - Supponiamo di analizzare un sistema caratterizzato da una densità di corrente $\mathbf{J}(x,y,z)$
 - Ricordiamo che la condizione di corrente stazionaria implica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{Per l'equazione di continuità avremo} \quad \nabla \cdot \mathbf{J}(x,y,z) = 0$$

- La legge di Ampère diventa

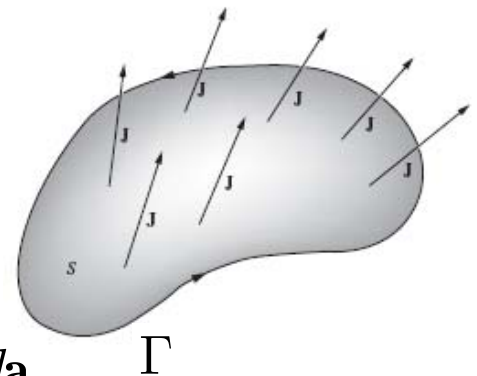
$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

- Applichiamo il teorema di Stokes al primo membro

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

- Dato che la relazione vale per Γ (S) arbitrari

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}}$$



Rotore del campo magnetico

- In alcune circostanze il teorema di Stokes richiede alcune accortezze
 - Oppure richiede l'estensione allo spazio delle distribuzioni
 - Situazione analoga al teorema della divergenza (vedi diap. 204-210 parte 1)

$$\nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = 4\pi\delta^3(\mathbf{r})$$

- Applichiamo ad esempio il teorema di Stokes al campo di un filo infinito

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{-y\hat{\mathbf{e}}_x + x\hat{\mathbf{e}}_y}{x^2 + y^2} \qquad \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

- Calcoliamo il rotore di $\mathbf{B}$: ha solo la componente z

$$\begin{aligned} [\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]_z &= \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\mu_0}{2\pi} i \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{-y}{x^2 + y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2 + y^2} \right] \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} &= -\frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2 + y^2} &= -\frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} \\ [\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r})]_z &= 0 \end{aligned}$$

- Questo calcolo non vale per $\mathbf{r} = 0$
- D'altro canto abbiamo visto che
 - Il teorema di Stokes sembrerebbe violato

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$$

Rotore del campo magnetico

- Come abbiamo detto la situazione è analoga a quella del teorema della divergenza per il campo di una carica puntiforme
 - Il problema si risolve allo stesso modo
- La densità di corrente di un filo di raggio nullo e diretta lungo z è

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = i\delta(x)\delta(y)\hat{\mathbf{e}}_z$$

- Non è una funzione ordinaria. È una distribuzione (funzione generalizzata)
- Possiamo a questo punto definire il rotore anche nel punto singolare $\mathbf{r} = 0$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} i \nabla \times \frac{-y\hat{\mathbf{e}}_x + x\hat{\mathbf{e}}_y}{x^2 + y^2} = \mu_0 i \delta(x)\delta(y)\hat{\mathbf{e}}_z$$

- Naturalmente

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

- Valida anche per $\mathbf{r} = 0$
- Anche in questo caso la relazione ha un'interpretazione rigorosa nell'ambito della teoria delle distribuzioni[†]
 - Tuttavia noi siamo abituati a considerare le funzioni $\delta(x)$ come funzioni ordinarie delle quali conosciamo le fondamentali regole di integrazione e derivazione

- [†]Kanwal R. - Generalized Functions - Theory and Applications 3rd ed. - Springer 2004

Rotore del campo magnetico

- Per concludere dimostriamo che il campo $\mathbf{B}$ espresso con la legge di Biot-Savart soddisfa l'equazione del rotore appena vista

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

- Calcoliamo il rotore

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \nabla_{\mathbf{r}} \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

- Ancora una volta $\nabla_{\mathbf{r}}$ agisce sulla variabile $\mathbf{r}$ e inoltre abbiamo scambiato derivate e integrale
- Elaboriamo l'integrando utilizzando la formula (vedi diapositiva 55)

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

- Poniamo temporaneamente $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^3} \right] = \left[\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^3} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \right] \mathbf{J}(\mathbf{r}') - [\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}}] \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^3} + \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left[\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^3} \right] - \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^3} [\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')]$$

- Il primo e il quarto termine sono nulli
- L'operatore $\nabla_{\mathbf{r}}$ è applicato a una funzione di $\mathbf{r}'$

