
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 21 - 28.02.2023

Forza di Lorentz

Proprietà della forza magnetica

Densità di Corrente. Forza su una corrente

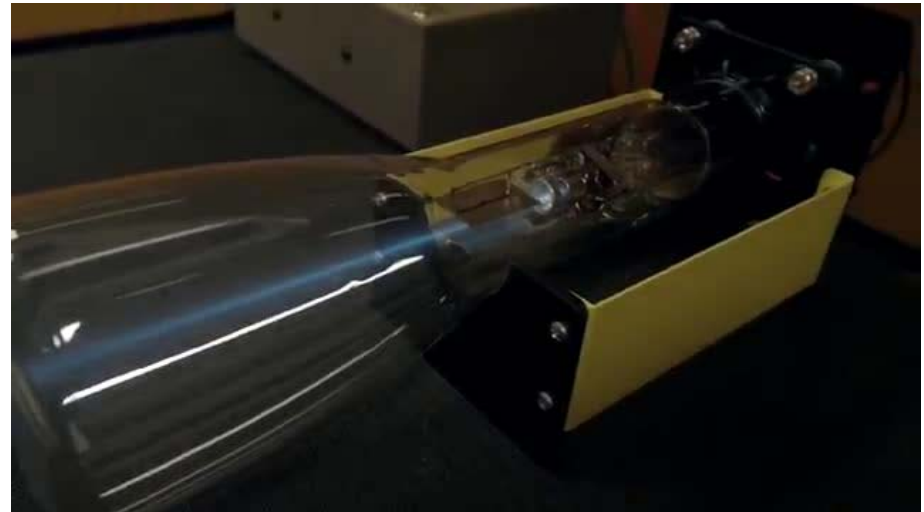
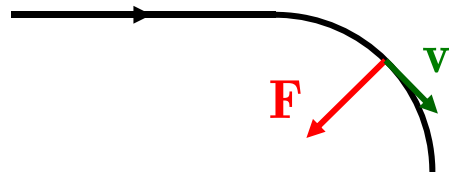
Legge di Biot e Savart

Sorgenti del campo magnetico

Anno Accademico 2022/2023

La forza di Lorentz

- Per iniziare lo studio quantitativo delle forze magnetiche abbandoniamo da ora in poi lo sviluppo storico
 - Iniziamo dall'osservazione sperimentale che la forza magnetica viene esercitata su una carica elettrica in movimento
- Una prima caratteristica molto importante della forza magnetica è che essa dipende dalla velocità della carica test
 - In particolare la forza magnetica è sempre perpendicolare alla velocità
 - Ad esempio la deflessione di un fascio di elettroni
 - Gli elettroni eccitano livelli energetici dell'Argon che emette luce azzurrina
 - Il magnete deflette il fascio
 - Applica una forza centripeta
- Si può definire una procedura simile a quella utilizzata per la definizione operativa del campo elettrico
 - Misurare la forza che viene esercitata su una carica di test



La forza di Lorentz

- Il risultato di una serie di esperimenti in una regione dello spazio condotti su cariche in movimento porterebbe al seguente risultato
 - È possibile definire un campo vettoriale $B(r)$ (detto induzione magnetica) funzione della posizione r
 - La forza su una carica q che si muove con velocità v è data dalla relazione

$$F = q v \times B$$

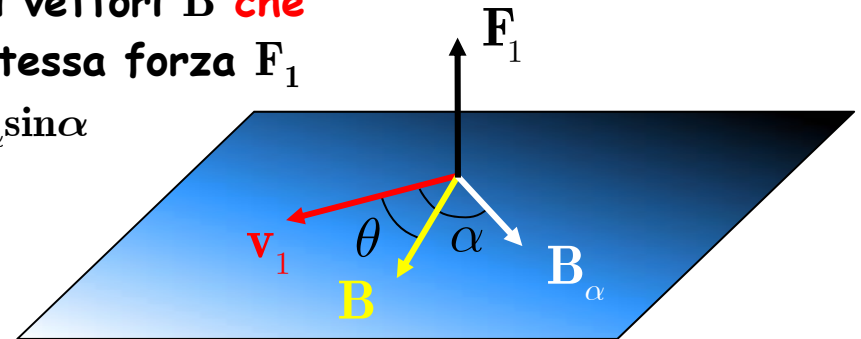
- Se nella regione esiste anche un campo elettrico E la forza totale è

$$F = qE + q v \times B$$

- L'ultima formula è la definizione della Forza di Lorentz (1895)
- Il fatto che si possa sempre trovare un campo vettoriale B che soddisfi la relazione precedente è una circostanza a priori non scontata
 - La legge sopra enunciata vale anche per campi variabili nel tempo
 - È una relazione locale
 - Tutte le grandezze sono misurate nello stesso punto $r = (x, y, z)$ e tempo t
 - Tutte le grandezze sono misurate nello stesso sistema inerziale

