
Esercitazioni
12 e 13 gennaio

Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

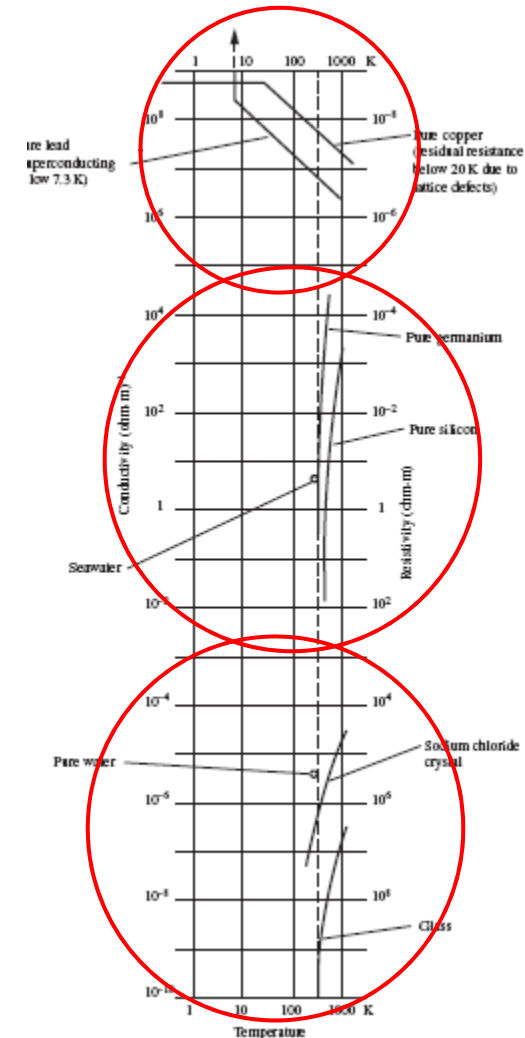
Lezione n. 19 - 21.12.2022

Forza elettromotrice
Batteria ricaricabile

Anno Accademico 2022/2023

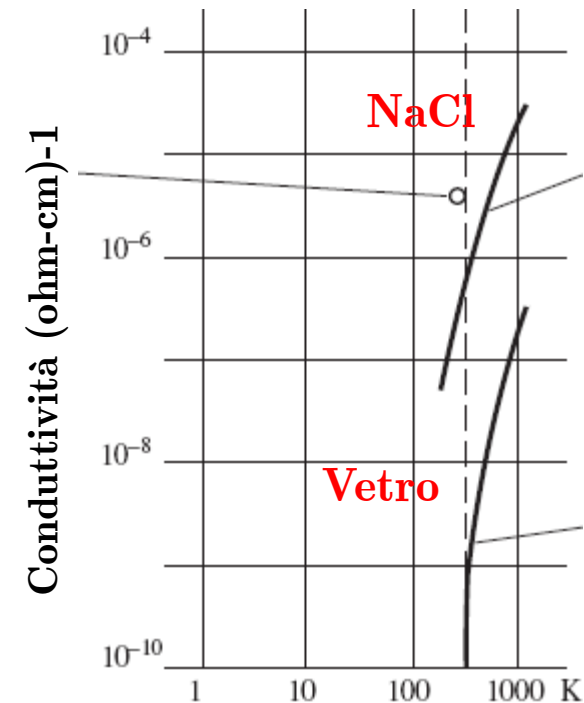
Tipi di materiali

- Discutiamo brevemente le tre classi in cui vengono suddivisi i materiali in base alla loro conduttività
- Il grafico mostra la conduttività in funzione della temperatura per alcuni materiali
- Si notano tre classi di materiali
 - **Gli isolanti**
 - Conduttività inferiore a $10^{-4} \text{ (ohm-cm)}^{-1}$
 - **I semiconduttori**
 - Conduttività compresa fra 10^{-2} e $10^4 \text{ (ohm-cm)}^{-1}$
 - **I conduttori**
 - Conduttività maggiore di $10^6 \text{ (ohm-cm)}^{-1}$
- Per comprendere a fondo le differenze fra i diversi tipi di materiali sarebbe necessaria la teoria quantistica della materia
 - In particolare per i conduttori e i semiconduttori
- Il modello classico sviluppato consentirebbe tuttavia di comprendere alcuni degli aspetti più semplici
 - Vedi ad esempio
 - Purcell E. - Electricity and Magnetism, 3rd ed. - Cambridge University Press 2013



