Elettromagnetismo

Esercitazioni
12 e 13 gennaio

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

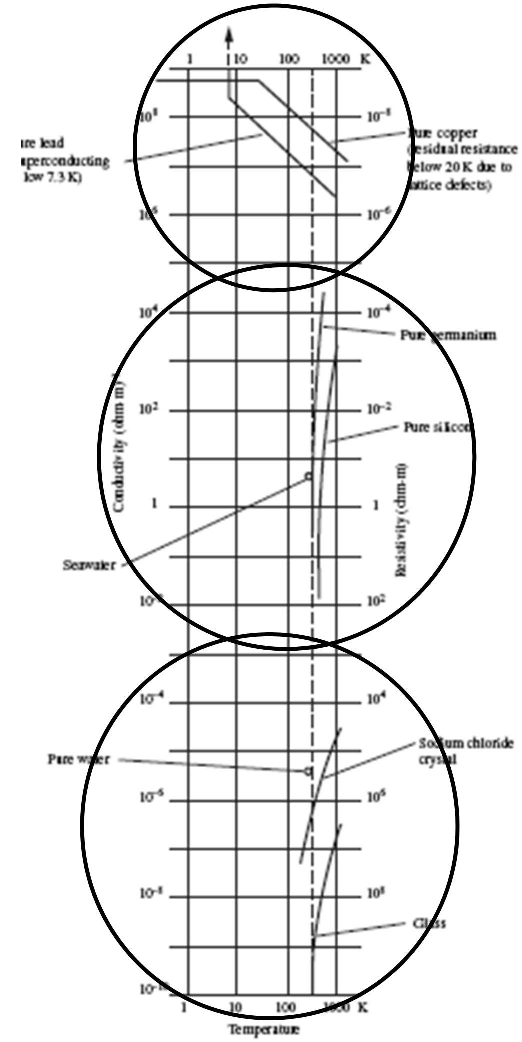
Lezione n. 19 – 21.12.2022

Forza elettromotrice
Batteria ricaricabile

Anno Accademico 2022/2023

Tipi di materiali

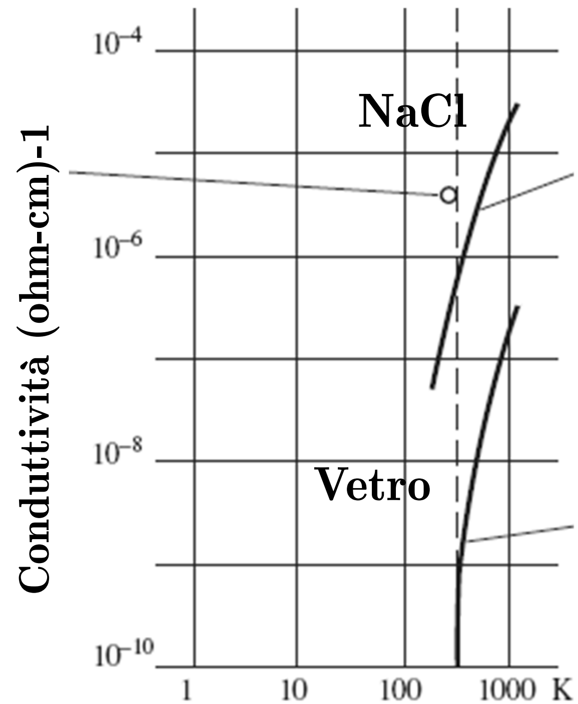
- Discutiamo brevemente le tre classi in cui vengono suddivisi i materiali in base alla loro conduttività
- Il grafico mostra la conduttiva in funzione della temperatura per alcuni materiali
- Si notano tre classi di materiali
  - Gli isolanti
    - Conduttività inferiore a 10^{-4} $(\mathrm{ohm\text{-}cm})^{-1}$
  - I semiconduttori
    - Conduttività compresa fra 10^{-2} e 10^{4} $(\mathrm{ohm\text{-}cm})^{-1}$
  - I conduttori
    - Conduttività maggiore di 10^{6} $(\mathrm{ohm\text{-}cm})^{-1}$
- Per comprendere a fondo le differenze fra i diversi tipi di materiali sarebbe necessaria la teoria quantistica della materia
  - In particolare per i conduttori e i semiconduttori



- Il modello classico sviluppato consentirebbe tuttavia di comprendere alcuni degli aspetti più semplici
  - Vedi ad esempio
    - Purcell E. - Electricity and Magnetism, 3rd ed. - Cambridge University Press 2013

Tipi di materiali: isolanti

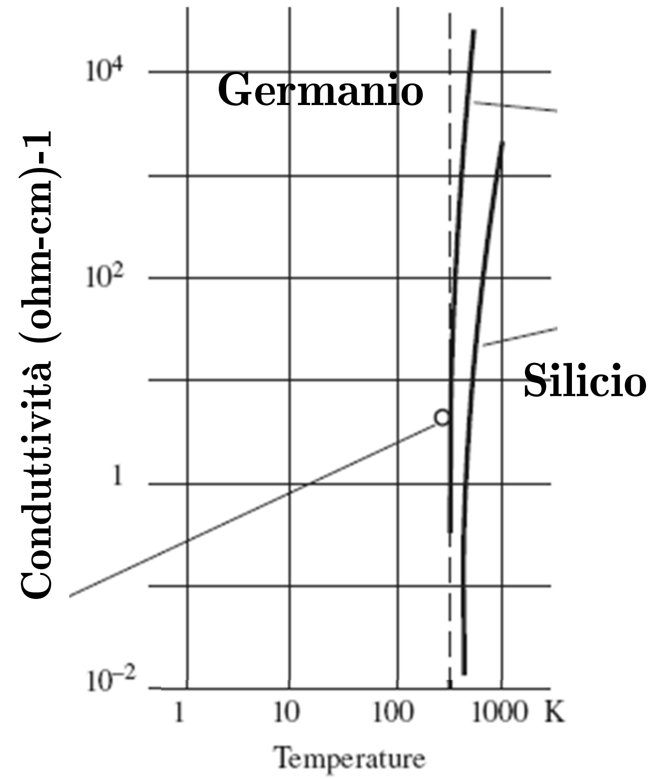
- Nella figura è rappresentata la conduttività
  - Del vetro
  - Del cloruro di sodio (NaCl) cristallino