Rotore del campo magnetico

- Pertanto l'integrando si riduce a

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] = -[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}}] \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left[\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right]$$

- Introduciamo nella formula dell'integrale

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V [\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}}] \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left[\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV'$$

- Dimostreremo che il primo integrale è nullo
- Nel secondo integrale (vedi elettromagnetismo 1 diapositiva 208)

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

- Inseriamo nell'integrale

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \left[\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') 4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV'$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r})$$

Rotore del campo magnetico

- Per completare la dimostrazione dimostriamo che il primo integrale è nullo

$$\int_V [\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}}] \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = 0$$

- Si tratta di tre integrali, uno per ciascuna componente

- Ad esempio la componente x

- $\nabla_{\mathbf{r}}$ agisce su una funzione di $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$
$$[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}}] \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}] \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$
- Possiamo fare agire ∇ su $\mathbf{r}'$

- Utilizziamo l'identità (vedi diapositiva 39)

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f) \quad f(\mathbf{r}) = \frac{x - x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad \mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathbf{r}')$$

- L'integrale della componente x diventa

$$-\int_V [\mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \nabla_{\mathbf{r}'}] \frac{x - x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = -\int_V \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{x - x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV' + \int_V \frac{x - x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} [\cancel{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}')}] dV'$$

- In magnetostatica $\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$

- Il primo integrale può essere trasformato con il teorema della divergenza

$$\int_V \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{x - x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV' = \oint_S \left[\mathbf{J}(\mathbf{r}') \frac{x - x'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \hat{\mathbf{n}} da$$

- Facendo tendere la superficie all'infinito l'integrale è nullo

Magnetostatica ed elettrostatica

- Riepiloghiamo le leggi fin qui trovate per l'elettrostatica e la magnetostatica

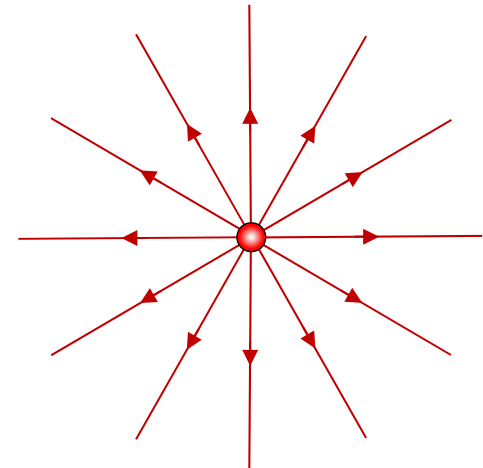
- Elettrostatica

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$



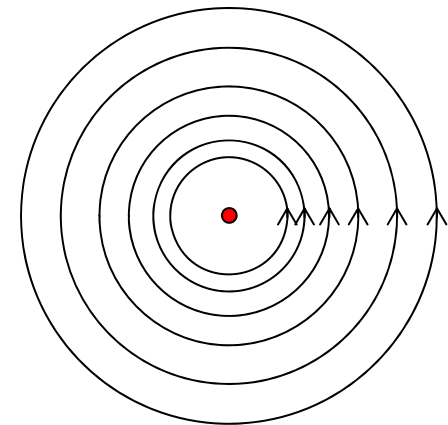
- Magnetostatica

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$



$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Unità di misura

- Le dimensioni e le unità di misura del campo di induzione magnetica B possono essere definite utilizzando la forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- Assumiamo $\mathbf{E} = 0$
- Nel sistema MKSA le dimensioni del campo B sono

$$[\mathbf{B}] = \frac{\text{N}}{\text{C m s}^{-1}} = \frac{\text{N}}{\text{A m}}$$

- L'unità di misura nel sistema MKSA è il Tesla, simbolo T
- Un campo magnetico di un Tesla esercita la forza di 1 N su una carica di 1 C che si muove con una velocità di 1 m/s
 - Il campo magnetico terrestre è dell'ordine di 10^{-5} T
- È molto utilizzato un sottomultiplo improprio: il Gauss G
 - Improprio perché in realtà è l'unità di misura nel sistema CGS
 - Le dimensioni sono diverse
 - Tuttavia, numericamente, $1\text{T} = 10^4 \text{ G}$
 - Il campo magnetico terrestre è dell'ordine di 0.1 G
- Notiamo infine le dimensioni di B rispetto a quelle di E

$$[v][\mathbf{B}] = [\mathbf{E}]$$