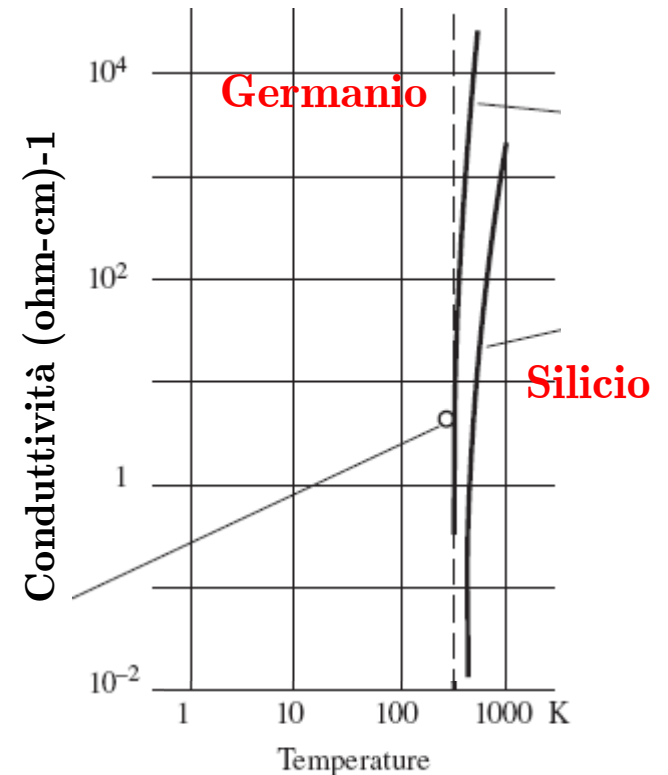
Tipi di materiali: isolanti

- Nella figura è rappresentata la conduttività
 - Del vetro
 - Del cloruro di sodio (NaCl) cristallino
- A temperatura ambiente il vetro è un ottimo isolante
 - Gli ioni non possono muoversi e sono saldamente ancorati alla struttura molecolare del vetro
- Al crescere della temperatura i legami si indeboliscono
 - Un certo numero di ioni (piccolo) può muoversi sotto l'influenza di un campo elettrico
- Per un isolante la conduttività dipende principalmente dal valore della mobilità
 - Il numero dei portatori di carica rimane pressoché costante
- Per il cloruro di sodio NaCl si possono fare considerazioni analoghe



Tipi di materiali: semiconduttori

- Nel grafico sono riportate le conduttività di germanio e silicio
 - Anche in questo caso la conduttività ha una forte dipendenza dalla temperatura
 - Il motivo è diverso da quello degli isolanti
- Nei semiconduttori il numero dei portatori di carica dipende fortemente dalla temperatura
 - Allo zero assoluto non ci sarebbero portatori di carica liberi
 - Sarebbero degli isolanti
- Al crescere della temperatura il numero dei portatori cresce e la conduttività aumenta
- Ci sono portatori di carica negativi (elettroni) e positivi (buche)
 - Hanno circa la stessa massa e mobilità confrontabili

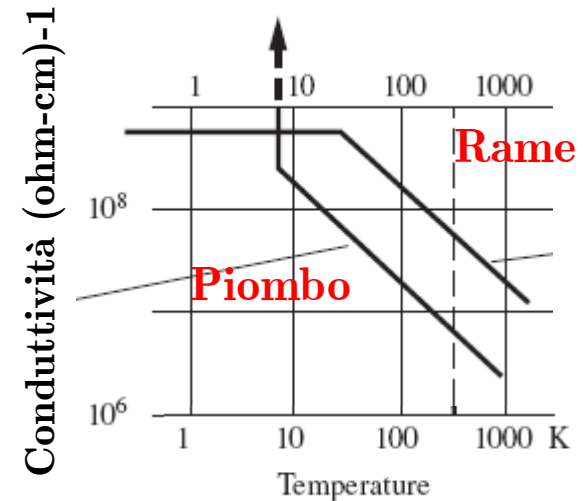


Tipi di materiali: conduttori

- Nel grafico sono riportate le conduttività di rame e piombo
 - Notiamo che la conduttività aumenta al diminuire della temperatura
- Nei conduttori i portatori di carica sono elettroni
 - Il numero degli elettroni è estremamente elevato: nel rame circa $n \sim 8.6 \times 10^{22} \text{ e/cm}^3$
 - La conduttività del rame è $\sigma = 6 \times 10^7 (\Omega\text{-m})^{-1}$
- Nel nostro modello la conduttività è data da

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e} \quad \longrightarrow \quad \tau = \frac{m_e\sigma}{ne^2} \quad \tau \approx 2.5 \times 10^{-14} \text{ s}$$

- Inoltre la velocità termica degli elettroni è $v \sim 10^5 \text{ m/s}$: $v\tau \approx 2.5 \times 10^{-9} \text{ m}$
 - Troppo grande confrontato con il passo reticolare: $l \sim 3.8 \times 10^{-10} \text{ m}$ $l \ll v\tau$
- Per comprendere perché l'elettrone interagisce così poco con il reticolo occorre la meccanica quantistica
 - Quello che rallenta l'elettrone sono le imperfezioni del reticolo
 - Le vibrazioni causano una sorta di imperfezione
 - Questo spiega qualitativamente perché la conduttività aumenta quando la temperatura diminuisce



Dissipazione di energia

- Nel modello di conduzione descritto i portatori di carica guadagnano energia dal campo elettrico e la cedono al mezzo

- In un tempo dt il lavoro fatto su una carica $dq = \rho dV$ è

$$dW = \rho dV \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \rho dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt$$

$$\frac{dW}{dt} = dP = \rho dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$

- La media su tutti i portatori di carica riduce la velocità istantanea $\mathbf{v}$ alla velocità di deriva $\bar{\mathbf{v}}_d$

$$d\bar{P} = \rho dV \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{v}}_d$$

- Infine riconosciamo

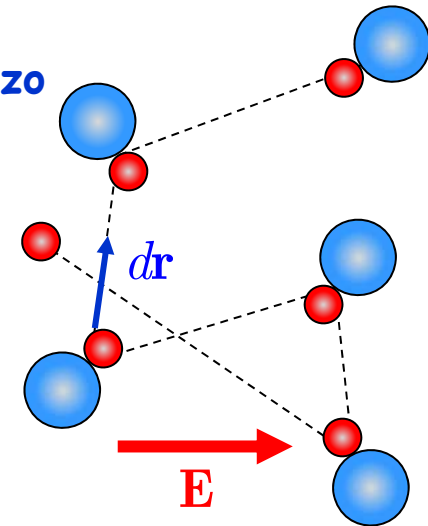
$$\mathbf{J} = \rho \bar{\mathbf{v}}_d$$

- Otteniamo la densità di potenza dissipata nel processo di conduzione

$$\frac{d\bar{P}}{dV} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad \bar{P} = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV$$