- A temperatura ambiente il vetro è un ottimo isolante
  - Gli ioni non possono muoversi e sono saldamente ancorati alla struttura molecolare del vetro
- Al crescere della temperatura i legami si indeboliscono
  - Un certo di numero di ioni (piccolo) può muoversi sotto l'influenza di un campo elettrico
- Per un isolante la conduttività dipende principalmente dal valore della mobilità
  - Il numero dei portatori di carica rimane pressoché costante
- Per il cloruro di sodio NaCl si possono fare considerazioni analoghe

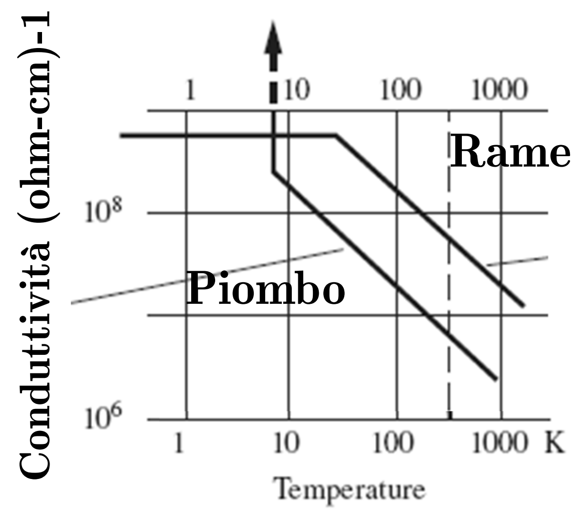
Tipi di materiali: semiconduttori

- Nel grafico sono riportate le conduttività di germanio e silicio
  - Anche in questo caso la conduttività ha una forte dipendenza dalla temperatura
    - Il motivo è diverso da quello degli isolanti



- Nei semiconduttori il numero dei portatori di carica dipende fortemente dalla temperatura
  - Allo zero assoluto non ci sarebbero portatori di carica liberi
    - Sarebbero degli isolanti
  - Al crescere della temperatura il numero dei portatori cresce e la conduttività aumenta
- Ci sono portatori di carica negativi (elettroni) e positivi (buche)
  - Hanno circa la stessa massa e mobilità confrontabili

Tipi di materiali: conduttori



- Nel grafico sono riportate le conduttività di rame e piombo
  - Notiamo che la conduttività aumenta al diminuire della temperatura
- Nei conduttori i portatori di carica sono elettroni
  - Il numero degli elettroni è estremamente elevato: nel rame circa $n \sim 8.6\times10^{22}\ e/\mathrm{cm}^3$
    - La conduttività del rame è $\sigma = 6\times10^{7}\ (\Omega\text{-m})^{-1}$
  - Nel nostro modello la conduttività è data da

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e} \Longrightarrow \tau = \frac{m_e\sigma}{ne^2} \qquad \tau \approx 2.5\times10^{-14}\,\mathrm{s}$$

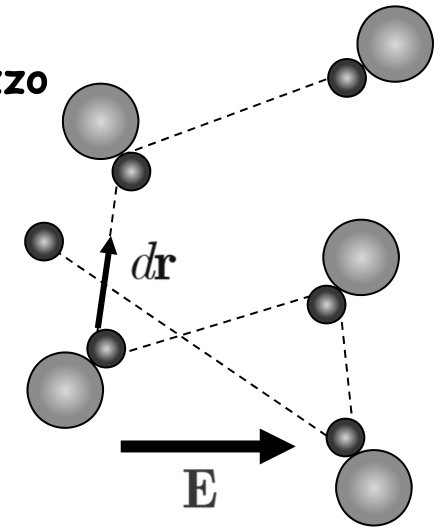
  - Inoltre la velocità termica degli elettroni è $v \sim 10^5$ m/s: $v\tau \approx 2.5\times10^{-9}\,\mathrm{m}$
    - Troppo grande confrontato con il passo reticolare: $l \sim 3.8\ \times10^{-10}\ \mathrm{m}\tau$ $\boxed{l \ll v\tau}$
- Per comprendere perché l'elettrone interagisce così poco con il reticolo occorre la meccanica quantistica
  - Quello che rallenta l'elettrone sono le imperfezioni del reticolo
    - Le vibrazioni causano una sorta di imperfezione
    - Questo spiega qualitativamente perché la conduttività aumenta quando la temperatura diminuisce

Dissipazione di energia

- **Nel modello di conduzione descritto i portatori di carica guadagnano energia dal campo elettrico e la cedono al mezzo**
  - **In un tempo dt il lavoro fatto su una carica $dq = \rho dV$ è**

$$dW = \rho dV \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \rho dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}\, dt$$

$$\frac{dW}{dt} = dP = \rho dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}$$



  - **La media su tutti i portatori di carica riduce la velocità istantanea $\mathbf{v}$ alla velocità di deriva $\overline{\mathbf{v}}_d$**

$$d\overline{P} = \rho dV\, \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{v}}_d$$