La forza di Lorentz

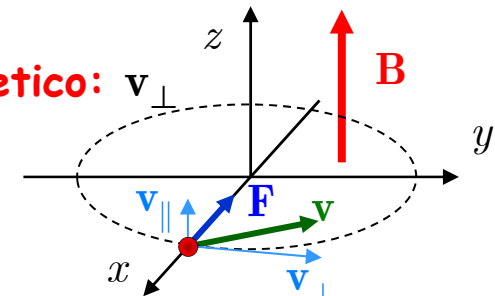
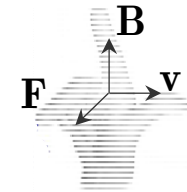
- Insistiamo ancora sul fatto che una sola misura non è sufficiente
 - Supponiamo infatti che per una velocità $\mathbf{v}_1$ si sia misurata una forza $\mathbf{F}_1$
 - Abbiamo già detto che sperimentalmente si trova che $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{v}_1$ sono perpendicolari
 - Il vettore $\mathbf{B}$ deve giacere sul piano perpendicolare a $\mathbf{F}_1$
 - Inoltre il modulo della forza è $F_1 = qv_1 B \sin \theta$
 - Tuttavia è evidente che esistono infiniti vettori $\mathbf{B}$ che giacciono sul piano e che producono la stessa forza $\mathbf{F}_1$
 - Tutti i vettori $\mathbf{B}_\alpha$ tali che $B \sin \theta = B_\alpha \sin \alpha$
- Un altro modo di mettere in evidenza l'indeterminazione
 - Se $\mathbf{B}$ soddisfa $\mathbf{F}_1 = q \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}$
 - Allora la relazione è soddisfatta anche da $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} + k\mathbf{v}_1$ con k arbitrario
- Si può dimostrare che se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono due velocità perpendicolari e le forze misurate sono $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ rispettivamente



$$\mathbf{B} = \frac{1}{qv_1^2} \left[\mathbf{F}_1 \times \mathbf{v}_1 + \frac{(\mathbf{F}_2 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_1}{v_2^2} \mathbf{v}_1 \right]$$

Proprietà della forza magnetica

- La componente magnetica della forza di Lorentz è data da un prodotto vettoriale: $\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$
 - È perpendicolare al piano individuato dai vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$
 - Ovviamente i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$ non sono necessariamente perpendicolari
- La velocità $\mathbf{v}$ può essere scomposta in due componenti (assumiamo $\mathbf{B}$ uniforme)
 - Una componente parallela al campo magnetico: $\mathbf{v}_{\parallel}$
 - Una componente sul piano perpendicolare al campo magnetico: $\mathbf{v}_{\perp}$
- Consideriamo dapprima il caso in cui $\mathbf{v}_{\parallel} = 0$



- La forza di Lorentz diventa

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = q (\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}) \times \mathbf{B} = q \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}$$
- La forza è nel piano perpendicolare a $\mathbf{B}$ ed è sempre perpendicolare a $\mathbf{v}_{\perp}$
 - Il modulo della forza è costante $F = qv_{\perp}B$
 - La particella descrive un moto circolare uniforme

$$F = m \frac{v_{\perp}^2}{R} \quad qv_{\perp}B = m \frac{v_{\perp}^2}{R} \quad R = m \frac{v_{\perp}}{qB} = \frac{p_{\perp}}{qB}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m}$$

• Inoltre

$$v_{\perp}T = 2\pi R \quad T = \frac{1}{v_{\perp}} 2\pi m \frac{v_{\perp}}{qB} = 2\pi \frac{m}{qB}$$

frequenza di ciclotrone

Proprietà della forza magnetica

- Consideriamo adesso il caso in cui $v_{\parallel}$ sia diversa da zero

$$\mathbf{v}_{\parallel} \times \mathbf{B} = 0$$

- La forza magnetica continua a dipendere solo da $\mathbf{v}_{\perp}$

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} = q (\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}) \times \mathbf{B} = q \mathbf{v}_{\parallel} \times \mathbf{B} + q \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B} = q \mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}$$

- La particella percorre una traiettoria che proiettata su un piano perpendicolare a $\mathbf{B}$ è ancora un moto circolare uniforme

- Tuttavia la componente $\mathbf{v}_{\parallel}$ non è modificata

- Non ci sono forze in questa direzione

- La coordinata parallela a $\mathbf{B}$ della traiettoria varia come $v_{\parallel} t$

- La traiettoria della particella è un'elica

- Ricordiamo che il raggio del moto circolare diminuisce al crescere di B

$$R = m \frac{v_{\perp}}{qB}$$

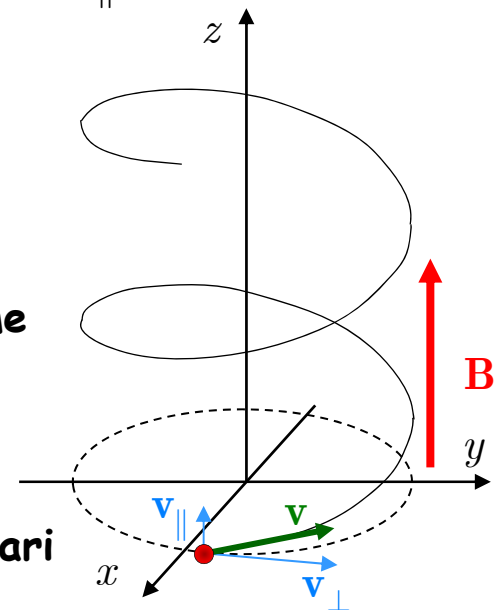
- Se B è molto intenso il moto è confinato a "seguire" le linee del campo magnetico