- Questo processo di dissipazione prende il nome di Effetto Joule

- Durante la conduzione il conduttore si scalda

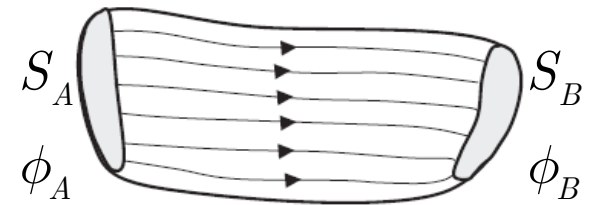


Dissipazione di energia

- Trasformiamo l'espressione trovata in un'altra più conveniente per le applicazioni elettroniche

$$\mathbf{J} \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot (\phi \mathbf{J}) - \phi \nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (\phi \mathbf{J})$$

$$\begin{aligned} P &= \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = - \int_V \mathbf{J} \cdot \nabla \phi dV \\ &= - \int_V \nabla \cdot (\phi \mathbf{J}) dV \end{aligned}$$



- Consideriamo un conduttore e applichiamo il teorema della divergenza

$$P = - \int_V \nabla \cdot (\phi \mathbf{J}) dV = - \oint_S \phi \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$$

- Osserviamo che ϕ è costante sugli elettrodi (di area S_A e S_B)
- Inoltre $\mathbf{E}$ e $\mathbf{J}$ sono perpendicolari agli elettrodi
- Infine $\mathbf{J}$ è tangente alla superficie laterale
- Pertanto contribuiscono all'integrale solo le superfici degli elettrodi S_A e S_B

$$\oint_S \phi \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = -\phi_A J_A S_A + \phi_B J_B S_B = -I(\phi_A - \phi_B) \quad J_A S_A = J_B S_B = I$$

- Concludendo
- In una resistenza

$$P = I(\phi_A - \phi_B) = IV$$

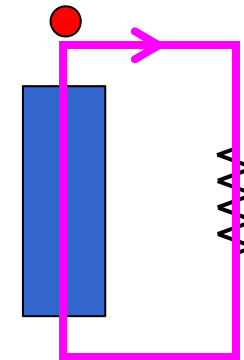
$$V = RI$$

$$P = RI^2$$

$$P = \frac{V^2}{R}$$

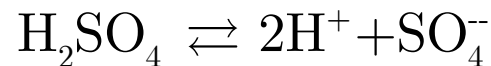
Forza elettromotrice

- Veniamo adesso al problema che abbiamo a lungo rinviato
 - Come si mantiene la corrente elettrica?
- Abbiamo appena visto che una corrente elettrica dissipa energia in un conduttore
 - Chi fornisce l'energia dissipata?
- Vediamo meglio dove sta il problema
 - Supponiamo di avere un generatore e una resistenza
 - Anche se non sappiamo ancora come funziona
- Per effetto del generatore la carica compie un percorso chiuso
 - L'energia dissipata deve provenire dal lavoro fatto sulla carica
- Supponiamo che la forza che agisce sulla carica sia solamente $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$
 - Il lavoro fatto nel percorso chiuso sarebbe $W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$
 - Ma il campo $\mathbf{E}$ è conservativo
- Pertanto ci deve essere un'altra forza oltre alla forza elettrica $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \mathbf{F}_{\text{em}}$
 - Una forza che mantiene le cariche in moto e fornisce continuamente energia $W = \oint \mathbf{F}_{\text{em}} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$
 - Una forza con queste caratteristiche si chiama Forza Elettromotrice

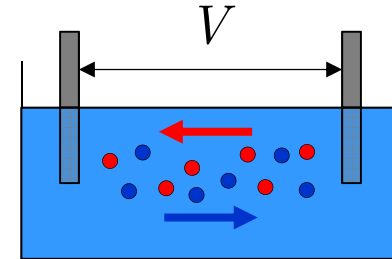


Cella elettrolitica

- Consideriamo un recipiente contenente acqua
 - Abbiamo detto che l'acqua pura ha un numero piccolo di molecole dissociate → bassa conduttività
 - L'aggiunta di un sale o di un acido aumenta di molto il numero di ioni presenti nell'acqua
 - Ad esempio aggiungendo acido solforico H_2SO_4

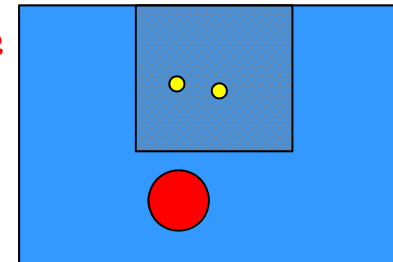
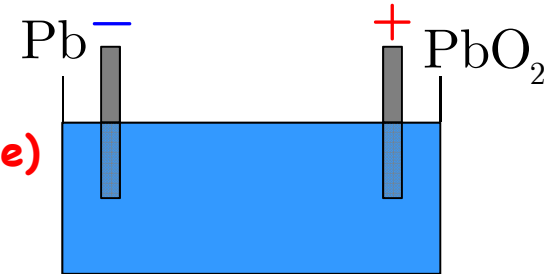


- La soluzione rimane comunque neutra
- Se aggiungiamo due elettrodi e stabiliamo fra di essi una differenza di potenziale nella soluzione si stabilisce una corrente
 - Gli ioni e gli elettroni sono i portatori di carica
 - Le loro densità e mobilità determinano la conduttività della soluzione
 - Il dispositivo così realizzato prende il nome di cella elettrolitica
 - La soluzione prende il nome di soluzione elettrolitica
 - La sostanza disciolta in soluzione prende il nome di elettrolita
- Il materiale di cui sono composti gli elettrodi è importante
 - Può causare comportamenti diversi della cella elettrolitica
 - In particolare la cella può comportarsi come una pila (generatore di forza elettromotrice)