  - **Infine riconosciamo**

$$\mathbf{J} = \rho \overline{\mathbf{v}}_d$$

  - **Otteniamo la densità di potenza dissipata nel processo di conduzione**

$$\frac{d\overline{P}}{dV} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \qquad \overline{P} = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}\, dV$$

- **Questo processo di dissipazione prende il nome di Effetto Joule**
  - **Durante la conduzione il conduttore si scalda**

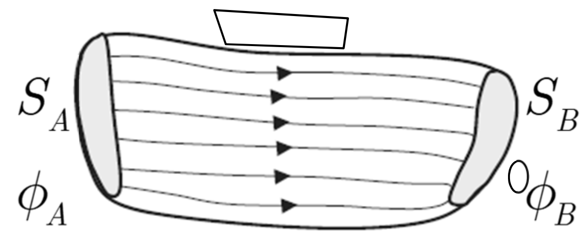
Dissipazione di energia

- **Trasformiamo l'espressione trovata in un'altra più conveniente per le applicazioni elettroniche**

$$\mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi\mathbf{J}) - \phi\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi\mathbf{J})$$

$$P = \int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,dV = -\int_V \mathbf{J}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi\,dV$$

$$= -\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi\mathbf{J})\,dV$$



- **Consideriamo un conduttore e applichiamo il teorema della divergenza**

$$P = -\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi\mathbf{J})\,dV = -\oint_S \phi\mathbf{J}\cdot d\mathbf{a}$$

  - **Osserviamo che ϕ è costante sugli elettrodi (di area S_A e S_B)**
  - **Inoltre $\mathbf{E}$ e $\mathbf{J}$ sono perpendicolari agli elettrodi**
  - **Infine $\mathbf{J}$ è tangente alla superficie laterale**
- **Pertanto contribuiscono all'integrale solo le superfici degli elettrodi S_A e S_B**

$$\oint_S \phi\mathbf{J}\cdot d\mathbf{a} = -\phi_A J_A S_A + \phi_B J_B S_B = -I(\phi_A - \phi_B) \qquad J_A S_A = J_B S_B = I$$

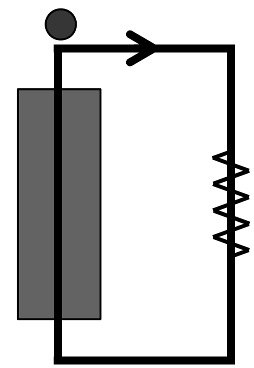
- **Concludendo**

$$P = I(\phi_A - \phi_B) = IV$$

- **In una resistenza**

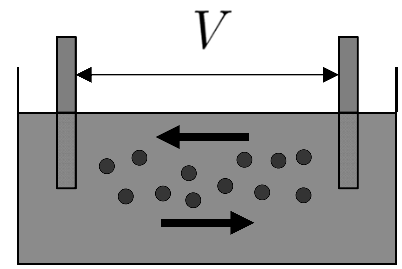
$$V = RI \qquad P = RI^2 \qquad P = \frac{V^2}{R}$$

Forza elettromotrice



- Veniamo adesso al problema che abbiamo a lungo rinviato
  - Come si mantiene la corrente elettrica?
- Abbiamo appena visto che una corrente elettrica dissipa energia in un conduttore
  - Chi fornisce l'energia dissipata?
- Vediamo meglio dove sta il problema
  - Supponiamo di avere un generatore e una resistenza
    - Anche se non sappiamo ancora come funziona
- Per effetto del generatore la carica compie un percorso chiuso
  - L'energia dissipata deve provenire dal lavoro fatto sulla carica
  - Supponiamo che la forza che agisce sulla carica sia solamente $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$
    - Il lavoro fatto nel percorso chiuso sarebbe $W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$
      - Ma il campo $\mathbf{E}$ è conservativo
- Pertanto ci deve essere un'altra forza oltre alla forza elettrica $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \mathbf{F}_{\mathrm{em}}$
  - Una forza che mantiene le cariche in moto e fornisce continuamente energia $W = \oint \mathbf{F}_{\mathrm{em}} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$
  - Una forza con queste caratteristiche si chiama Forza Elettromotrice

Cella elettrolitica

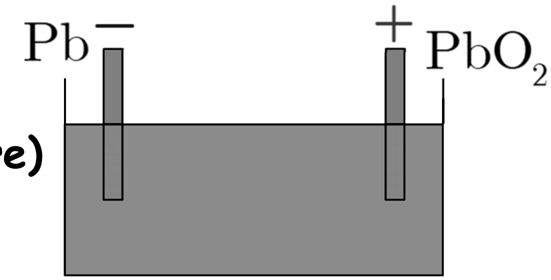


- Consideriamo un recipiente contenente acqua
  - Abbiamo detto che l'acqua pura ha un numero piccolo di molecole dissociate $\rightarrow$ bassa conduttività
  - L'aggiunta di un sale o di un acido aumenta di molto il numero di ioni presenti nell'acqua
    - Ad esempio aggiungendo acido solforico H_2SO_4

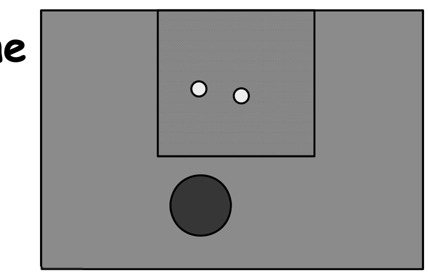
$$H_2SO_4 \rightleftarrows 2H^+ + SO_4^{--}$$