- Considerazione analoghe anche nel caso di B non uniforme

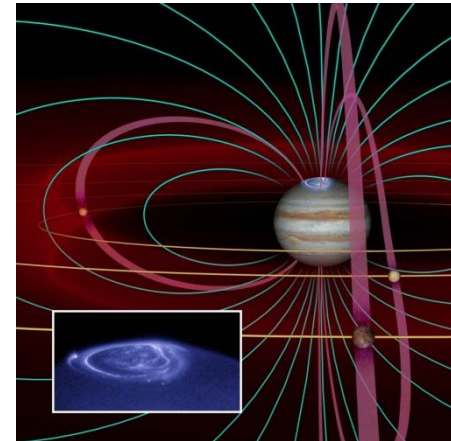
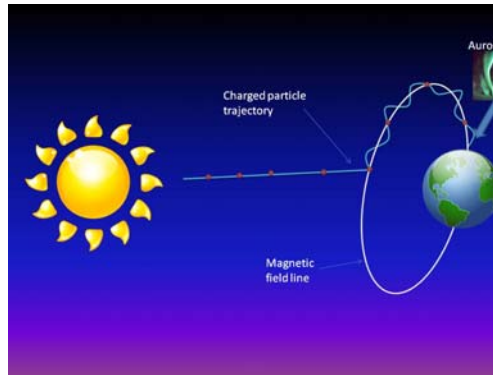
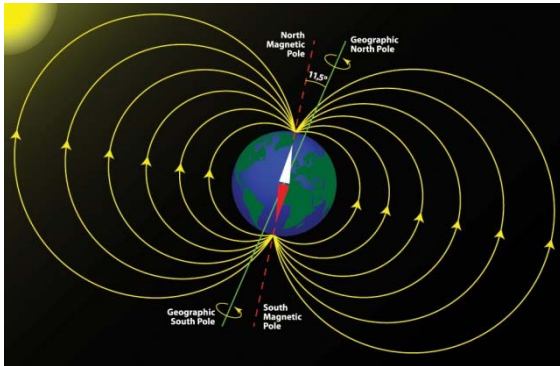
- In presenza di non uniformità del campo (gradienti) si realizzano effetti di contenimento

- Bottiglie magnetiche

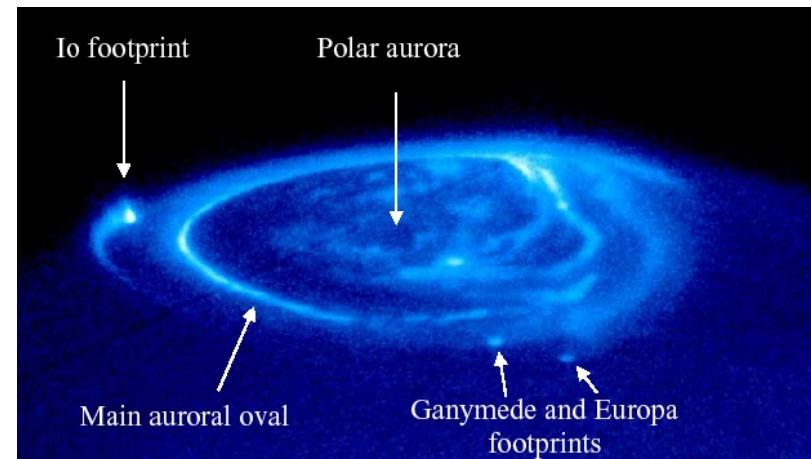
- Fenomeni di questo tipo, spettacolari, sono le aurore polari



Aurore polari



<https://www.boulder.swri.edu/~spencer/digipics.html>



<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jupiter.Aurora.HST.mod.svg>

<https://www.youtube.com/watch?v=1DXHE4kt3Fw>

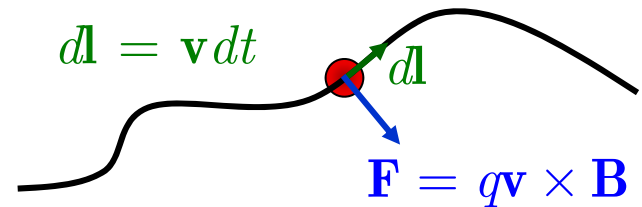
Proprietà della forza magnetica

- Un'altra proprietà importante della parte magnetica della forza di Lorentz è che non compie lavoro

- In generale, il lavoro fatto da una forza $\mathbf{F}$ che agisce su una particella è

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

- Se la forza è dovuta a un campo magnetico
 - La forza dipende dalla velocità



$\mathbf{F}$ e $\mathbf{v}$ sono perpendicolari

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = 0$$

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$$

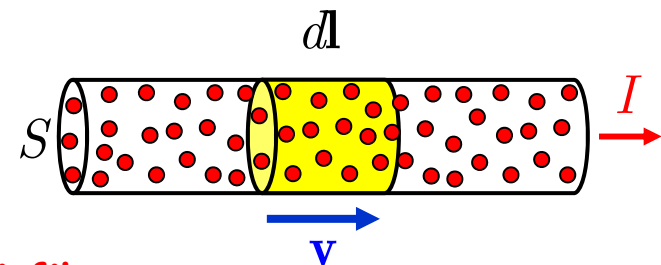
- Pertanto un campo magnetico che agisce su una particella carica in movimento
 - Modifica la direzione della velocità
 - Non modifica il modulo della velocità

La forza magnetica non compie lavoro

Forza su un filo percorso da corrente

- Consideriamo un conduttore di sezione S che trasporta una corrente I

- I portatori hanno una carica q e una densità ρ_N di particelle per unità di volume
- Per il momento ignoriamo i moti microscopici e supponiamo che tutte le particelle abbiano la stessa velocità $\mathbf{v}$