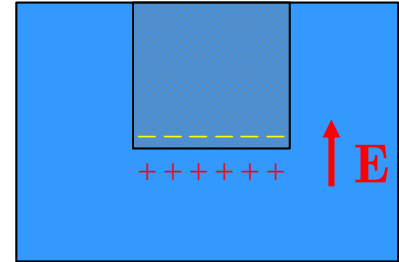
Batteria ricaricabile

- Descriviamo una pila reversibile a base di piombo
 - Reversibile significa che può essere ricaricata
 - È utilizzata nelle automobili, nelle moto (accumulatore)
- La cella elettrolitica è una soluzione di H_2SO_4 in acqua
- I due elettrodi sono
 - Uno fatto di piombo puro (Pb), l'elettrodo negativo
 - Uno fatto di biossido di piombo (PbO_2), l'elettrodo positivo
- Esaminiamo quello che avviene nell'elettrodo di piombo
 - In particolare nella regione a contatto con la soluzione
 - Un certo numero di atomi di Pb metallico dello elettrodo perde 2 elettroni e passa alla soluzione
 - Nella soluzione lo ione piombo Pb^{++} si combina con lo ione SO_4^{--} formando PbSO_4
 - Complessivamente $\text{Pb} + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{PbSO}_4 + 2\text{H}^+ + 2\text{e}^-$
 - Combinandosi con SO_4^{--} il Pb^{++} in soluzione lascia due ioni H^+ non neutralizzati
 - Questa reazione avviene perché energeticamente favorita
 - Il Pb in soluzione ha un'energia inferiore a quella del Pb nel metallo
 - Complessivamente due elettroni sono nell'elettrodo e due ioni positivi H^+ sono nella soluzione
 - Elettrodo e soluzione non sono più neutri, si sono caricati



Batteria ricaricabile

- Pertanto l'elettrodo Pb si carica negativamente
 - Gli ioni H^+ si dispongono molto vicini alla superficie dell'elettrodo
 - Si forma il cosiddetto doppio strato
 - Osserviamo che i due strati di carica generano un campo elettrico (elettrostatico)
 - Per passare in soluzione lo ione Pb^{++} deve vincere la forza del campo elettrico che lo spingerebbe a rimanere dentro l'elettrodo
 - L'energia che lo ione Pb^{++} perde passando in soluzione è maggiore di quella che guadagnerebbe spostandosi in direzione opposta campo elettrico

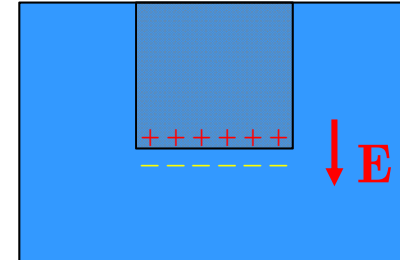
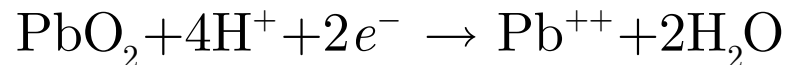


Questa è l'origine della forza elettromotrice

- Naturalmente man mano che il piombo va in soluzione la carica del doppio strato aumenta
 - Ad un certo punto il campo elettrico è diventato così intenso che il passaggio di ioni Pb^{++} alla soluzione si arresta
 - L'energia che lo ione di piombo perderebbe passando in soluzione è diventata minore di quella che guadagnerebbe spostandosi in direzione opposta campo elettrico
- Il sistema elettrodo-soluzione ha raggiunto l'equilibrio
 - C'è una differenza di potenziale fra l'elettrodo e la soluzione

Batteria ricaricabile

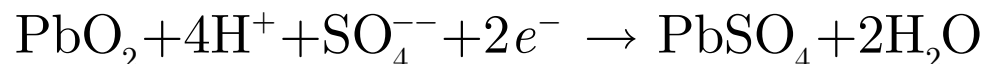
- All'elettrodo positivo (PbO_2) hanno luogo reazioni simili[†]
 - In particolare il piombo tetraivalente del PbO_2 si riduce a piombo bivalente



- Anche in questo caso avviene la reazione energeticamente favorita
- Questa reazione "consuma" elettroni del metallo
 - L'elettrodo si carica positivamente
- Vengono attratti ioni negativi nella soluzione
 - Si forma un doppio strato
- Gli ioni H^+ che hanno ridotto il Pb tetraivalente hanno attraversato il doppio strato contro il campo elettrico
 - Ancora una volta è comparsa una forza elettromotrice
- Per finire il piombo bivalente si combina con gli ioni solfato formando un sale che precipita



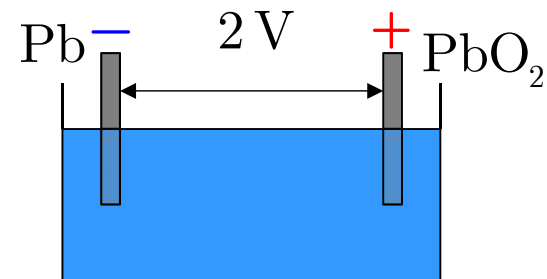
- Complessivamente al catodo è avvenuta la seguente reazione



- [†]Barak M. ed. – Electrochemical Power Sources -The Institution of Engineering and Technology (1980) p. 188

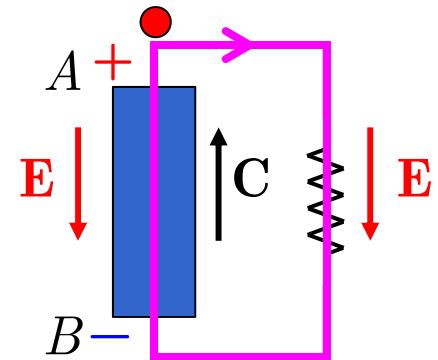
Batteria ricaricabile

- Anche all'elettrodo positivo si raggiunge una condizione di equilibrio
 - Il campo elettrico del doppio strato diventa molto intenso e il passaggio di ioni H^+ all'elettrodo PbO_2 richiederebbe un'energia maggiore di quella guadagnata dalla riduzione del Pb tetravalente
- In queste condizioni fra gli elettrodi della batteria c'è una differenza di potenziale di circa 2 V
 - Se adesso colleghiamo una resistenza fra gli elettrodi comincia a scorrere una corrente
 - Dall'elettrodo positivo a quello negativo
 - Gli elettroni passano dall'elettrodo Pb al PbO_2
 - I campi elettrici dei due doppi strati si indeboliscono
 - Le reazioni riprendono
 - La batteria mantiene la corrente e cede energia al sistema esterno
- Durante il funzionamento la batteria consuma Pb metallico e biossido PbO_2
- Questo processo può essere invertito
 - Se si collega un generatore agli elettrodi con una forza elettromotrice maggiore di quella della batteria tutte le reazioni hanno luogo in senso inverso
 - La batteria si ricarica