      - La soluzione rimane comunque neutra
  - Se aggiungiamo due elettrodi e stabiliamo fra di essi una differenza di potenziale nella soluzione si stabilisce una corrente
    - Gli ioni e gli elettroni sono i portatori di carica
      - Le loro densità e mobilità determinano la conduttività della soluzione
    - Il dispositivo così realizzato prende il nome di cella elettrolitica
    - La soluzione prende il nome di soluzione elettrolitica
    - La sostanza disciolta in soluzione prende il nome di elettrolita
- Il materiale di cui sono composti gli elettrodi è importante
  - Può causare comportamenti diversi della cella elettrolitica
  - In particolare la cella può comportarsi come una pila (generatore di forza elettromotrice)

Batteria ricaricabile

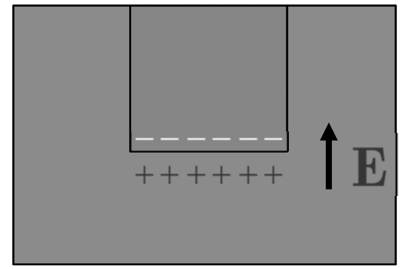


- Descriviamo una pila reversibile a base di piombo
  - Reversibile significa che può essere ricaricata
  - È utilizzata nelle automobili, nelle moto (accumulatore)
- La cella elettrolitica è una soluzione di H_2SO_4 in acqua
- I due elettrodi sono
  - Uno fatto di piombo puro (Pb), l'elettrodo negativo
  - Uno fatto di biossido di piombo (PbO_2), l'elettrodo positivo
- Esaminiamo quello che avviene nell'elettrodo di piombo



  - In particolare nella regione a contatto con la soluzione
    - Un certo numero di atomi di Pb metallico dello elettrodo perde 2 elettroni e passa alla soluzione
    - Nella soluzione lo ione piombo Pb^{++} si combina con lo ione SO_4^{--} formando $PbSO_4$
    - Complessivamente $Pb + H_2SO_4 \rightarrow PbSO_4 + 2H^+ + 2e^-$
- Combinandosi con SO_4^{--} il Pb^{++} in soluzione lascia due ioni H^+ non neutralizzati
  - Questa reazione avviene perché energeticamente favorita
    - Il Pb in soluzione ha un'energia inferiore a quella del Pb nel metallo
  - Complessivamente due elettroni sono nell'elettrodo e due ioni positivi H^+ sono nella soluzione
    - Elettrodo e soluzione non sono più neutri, si sono caricati

Batteria ricaricabile

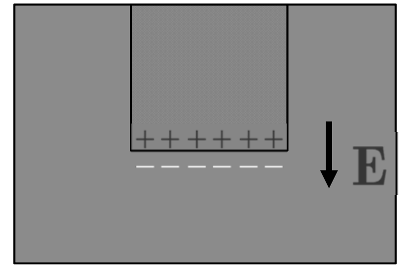


- Pertanto l'elettrodo Pb si carica negativamente
  - Gli ioni H^+ si dispongono molto vicini alla superficie dell'elettrodo
    - Si forma il cosiddetto doppio strato
  - Osserviamo che i due strati di carica generano un campo elettrico (elettrostatico)
  - Per passare in soluzione lo ione Pb^{++} deve vincere la forza del campo elettrico che lo spingerebbe a rimanere dentro l'elettrodo
    - L'energia che lo ione Pb^{++} perde passando in soluzione è maggiore di quella che guadagnerebbe spostandosi in direzione opposta campo elettrico

Questa è l'origine della forza elettromotrice

- Naturalmente man mano che il piombo va in soluzione la carica del doppio strato aumenta
  - Ad un certo punto il campo elettrico è diventato così intenso che il passaggio di ioni Pb^{++} alla soluzione si arresta
  - L'energia che lo ione di piombo perderebbe passando in soluzione è diventata minore di quella che guadagnerebbe spostandosi in direzione opposta campo elettrico
- Il sistema elettrodo-soluzione ha raggiunto l'equilibrio
  - C'è una differenza di potenziale fra l'elettrodo e la soluzione

Batteria ricaricabile



- All'elettrodo positivo $(\mathrm{PbO_2})$ hanno luogo reazioni simili†
  - In particolare il piombo tetravalente del $\mathrm{PbO_2}$ si riduce a piombo bivalente

$$\mathrm{PbO_2 + 4H^+ + 2}e^- \rightarrow \mathrm{Pb^{++} + 2H_2O}$$

    - Anche in questo caso avviene la reazione energeticamente favorita
  - Questa reazione "consuma" elettroni del metallo
    - L'elettrodo si carica positivamente
  - Vengono attratti ioni negativi nella soluzione
    - Si forma un doppio strato
  - Gli ioni $\mathrm{H^+}$ che hanno ridotto il Pb tetravalente hanno attraversato il doppio strato contro il campo elettrico
    - Ancora una volta è comparsa una forza elettromotrice
- Per finire il piombo bivalente si combina con gli ioni solfato formando un sale che precipita

$$\mathrm{Pb^{++} + SO_4^{--}} \rightarrow \mathrm{PbSO_4}$$

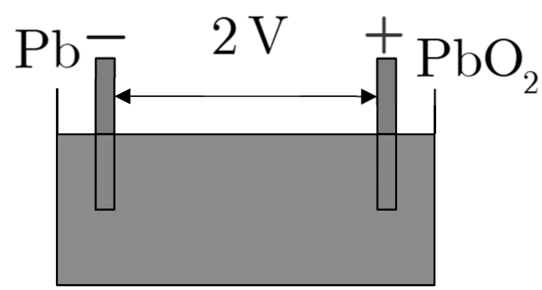
- Complessivamente al catodo è avvenuta la seguente reazione

$$\mathrm{PbO_2 + 4H^+ + SO_4^{--} + 2}e^- \rightarrow \mathrm{PbSO_4 + 2H_2O}$$

- †Barak M. ed. – Electrochemical Power Sources -The Institution of Engineering and Technology (1980) p. 188