- Consideriamo adesso un tratto infinitesimo $d\mathbf{l}$ di filo

- Il questo elemento ci sono $dN = \rho_N S |d\mathbf{l}|$ cariche

- Se il conduttore è immerso in un campo magnetico $\mathbf{B}$ su ogni particella viene esercitata una forza

$$\mathbf{f} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- La forza sul tratto è $d\mathbf{F} = \mathbf{f}dN = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}dN = q\rho_N S |d\mathbf{l}| \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

- La corrente scorre parallela all'asse del filo pertanto $\mathbf{v}$ e $d\mathbf{l}$ sono paralleli

- Possiamo pertanto scrivere ($q\rho_N \mathbf{v} = |\mathbf{J}|$)

$$d\mathbf{F} = q\rho_N S \mathbf{v} d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = |\mathbf{J}| S d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

- Sappiamo che i portatori di carica urtano con gli atomi del reticolo cristallino

- La forza esercitata dal campo magnetico viene trasferita al conduttore

- La forza totale sul circuito C è data dall'integrale

$$\mathbf{F} = I \oint_C d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$



Forza su una corrente

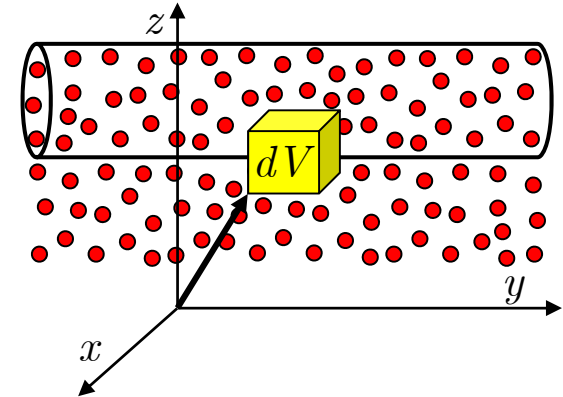
- Non necessariamente la corrente deve essere trasportata da un conduttore
- Flussi di particelle cariche in un elettrolita o in un plasma costituiscono correnti che sono soggette a forze in presenza di campi magnetici
- In tal caso la descrizione più adeguata è fatta con la densità di corrente $\mathbf{J}$
- Riprendiamo una formula della diapositiva precedente

$$d\mathbf{F} = qdN\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q\rho S \underbrace{\left| d\mathbf{l} \right|}_{dV} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \underbrace{q\rho \mathbf{v}}_{\mathbf{J}} \times \mathbf{B} dV = \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV$$

- Arriviamo all'espressione della forza per unità di volume

$$\frac{d\mathbf{F}}{dV} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

- Questa forza, insieme alla corrispondente forza elettrica sulla densità di carica ρ , è un ingrediente essenziale per scrivere le equazioni differenziali che permettono di calcolare $\mathbf{J}$
- Non affronteremo problemi di questo tipo



Densità di corrente superficiale

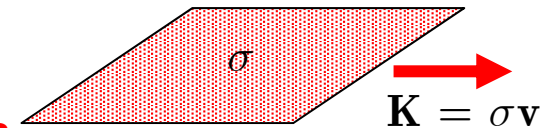
- La densità di corrente che abbiamo utilizzato fino ad ora considera densità volumetriche di cariche in movimento

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad [\mathbf{J}] = \text{C} / \text{m}^2 \text{s} \quad di = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} da \quad i = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

- Come nel caso elettrostatico è utile generalizzare a densità di cariche superficiali e lineari

- Utili per schematizzare situazioni in cui le densità si estendono per distanze molto piccole in una o due direzioni

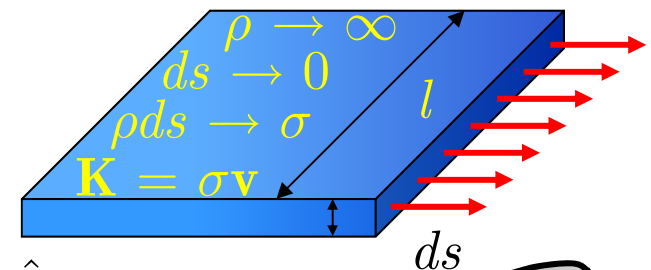
- La densità superficiale di corrente più semplice è un piano di carica di densità superficiale σ in movimento



- Un modo pratico per realizzare una densità superficiale di carica è tramite un conduttore come in figura

$$di = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds dl = \sigma \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl$$

$$di = \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \quad [\mathbf{K}] = \text{C} / \text{ms} \quad i = \int_a^b \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl$$



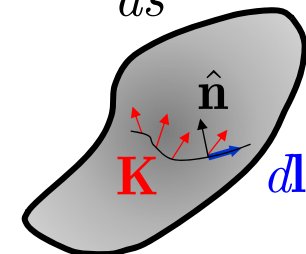
- Nell'esempio illustrato la densità di corrente è perpendicolare al segmento l

- In generale per un segmento arbitrario il vettore $\hat{\mathbf{n}}$ è perpendicolare al segmento l

- Una corrente su una superficie di forma arbitraria

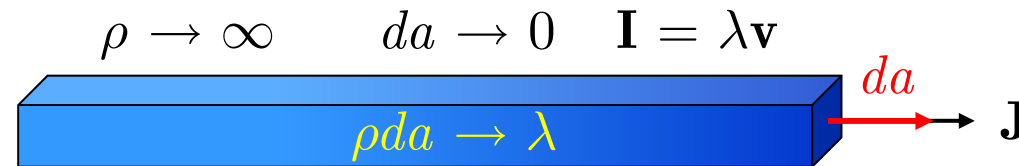
- Un segmento arbitrario

- Una densità superficiale di corrente $\mathbf{K}$ $i = \int_a^b \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl$