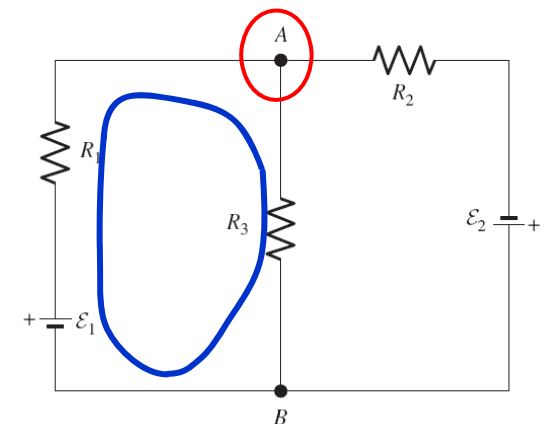
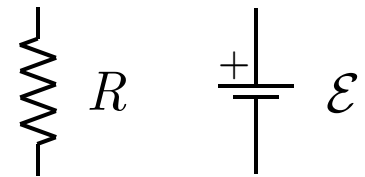
Forza elettromotrice

- Abbiamo descritto un generatore di forza elettromotrice
 - Nella batteria descritta ci sono portatori di carica che si muovono nella direzione opposta a quella che sarebbe determinata dal campo elettrico
 - La reazione chimica rende questo passaggio conveniente energeticamente
 - Possiamo schematizzare l'aumento di energia come il lavoro fatto da un campo che chiamiamo campo elettromotore $C_\mathcal{E}$
 - Ritorniamo alla nostra schematizzazione di generatore
 - Indichiamo i poli positivo e negativo
 - Il campo elettrico è diretto come in figura
 - Calcoliamo il lavoro fatto sulla carica in un ciclo
 - La forza che agisce sulla carica è
 - Nel circuito esterno al generatore $F = qE$
 - Dentro il generatore $F = qE + qC_\mathcal{E}$
- $$W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + q \int_B^A (\mathbf{E} + \mathbf{C}_\mathcal{E}) \cdot d\mathbf{l}$$
- $$= \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + q \int_B^A \mathbf{C}_\mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = q \int_B^A \mathbf{C}_\mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} \equiv q\mathcal{E}$$
- La grandezza $\mathcal{E}$ prende il nome di forza elettromotrice della batteria
 - È simile a un potenziale; si misura in Volt



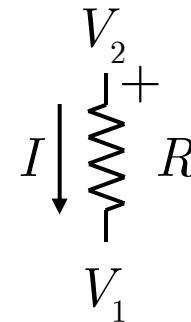
Circuiti elettrici

- Nell'elettronica si utilizzano conduttori che hanno una resistenza ben determinata
 - Le resistenze o resistori
 - Chiamiamo circuito elettrico un sistema in cui più resistori e generatori di forza elettromotrice sono collegati insieme
 - In futuro introdurremo anche altri elementi di circuito come condensatori e induttori
- Le resistenze e i generatori di forza elettromotrice sono rappresentati mediante i seguenti simboli
 - Sottolineiamo che si tratta di elementi con due terminali
 - La corrente che entra da un terminale esce dall'altro
- La figura mostra un esempio di circuito
 - In un circuito si definiscono due strutture importanti
 - Il nodo: un punto nel quale sono collegati più elementi del circuito
 - La maglia: una successione di elementi del circuito connessi fra di loro e che realizzano un cammino chiuso

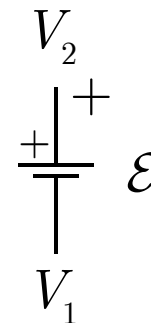


Circuiti elettrici

- Introduciamo le relazioni Volt-Ampere
 - Un elemento di circuito stabilisce una relazione fra la differenza di potenziale fra i suoi terminali e la corrente che passa attraverso l'elemento stesso
 - Per il resistore è la legge di Ohm
 - Occorre fissare delle convenzioni
 - Si indica, arbitrariamente, con + il terminale che ha un potenziale "più elevato"
 - La tensione V del resistore è $V = V_2 - V_1$
 - Si considera positiva la corrente che entra nel terminale definito +
 - Con queste convenzioni si ha
- Nel caso del generatore la relazione è estremamente semplice
 - Si indica con + il terminale positivo del generatore
 - La tensione V del generatore è $V = V_2 - V_1$
 - Un generatore di tensione ideale mantiene la tensione data fra i suoi terminali quale che sia la corrente che lo attraversa



$$V = RI$$



$$V = \mathcal{E}$$

Circuiti elettrici

- Veniamo adesso a due importanti leggi che governano il comportamento dei circuiti

- Le leggi di Kirchhoff per le maglie e per i nodi

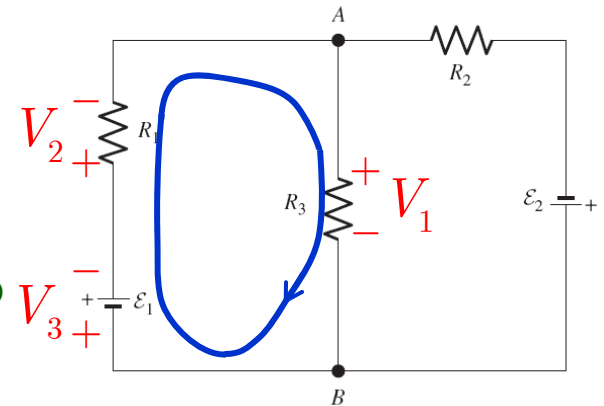
- La legge per le maglie

- Fissiamo un senso di percorrenza della maglia

- Misuriamo le tensioni V_k sugli elementi di circuito della maglia considerando positive le tensioni sui terminali in cui "si entra"