Batteria ricaricabile

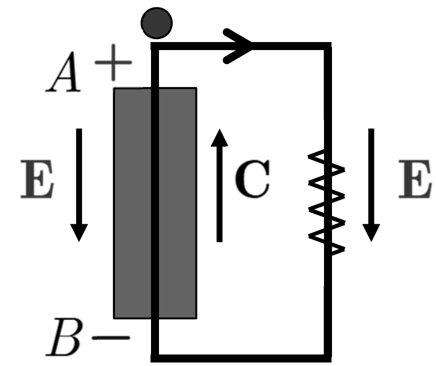
- Anche all'elettrodo positivo si raggiunge una condizione di equilibrio
  - Il campo elettrico del doppio strato diventa molto intenso e il passaggio di ioni H^+ all'elettrodo PbO_2 richiederebbe un'energia maggiore di quella guadagnata dalla riduzione del Pb tetravalente
- In queste condizioni fra gli elettrodi della batteria c'è una differenza di potenziale di circa $2\ V$



  - Se adesso colleghiamo una resistenza fra gli elettrodi comincia a scorrere una corrente
    - Dall'elettrodo positivo a quello negativo
    - Gli elettroni passano dall'elettrodo Pb al PbO_2
  - I campi elettrici dei due doppi strati si indeboliscono
    - Le reazioni riprendono
    - La batteria mantiene la corrente e cede energia al sistema esterno
- Durante il funzionamento la batteria consuma Pb metallico e biossido PbO_2
- Questo processo può essere invertito
  - Se si collega un generatore agli elettrodi con una forza elettromotrice maggiore di quella della batteria tutte le reazioni hanno luogo in senso inverso
    - La batteria si ricarica

Forza elettromotrice

- Abbiamo descritto un generatore di forza elettromotrice
  - Nella batteria descritta ci sono portatori di carica che si muovono nella direzione opposta a quella che sarebbe determinata dal campo elettrico
    - La reazione chimica rende questo passaggio conveniente energeticamente
    - Possiamo schematizzare l'aumento di energia come il lavoro fatto da un campo che chiamiamo campo elettromotore $\mathrm{C}_{\mathcal{E}}$
  - Ritorniamo alla nostra schematizzazione di generatore
    - Indichiamo i poli positivo e negativo
    - Il campo elettrico è diretto come in figura



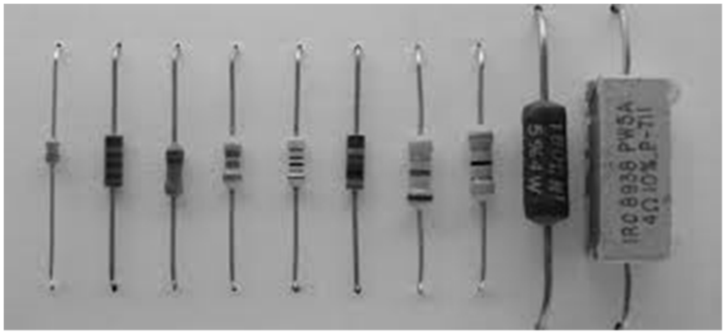
- Calcoliamo il lavoro fatto sulla carica in un ciclo
  - La forza che agisce sulla carica è
    - Nel circuito esterno al generatore $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$
    - Dentro il generatore $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{C}_{\mathcal{E}}$

$$W = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + q\int_B^A \left(\mathbf{E} + \mathbf{C}_{\mathcal{E}}\right) \cdot d\mathbf{l}$$

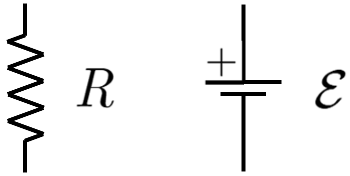
$$= \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + q\int_B^A \mathbf{C}_{\mathcal{E}} \cdot d\mathbf{l} = q\int_B^A \mathbf{C}_{\mathcal{E}} \cdot d\mathbf{l} \equiv q\mathcal{E}$$

- La grandezza $\mathcal{E}$ prende il nome di forza elettromotrice della batteria
  - È simile a un potenziale; si misura in Volt

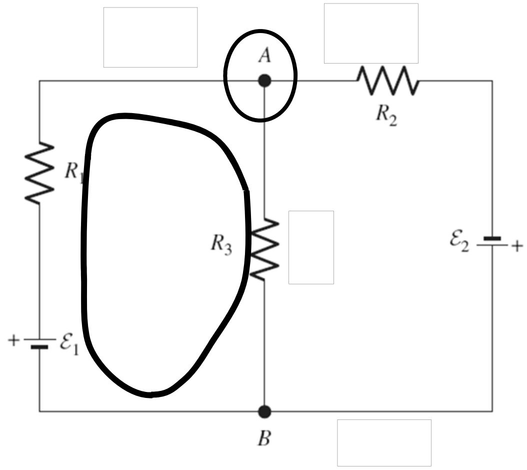
Circuiti elettrici



- Nell'elettronica si utilizzano conduttori che hanno una resistenza ben determinata
  - Le resistenze o resistori
  - Chiamiamo circuito elettrico un sistema in cui più resistori e generatori di forza elettromotrice sono collegati insieme
    - In futuro introdurremo anche altri elementi di circuito come condensatori e induttori
- Le resistenze e i generatori di forza elettromotrice sono rappresentati mediante i seguenti simboli