Corrente lineare

- Nel caso in cui sia trascurabile anche un'altra dimensione, si introduce una densità lineare



- Si modella con una densità lineare di carica in movimento
- Anche in questo caso si considera il limite
 - Densità volumica tende all'infinito
 - La sezione di area da tende a zero
 - Il prodotto è finito: densità lineare di carica
- In generale il flusso attraverso una superficie infinitesima è a sua volta infinitesimo $di = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$
- Tuttavia, dato che ρ diventa infinito anche $J = \rho v$ diverge
 - Il prodotto $J da$ è finito
- Pertanto scriviamo

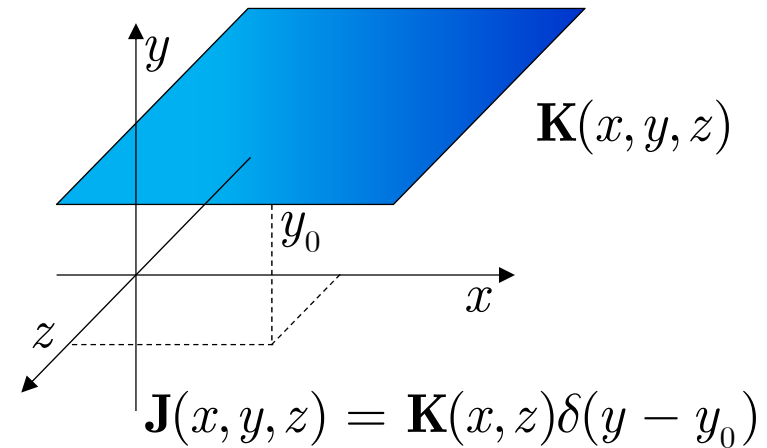
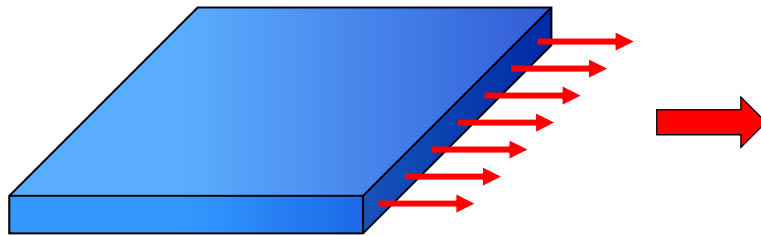
$$di \rightarrow i = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \rho \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \lambda \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

$$i = \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad [\mathbf{I}] = \text{C/s}$$

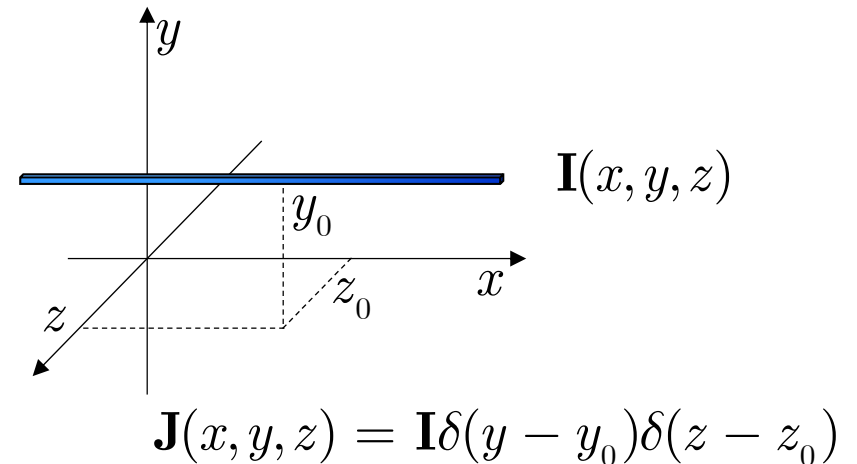
Densità di corrente

- Le densità superficiali e lineari di corrente possono essere considerate densità volumiche tramite l'uso di funzioni $\delta(x)$

- Densità superficiale di corrente



- Densità lineare di corrente

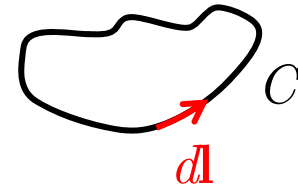


Forza su una corrente

- Abbiamo visto le forze che si esercitano sulle densità di corrente lineari e di volume

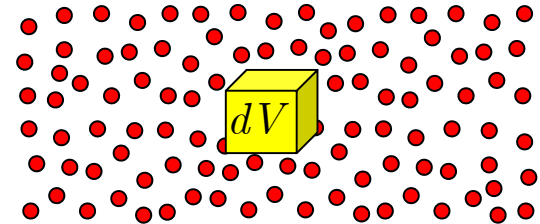
- Corrente lineare

$$\mathbf{F} = \oint_C \mathbf{I} \times \mathbf{B} d\mathbf{l} = I \oint_C d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$



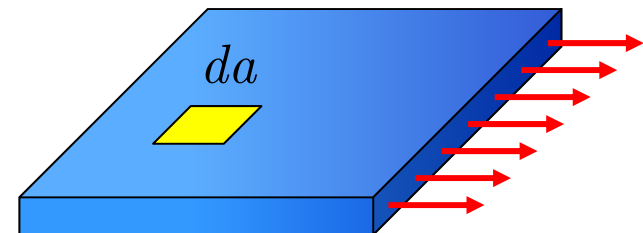
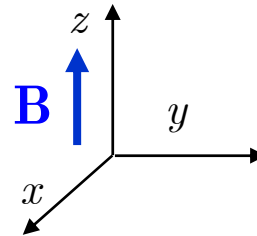
- Corrente di volume