- La legge di Kirchhoff per le maglie afferma:

La somma delle differenze di potenziale V_k ai capi degli elementi è uguale alla somma delle forze elettromotrici presenti nella maglia



$$\sum_k V_k = \sum_l \mathcal{E}_l$$

$$V_1 + V_2 = \mathcal{E}_1$$

- È legata alla natura conservativa del campo elettrico e alla definizione di campo elettromotore[†]

- Un modo equivalente (più semplice) di enunciare la legge è che la somma di TUTTE le differenze di potenziale degli elementi del circuito è nulla

$$\sum_k V_k = 0$$

$$V_1 + V_2 - \mathcal{E}_1 = 0$$

- Si misura anche la ddp ai capi delle fem secondo la convenzione

- [†]Si veda ad esempio Reitz J., Milford M. - Foundations of electromagnetic theory – Addison Wesley 1960 § 7.5

Circuiti elettrici

- La legge di Kirchhoff per i nodi

- Definiti i sensi positivi delle correnti del nodo

- La legge di Kirchhoff per i nodi afferma:

La somma algebrica delle correnti
ENTRANTI (o USCENTI) nel nodo
è nulla

$$\sum_k I_k = 0$$

- Alternativamente: la somma delle correnti entranti è uguale alla somma delle correnti uscenti

- È una conseguenza dell'equazione di continuità

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = -\frac{dQ}{dt}$$

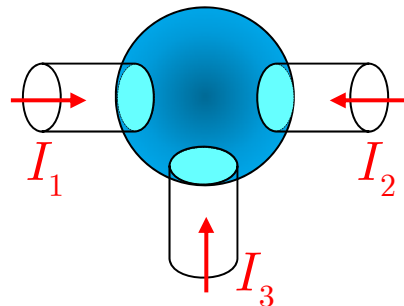
- In condizione stazionaria $dQ/dt = 0$

- Consideriamo in dettaglio il nodo

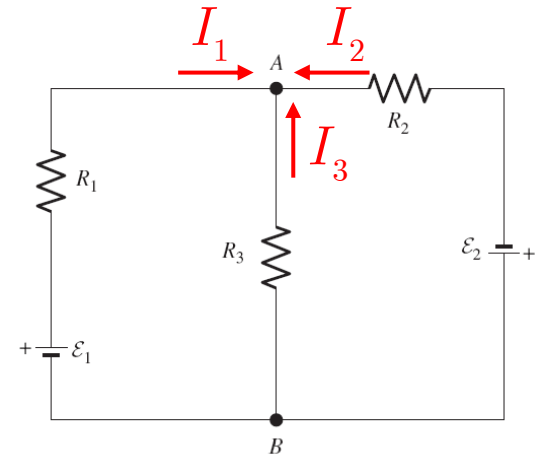
- La densità di corrente $\mathbf{J}$ è nulla escluso nelle basi dei cilindri (evidenziate in azzurro chiaro)

- Il flusso attraverso la sfera è uguale alla somma dei flussi di $\mathbf{J}$ attraverso le superfici evidenziate è la somma delle correnti che escono dal nodo

$$\int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 0 \quad \longrightarrow \quad -I_1 - I_2 - I_3 = 0$$



$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$



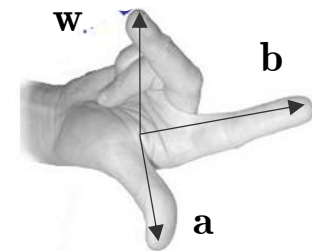
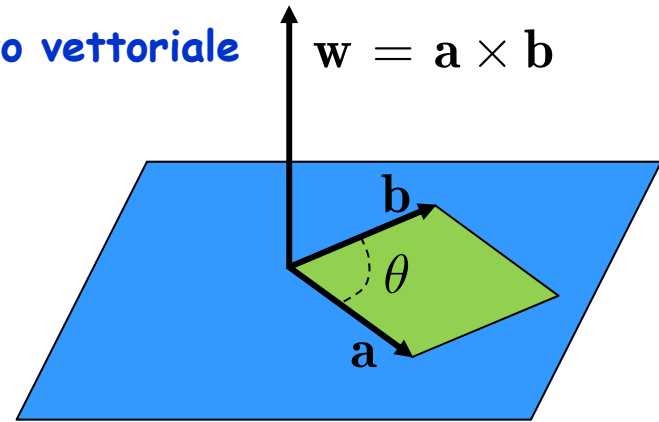
Prodotto vettoriale

- Richiamiamo le definizioni (equivalenti) di prodotto vettoriale

- In inglese cross product
- Si usa anche la notazione $w = a \wedge b$

- Definizione 1

- Un vettore perpendicolare al piano determinato da a e b
- Verso determinato con la mano destra
- Il modulo del vettore è $a b \sin\theta$
- È l'area del parallelogramma che ha come lati a e b



- Definizione 2

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{e}}_x (a_y b_z - a_z b_y) + \hat{\mathbf{e}}_y (a_z b_x - a_x b_z) + \hat{\mathbf{e}}_z (a_x b_y - a_y b_x)$$

- Definizione 3 (tensore di Levi Civita)

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_j b_k \quad \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i, j, k) \text{ è } (1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1) \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \text{ è } (2, 1, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1) \\ 0 & \text{altrimenti (2 o 3 indici uguali)} \end{cases}$$

- Sintetizzabile in $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$

Prodotto vettoriale

- Come primo esempio, calcoliamo la componente x ($i = 1$) utilizzando il tensore di Levi Civita