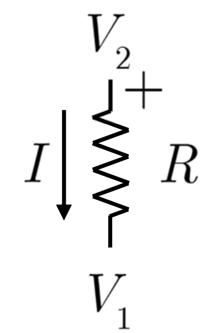


  - Sottolineiamo che si tratta di elementi con due terminali
    - La corrente che entra da un terminale esce dall'altro
- La figura mostra un esempio di circuito
  - In un circuito si definiscono due strutture importanti
    - Il nodo: un punto nel quale sono collegati più elementi del circuito
    - La maglia: una successione di elementi del circuito connessi fra di loro e che realizzano un cammino chiuso



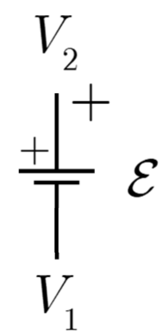
Circuiti elettrici

- Introduciamo le relazioni Volt-Ampere
  - Un elemento di circuito stabilisce una relazione fra la differenza di potenziale fra i suoi terminali e la corrente che passa attraverso l'elemento stesso
    - Per il resistore è la legge di Ohm
  - Occorre fissare delle convenzioni
    - Si indica, arbitrariamente, con $+$ il terminale che ha un potenziale "più elevato"
      - La tensione V del resistore è $V = V_2 - V_1$
    - Si considera positiva la corrente che entra nel terminale definito $+$
  - Con queste convenzioni si ha



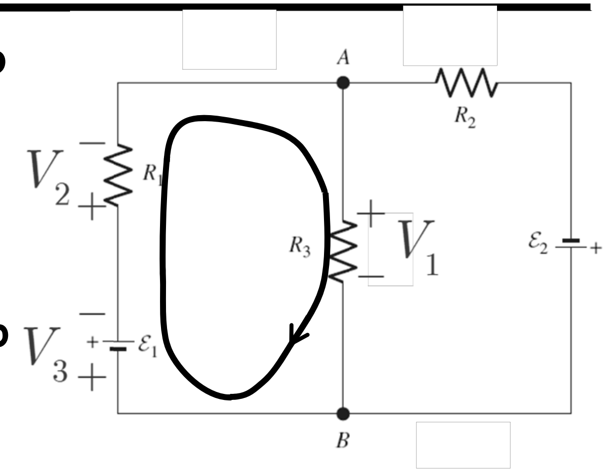
$$V = RI$$

  - Nel caso del generatore la relazione è estremamente semplice
    - Si indica con $+$ il terminale positivo del generatore
      - La tensione V del generatore è $V = V_2 - V_1$
    - Un generatore di tensione ideale mantiene la tensione data fra i suoi terminali quale che sia la corrente che lo attraversa



$$V = \mathcal{E}$$

Circuiti elettrici



- **Veniamo adesso a due importanti leggi che governano il comportamento dei circuiti**
  - **Le leggi di Kirchhoff per le maglie e per i nodi**
- **La legge per le maglie**
  - **Fissiamo un senso di percorrenza della maglia**
    - **Misuriamo le tensioni V_k sugli elementi di circuito della maglia considerando positive le tensioni sui terminali in cui "si entra"**
  - **La legge di Kirchhoff per le maglie afferma:**

> La somma delle differenze di potenziale V_k ai capi degli elementi è uguale alla somma delle forze elettromotrici presenti nella maglia

$$\sum_k V_k = \sum_l \mathcal{E}_l$$

$$V_1 + V_2 = \mathcal{E}_1$$

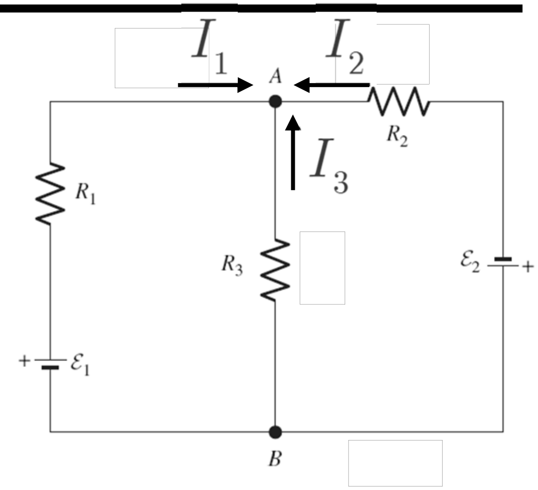
- **È legata alla natura conservativa del campo elettrico e alla definizione di campo elettromotore†**
- **Un modo equivalente (più semplice) di enunciare la legge è che la somma di TUTTE le differenze di potenziale degli elementi del circuito è nulla**
  - **Si misura anche la ddp ai capi delle fem secondo la convenzione**

$$\sum_k V_k = 0$$

$$V_1 + V_2 - \mathcal{E}_1 = 0$$

- †Si veda ad esempio Reitz J., Milford M. - Foundations of electromagnetic theory – Addison Wesley 1960 § 7.5