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV$$



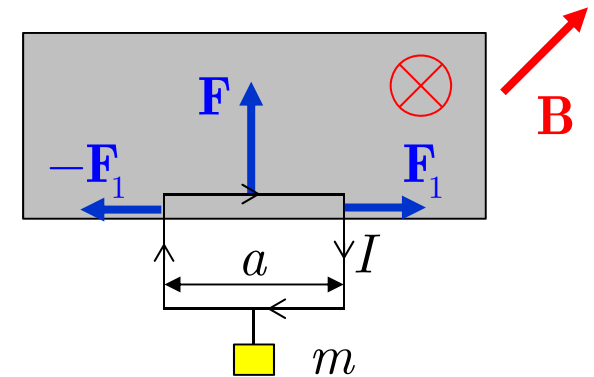
- Per una corrente superficiale

$$\mathbf{F} = \int_S \mathbf{K} \times \mathbf{B} da$$



Esempio di forza su un circuito

- Consideriamo una regione dello spazio in cui sia presente un campo magnetico
 - Il simbolo indica un vettore perpendicolare al piano dello schermo
 - Il verso è tale che B "entra" nello schermo
- Consideriamo adesso un circuito chiuso rettangolare percorso da una corrente I
 - La larghezza del circuito è a
- Calcoliamo la corrente I necessaria per bilanciare il peso mg
- Ricordiamo l'espressione della forza su una corrente $d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$
 - Sul filo inferiore non c'è forza magnetica ($B = 0$)
 - Sui due fili laterali o non c'è forza perché sono all'esterno della regione con B oppure le forze si equilibrano
 - Sul filo superiore la forza è diretta verso l'alto



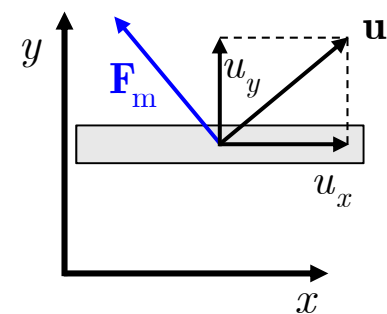
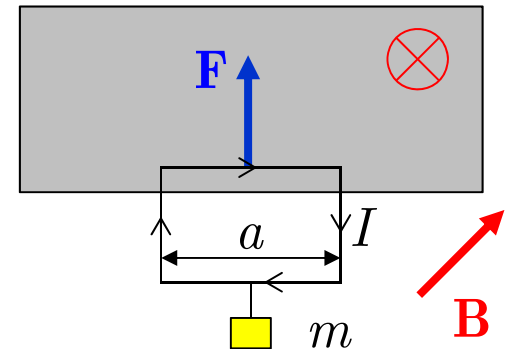
- All'equilibrio $F = mg$

$$F = \int_0^a I B dl = IBa$$

$$mg = IBa \quad I = \frac{mg}{Ba}$$

Chi fa lavoro?

- Se nel sistema precedente si aumenta la corrente, la forza magnetica supera il peso e il circuito si sposta verso l'alto
- La massa m acquista energia potenziale gravitazionale
 - Viene compiuto un lavoro
- A prima vista sembra che siano le forze magnetiche a compiere lavoro
 - Abbiamo detto che le forze magnetiche non fanno lavoro
- Per approfondire questo aspetto supponiamo che il circuito possa muoversi solamente in direzione verticale vincolato a delle guide senza attrito
 - Non può muoversi orizzontalmente
 - Se si muove verticalmente i portatori di carica nel tratto superiore del circuito hanno una velocità con due componenti
 - La componente u_y dovuta al moto verticale del circuito
 - La componente u_x legata alla corrente: $I = \lambda u_x$
 - La forza magnetica sui portatori di carica è pertanto
$$\mathbf{F}_m = a\lambda \mathbf{u} \times \mathbf{B}$$
 - Osserviamo che la forza magnetica è perpendicolare alla velocità dei portatori di carica
 - Non compie lavoro sulle cariche



Chi fa lavoro?

- Assumiamo di essere in una condizione stazionaria
 - La corrente è costante
 - La velocità verticale del circuito è costante
 - Tutte le forze sono in equilibrio
- Scomponiamo la forza magnetica in una componente verticale e una orizzontale

$$F_{my} = a\lambda u_x B \quad F_{mx} = a\lambda u_y B$$

- La componente verticale bilancia la forza peso
 - La velocità verticale del circuito è costante

$$F_{my} = a\lambda u_x B = mg \quad \lambda u_x = \frac{mg}{aB}$$

- La componente orizzontale si oppone alla corrente che circola nel filo
 - La batteria deve fare un lavoro maggiore per mantenere la corrente costante