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_1 = \sum_{jk=1}^3 \varepsilon_{1jk} a_j b_k \quad \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i, j, k) \text{ è } (1, 2, 3) (3, 1, 2) (2, 3, 1) \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \text{ è } (2, 1, 3) (1, 3, 2) (3, 2, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \quad \text{2 o 3 indici uguali} \end{cases}$$

ε_{1jk}	$j \setminus k$	1	2	3
	1	0	0	0
	2	0	0	+1
	3	0	-1	0

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_1 = \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 = +a_2 b_3 - a_3 b_2 = +a_y b_z - a_z b_y$$

Prodotto vettoriale

- **Altro esempio**

- **Troviamo delle identità per il prodotto triplo $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$**
- **Ricordiamo il prodotto scalare di due vettori**

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$$

- **Il prodotto triplo è pertanto**

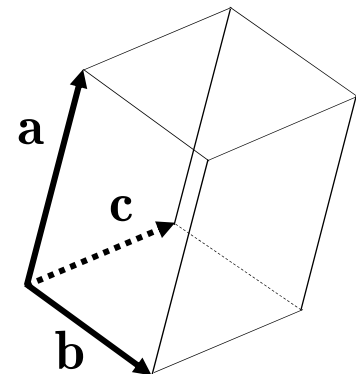
$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \sum_{i=1}^3 a_i \sum_{jk=1}^3 \varepsilon_{ijk} b_j c_k = \sum_{ijk=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = - \sum_{ijk=1}^3 \varepsilon_{jik} a_i b_j c_k = - \sum_{ijk=1}^3 \varepsilon_{jik} b_j a_i c_k \\ &= - \sum_{j=1}^3 b_j \sum_{ik=1}^3 \varepsilon_{jik} a_i c_k = - \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \end{aligned}$$

- **Esercizio**

- **Provare l'identità $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$**
- **Inoltre, dalla definizione di determinante, segue**

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Infine notiamo che è il volume del parallelepipedo



Rotore di un campo vettoriale

- Nello studio dell'elettrostatica abbiamo incontrato la legge di Gauss

- Inizialmente enunciata in forma integrale

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

- Successivamente in forma differenziale

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- La forma differenziale evidenzia proprietà locali del campo elettrico

- $\nabla \cdot \mathbf{E}$ è una funzione del punto $\mathbf{r}$

- Abbiamo inoltre espresso la proprietà del campo elettrostatico di essere conservativo utilizzando ancora una volta una legge integrale

- La circuitazione del campo elettrico è nulla

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

- Abbiamo finora evitato di introdurre la forma differenziale della legge sulla circuitazione per non complicare la trattazione dell'elettrostatica

- Tuttavia questo non è conveniente per gli sviluppi ulteriori dell'elettromagnetismo

Rotore di un campo vettoriale

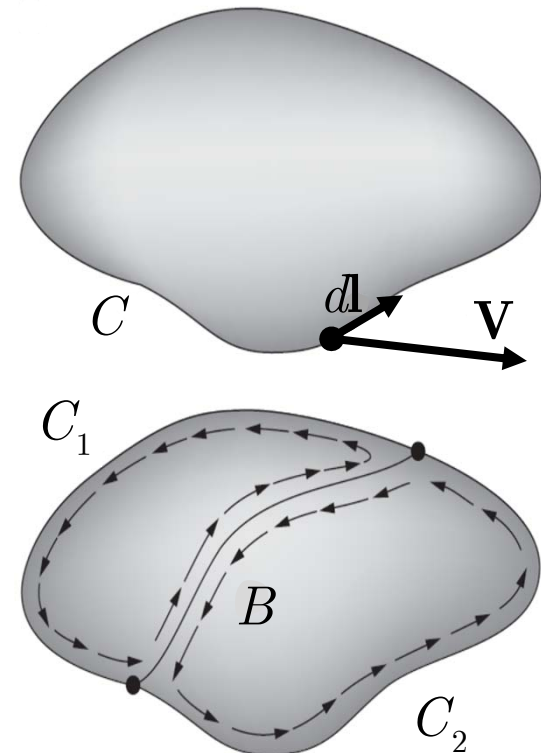
- Ricordiamo la procedura seguita nel caso della legge di Gauss
 - Avevamo espresso il flusso attraverso una superficie come la somma di tanti flussi attraverso superfici sempre più piccole
 - Al limite infinite superfici infinitesime
 - Avevamo poi definito la divergenza come limite del rapporto fra il flusso e il volume racchiuso
- Analogamente consideriamo la circuitazione di un campo vettoriale $\mathbf{V}$ lungo una curva chiusa C

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$$

- Otteniamo lo stesso risultato se sommiamo due circuitazioni lungo i cammini C_1 e C_2
 - Notiamo che gli integrali lungo la regione di confine fra C_1 e C_2 (linea B) si elidono
 - Sono percorsi in senso inverso
 - Rimangono i contributi del resto dei cammini

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \oint_{C_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{C_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \Gamma$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{\Phi_i}{V_i}$$



Rotore di un campo vettoriale

- Il processo appena descritto può essere ripetuto

$$\Gamma_i = \oint_{C_i} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$$

- Sommando su tutti i cammini rimane solo il contributo del cammino originale (esterno)

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i \quad \Gamma = \oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$$

- Al crescere del numero delle suddivisioni il valore delle circuitazioni Γ_i diventa sempre più piccolo: $\Gamma_i \rightarrow 0$

- Nel caso della legge di Gauss avevamo definito una proprietà differenziale del campo legata alla legge del flusso calcolando il limite del rapporto fra il flusso Φ_i e il volume V_i con $\Phi_i, V_i \rightarrow 0$