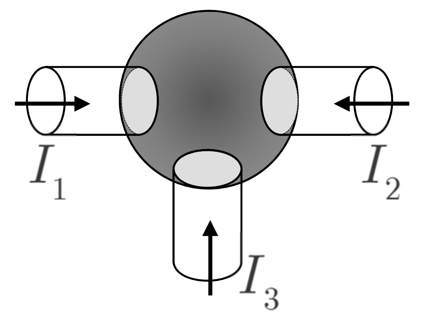
Circuiti elettrici



- La legge di Kirchhoff per i nodi
  - Definiti i sensi positivi delle correnti del nodo
    - La legge di Kirchhoff per i nodi afferma: La somma algebrica delle correnti ENTRANTI (o USCENTI) nel nodo è nulla $\boxed{\sum_k I_k = 0}$
    - Alternativamente: la somma delle correnti entranti è uguale alla somma delle correnti uscenti
  - È una conseguenza dell'equazione di continuità

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Longrightarrow \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = -\frac{dQ}{dt}$$

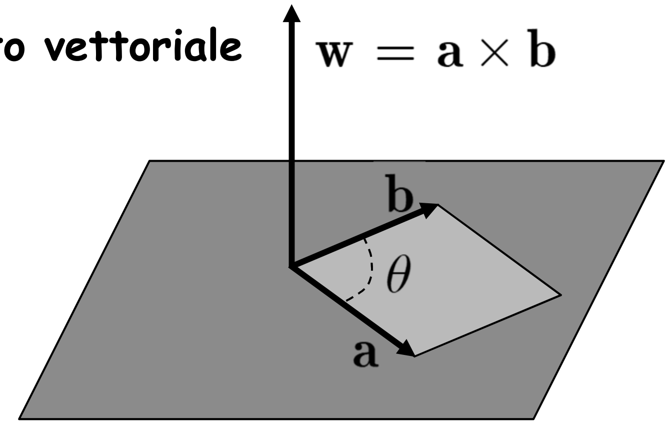
  - In condizione stazionaria $dQ/dt = 0$
- Consideriamo in dettaglio il nodo
  - La densità di corrente J è nulla escluso nelle basi dei cilindri (evidenziate in azzurro chiaro)
  - Il flusso attraverso la sfera è uguale alla somma dei flussi di J attraverso le superfici evidenziate è la somma delle correnti che escono dal nodo

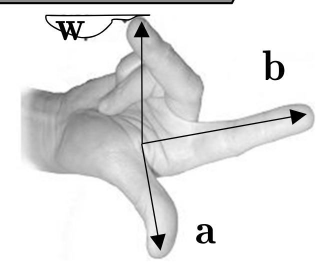


$$\int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 0 \Longrightarrow -I_1 - I_2 - I_3 = 0 \qquad I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Prodotto vettoriale

- Richiamiamo le definizioni (equivalenti) di prodotto vettoriale
  - In inglese cross product
  - Si usa anche la notazione $\mathbf{w} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$
- Definizione 1
    - Un vettore perpendicolare al piano determinato da $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$
    - Verso determinato con la mano destra
  - Il modulo del vettore è $a\,b\sin\theta$
    - È l'area del parallelogramma che ha come lati $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$
- Definizione 2





$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x & \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{e}}_x \left(a_y b_z - a_z b_y\right) + \hat{\mathbf{e}}_y \left(a_z b_x - a_x b_z\right) + \hat{\mathbf{e}}_z \left(a_x b_y - a_y b_x\right)$$

- Definizione 3 (tensore di Levi Civita)

$$\left(\mathbf{a} \times \mathbf{b}\right)_i = \sum_{jk=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_j b_k \qquad \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \mathrm{se}\left(i,j,k\right) \quad \left(1,2,3\right)\left(3,1,2\right)\left(2,3,1\right) \\ -1 & \mathrm{se}\left(i,j,k\right) \quad \left(2,1,3\right)\left(1,3,2\right)\left(3,2,1\right) \\ 0 & \text{altrimenti} \quad 2\,\text{o}\ 3\ \text{indici uguali} \end{cases}$$

  - Sintetizzabile in $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$

Prodotto vettoriale

- Come primo esempio, calcoliamo la componente $x\;(i=1)$ utilizzando il tensore di Levi Civita

$$\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)_1 = \sum_{jk=1}^{3}\varepsilon_{1jk}a_j b_k \qquad \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se}\left(i,j,k\right) \quad \left(1,2,3\right)\left(3,1,2\right)\left(2,3,1\right) \\ -1 & \text{se}\left(i,j,k\right) \quad \left(2,1,3\right)\left(1,3,2\right)\left(3,2,1\right) \\ 0 & \text{altrimenti} \quad 2\text{ o }3\text{ indici uguali} \end{cases}$$

ε_{1jk}

$j \setminus k$	1	2	3
1	0	0	0
2	0	0	$+1$
3	0	-1	0

$$\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)_1 = \varepsilon_{123}a_2b_3 + \varepsilon_{132}a_3b_2 = +a_2b_3 - a_3b_2 = +a_yb_z - a_zb_y$$

Prodotto vettoriale

- Altro esempio
  - Troviamo delle identità per il prodotto triplo $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$
  - Ricordiamo il prodotto scalare di due vettori

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$$

  - Il prodotto triplo è pertanto

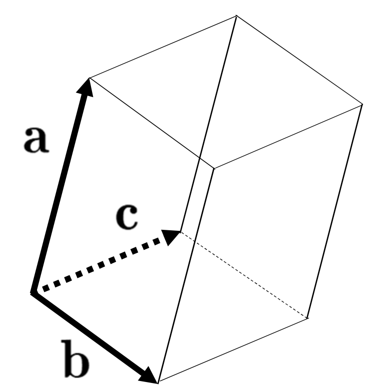
$$\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right) = \sum_{i=1}^{3} a_i \sum_{jk=1}^{3} \varepsilon_{ijk} b_j c_k = \boxed{\sum_{ijk=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k} = -\sum_{ijk=1}^{3} \varepsilon_{jik} a_i b_j c_k = -\sum_{ijk=1}^{3} \varepsilon_{jik} b_j a_i c_k$$

$$= -\sum_{j=1}^{3} b_j \sum_{ik=1}^{3} \varepsilon_{jik} a_i c_k = -\mathbf{b}\cdot\left(\mathbf{a}\times\mathbf{c}\right)$$