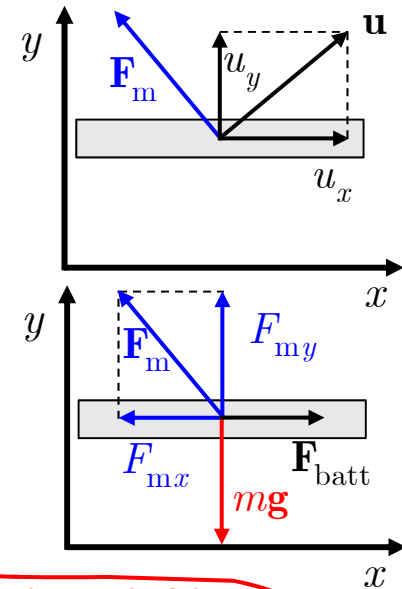
- Supponiamo che il circuito si alzi di tratto $h = u_y \Delta t$

$$\Delta t = \frac{h}{u_y}$$

- Nel tempo Δt la batteria deve contrastare il lavoro della componente F_{mx}

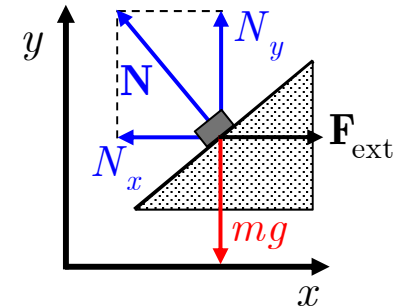
$$\Delta W = F_{mx} (u_x \Delta t) = a\lambda u_y B u_x \frac{h}{u_y} = a\lambda u_x B h \quad \boxed{\Delta W = mgh}$$

- Esattamente l'energia potenziale gravitazionale guadagnata dalla massa m
- Il lavoro è stato fatto dalla batteria!



Chi fa lavoro?

- Per finire un analogo meccanico
- Un piano inclinato senza attrito
 - Il diagramma delle forze è lo stesso di quello della diapositiva precedente
- La forza normale non compie lavoro
 - La reazione normale si scompone in due componenti
 - La componente verticale che bilancia la forza peso
 - La componente orizzontale che bilancia la forza esterna
 - La forza esterna orizzontale compie un lavoro e ha come effetto di aumentare l'altezza della massa
 - Aumenta l'energia potenziale gravitazionale della massa
- L'effetto della reazione vincolare è di trasformare il moto lungo l'asse x imposto dalla forza esterna in un moto anche lungo l'asse y
 - Inoltre trasforma il lavoro fatto dalla forza esterna in energia gravitazionale



Le sorgenti del campo magnetico

- La legge che abbiamo scritto per la forza su una carica in movimento ci permette di dare una definizione operativa di campo magnetico
 - In questo senso è molto diversa dalla legge di Coulomb
 - La legge di Coulomb permette di calcolare la forza
 - Allo stesso tempo definisce una nuova grandezza, la carica elettrica, sorgente della forza elettrica
 - Di fatto la legge di Coulomb definisce il campo elettrico
 - Nella legge della forza di Lorentz questo secondo aspetto è assente
 - Si definisce come calcolare la forza prodotta da un campo magnetico ma non si dice nulla sulle sue sorgenti e su come calcolare il campo magnetico
- Qualitativamente abbiamo visto che i magneti permanenti generano un campo magnetico
 - Le correnti deflettono gli aghi magnetici
 - Applicano una forza ai magneti
 - Devono anch'esse generare un campo magnetico
- L'origine dei campi magnetici dei magneti permanenti è molto complessa
 - Serve una teoria quantistica della materia
 - La studieremo più avanti
- Iniziamo con il campo magnetico generato da una corrente

La legge di Biot e Savart

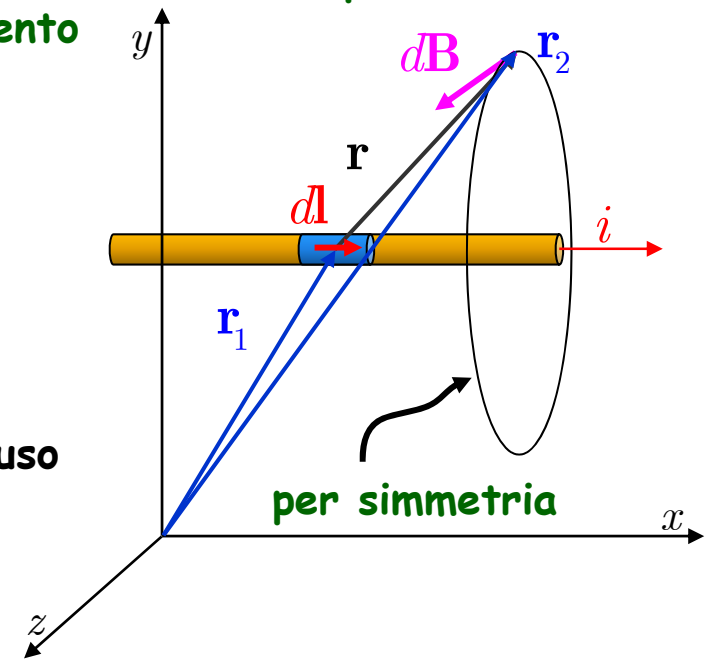
- La legge di Biot-Savart (anche prima formula di Laplace) permette di calcolare il campo di induzione magnetica generato da un filo percorso da corrente
- È valida solo per correnti stazionarie
 - In particolare non permette di calcolare correttamente il campo di induzione magnetica B di una carica in movimento
- Consideriamo un filo percorso da una corrente i
 - Consideriamo inoltre un elemento $d\mathbf{l}$ del filo
 - Il contributo al campo B nel punto r relativamente al tratto di filo è dato da

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

- Il tratto di filo $d\mathbf{l}$ fa parte di un circuito chiuso
- Questa espressione ha senso fisico solo dopo avere sommato (integrato) i contributi di tutto il circuito in esame
- Usando il formalismo vettoriale in forma esplicita