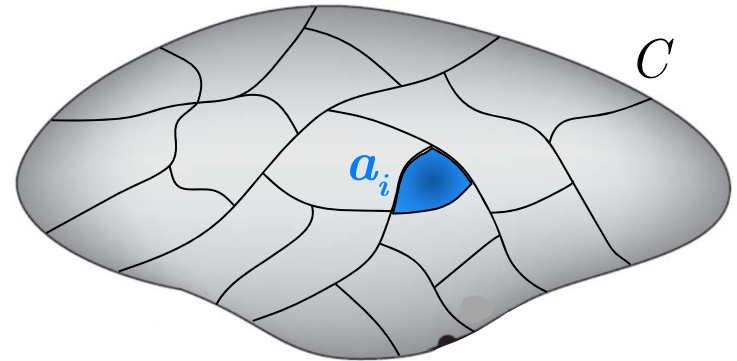
- Il limite del rapporto esisteva e definiva la divergenza del campo

$$\text{div } \mathbf{E} = \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{\Phi_i}{V_i}$$

- Analogamente possiamo trovare una proprietà differenziale del campo legata alla legge della circuitazione calcolando il limite del rapporto fra le circuitazioni Γ_i e le superfici a_i

$$\lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{a_i}$$

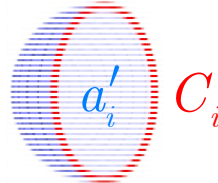
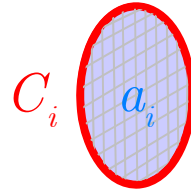
- Tuttavia ci sono importanti differenze



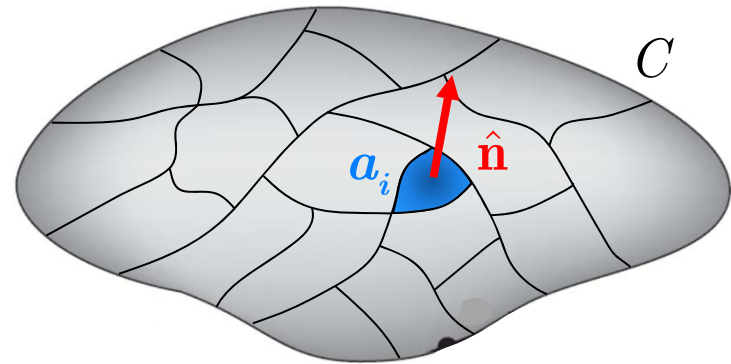
Rotore di un campo vettoriale

- Esaminiamo le differenze

- La superficie a_i è connessa al cammino C_i in modo ambiguo
- Ad esempio le due superfici di seguito hanno lo stesso contorno C_i ma hanno differenti valori a_i e a'_i



C_i non individua l'area a_i in modo univoco



- Il limite del rapporto Γ_i/a_i dipende dalla forma della superficie
- Si può ovviare a questa ambiguità utilizzando la normale $\hat{n}$ alla superficie
- Se si fa tendere a zero la superficie mantenendo fissa la direzione $\hat{n}$ della normale si dimostra che il limite esiste ed è univoco
 - È un limite diverso per ogni direzione
 - In conclusione la grandezza che stiamo definendo è un vettore
 - Mantenere fissa la direzione della normale equivale a dire che si sta calcolando la componente del vettore nella direzione di $\hat{n}$

- Il limite (vettoriale) definisce il rotore del campo vettoriale $\mathbf{V}$

$$\hat{n} \cdot \text{rot} \mathbf{V} = \lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{a_i}$$

In inglese $\text{curl } \mathbf{V}$
To curl = arrotolare

Rotore di un campo vettoriale

- Notiamo che la grandezza che abbiamo definito è una funzione vettoriale del punto $\mathbf{r}$

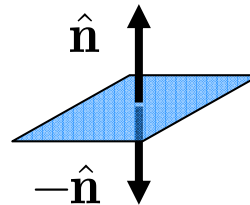
$$\Gamma_i = \oint_{C_i} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \text{rot} \mathbf{V} = \lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\Gamma_i}{a_i}$$


$$\text{rot} \mathbf{V} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

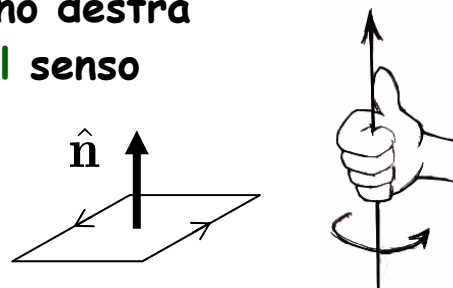
- Inoltre dobbiamo anche risolvere altre due ambiguità
 - Un cammino può essere percorso in due sensi



- La normale alla superficie può avere due versi



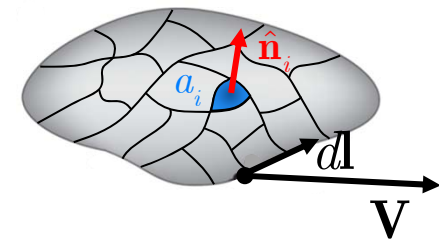
- Si usa la convenzione della mano destra
 - Lega il verso della normale al senso di percorrenza del cammino



Teorema di Stokes

- Il teorema di Stokes lega il flusso del rotore di un campo vettoriale $\mathbf{V}$ attraverso una superficie alla circuitazione del campo vettoriale $\mathbf{V}$
- È analogo al teorema di Gauss che lega l'integrale di volume della divergenza di un campo vettoriale $\mathbf{V}$ al flusso del vettore $\mathbf{V}$
- Consideriamo la circuitazione del campo $\mathbf{V}$

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^N \Gamma_i = \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i}{a_i} a_i$$



- Per N sufficientemente grande

$$\frac{\Gamma_i}{a_i} \rightarrow \hat{\mathbf{n}}_i \cdot (\text{rot } \mathbf{V})_{\mathbf{r}_i}$$

- Sostituendo

$$\Gamma = \sum_{i=1}^N \hat{\mathbf{n}}_i \cdot (\text{rot } \mathbf{V})_{\mathbf{r}_i} a_i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_S \text{rot } \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

- Otteniamo pertanto il teorema di Stokes

$$\oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

La superficie S è arbitraria
ma è delimitata da C