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \oint_{\text{filo}} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$



La legge di Biot e Savart

- Ricordiamo la condizione di stazionarietà che definisce la magnetostatica
 - A differenza dell'elettrostatica le cariche sono in movimento
 - Tuttavia il movimento deve avere precise caratteristiche
 - Non deve causare variazioni delle densità di carica
- Ricordiamo l'equazione di continuità

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

- Abbiamo visto che la condizione per la magnetostatica è

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$$

- La magnetostatica si applica pertanto ai campi generati da densità di correnti che soddisfano

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

- Correnti stazionarie (dette anche continue) che non variano nel tempo
- In realtà molte delle equazioni della magnetostatica si applicano anche a correnti lentamente variabili nel tempo
 - Definiremo in seguito con precisione il significato di "lentamente"

Il campo magnetico di un filo

- Calcoliamo il campo magnetico generato da un filo infinito

- Per semplicità scegliamo una geometria che semplifichi il problema

- Il filo lungo l'asse x $d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{e}}_x dx$

- Il punto in cui calcolare il campo giace sull'asse y

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{e}}_x \sin \theta + \hat{\mathbf{e}}_y \cos \theta \quad \hat{\mathbf{e}}_x \times \hat{\mathbf{e}}_x = 0$$

$$d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{e}}_x \times \hat{\mathbf{e}}_y \sin \theta dx = \hat{\mathbf{e}}_z \sin \theta dx$$

- Il contributo $d\mathbf{B}$ è perpendicolare al piano $x-y$

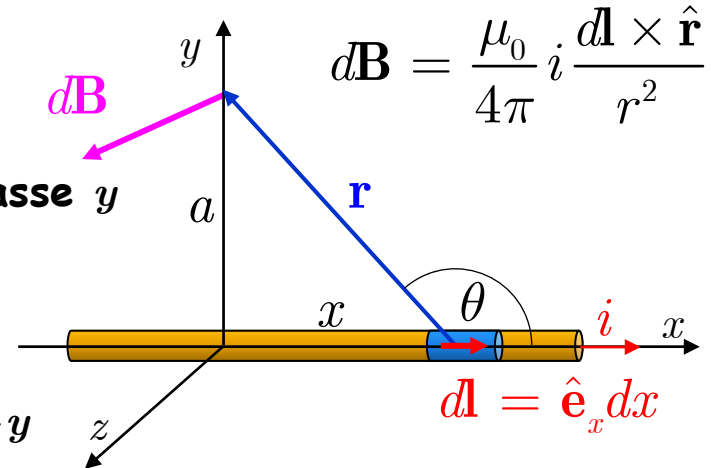
- Abbiamo inoltre

$$a = r \sin(\pi - \theta) = r \sin \theta \quad r = \frac{a}{\sin \theta}$$

$$a = x \operatorname{tg}(\pi - \theta) = -x \operatorname{tg} \theta \quad x = -a \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad dx = a \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\hat{\mathbf{e}}_z \sin \theta dx}{a^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\hat{\mathbf{e}}_z \sin^3 \theta dx}{a^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\hat{\mathbf{e}}_z \sin^3 \theta}{a^2} \frac{a}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\hat{\mathbf{e}}_z \sin \theta}{a} d\theta$$



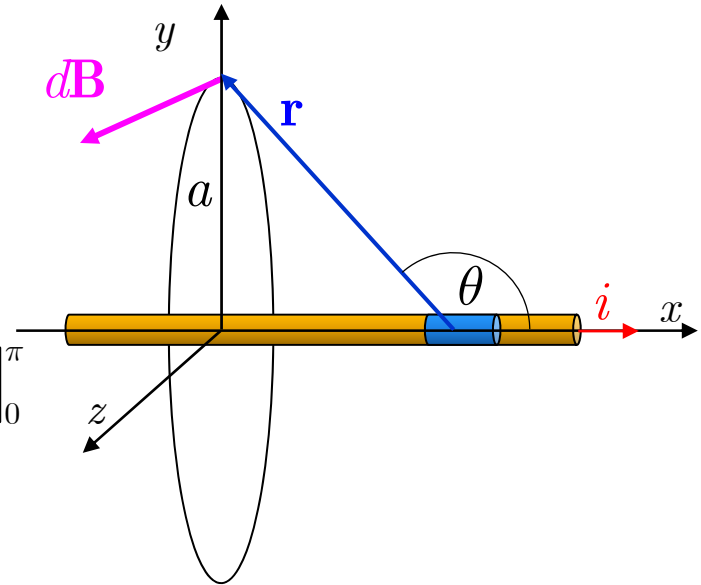
Il campo magnetico di un filo

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\hat{\mathbf{e}}_z \sin \theta}{a} d\theta$$

- Calcoliamo l'integrale su tutto il filo
- Esteso da $\theta = 0$ fino a $\theta = \pi$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\hat{\mathbf{e}}_z}{a} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{\hat{\mathbf{e}}_z}{a} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{\hat{\mathbf{e}}_z}{a}$$



- Osserviamo che il risultato non dipende dalla coordinata x
 - Come ci si poteva aspettare data la simmetria del problema
 - Il campo dipende solo dalla distanza dal filo $a^2 = y^2 + z^2$
 - Il problema è invariante per rotazioni intorno al filo
 - Le linee di campo sono circonferenze centrate sul filo
- In coordinate cilindriche

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{\hat{\mathbf{e}}_\phi}{r}$$