- Esercizio
  - Provare l'identità $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$
- Inoltre, dalla definizione di determinante, segue

$$\mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Infine notiamo che è il volume del parallelepipedo



Rotore di un campo vettoriale

- Nello studio dell'elettrostatica abbiamo incontrato la legge di Gauss
  - Inizialmente enunciata in forma integrale

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

  - Successivamente in forma differenziale

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

    - La forma differenziale evidenzia proprietà locali del campo elettrico
      - $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}$ è una funzione del punto $\mathbf{r}$
- Abbiamo inoltre espresso la proprietà del campo elettrostatico di essere conservativo utilizzando ancora una volta una legge integrale
  - La circuitazione del campo elettrico è nulla

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

- Abbiamo finora evitato di introdurre la forma differenziale della legge sulla circuitazione per non complicare la trattazione dell'elettrostatica
  - Tuttavia questo non è conveniente per gli sviluppi ulteriori dell'elettromagnetismo

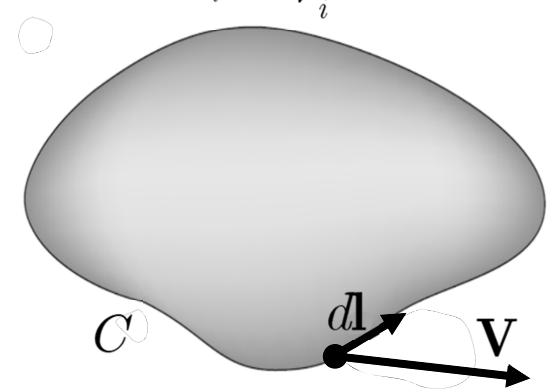
Rotore di un campo vettoriale

- Ricordiamo la procedura seguita nel caso della legge di Gauss
  - Avevamo espresso il flusso attraverso una superficie come la somma di tanti flussi attraverso superfici sempre più piccole
    - Al limite infinite superfici infinitesime
  - Avevamo poi definito la divergenza come limite del rapporto fra il flusso e il volume racchiuso

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \lim_{V_i \to 0} \frac{\Phi_i}{V_i}$$

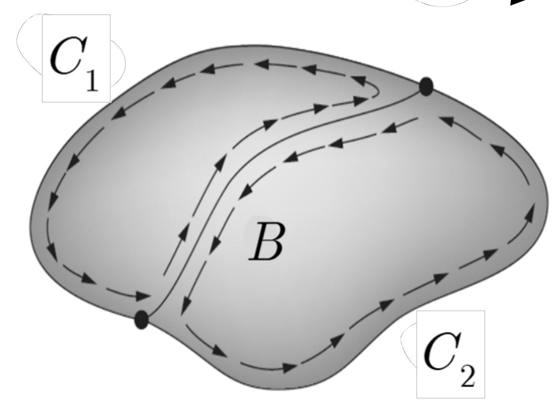
- Analogamente consideriamo la circuitazione di un campo vettoriale V lungo una curva chiusa C

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$$



  - Otteniamo lo stesso risultato se sommiamo due circuitazioni lungo i cammini C_1 e C_2
    - Notiamo che gli integrali lungo la regione di confine fra C_1 e C_2 (linea B) si elidono
    - Sono percorsi in senso inverso
    - Rimangono i contributi del resto dei cammini

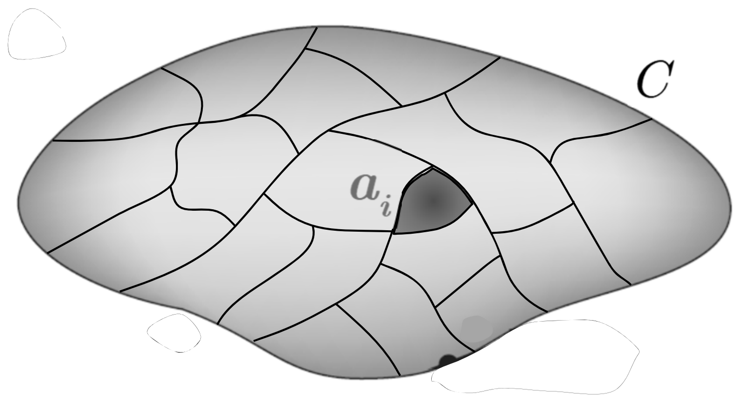
$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \oint_{C_1} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{C_2} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \Gamma$$



Rotore di un campo vettoriale

- Il processo appena descritto può essere ripetuto
  - Sommando su tutti i cammini rimane solo il contributo del cammino originale (esterno)

$$\Gamma_i = \oint_{C_i} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$$



$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i \qquad \Gamma = \oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l}$$

  - Al crescere del numero delle suddivisioni il valore delle circuitazioni Γ_i diventa sempre più piccolo: $\Gamma_i \to 0$
- Nel caso della legge di Gauss avevamo definito una proprietà differenziale del campo legata alla legge del flusso calcolando il limite del rapporto fra il flusso Φ_i e il volume V_i con Φ_i, $V_i \to 0$
  - Il limite del rapporto esisteva e definiva la divergenza del campo

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \lim_{V_i \to 0} \frac{\Phi_i}{V_i}$$

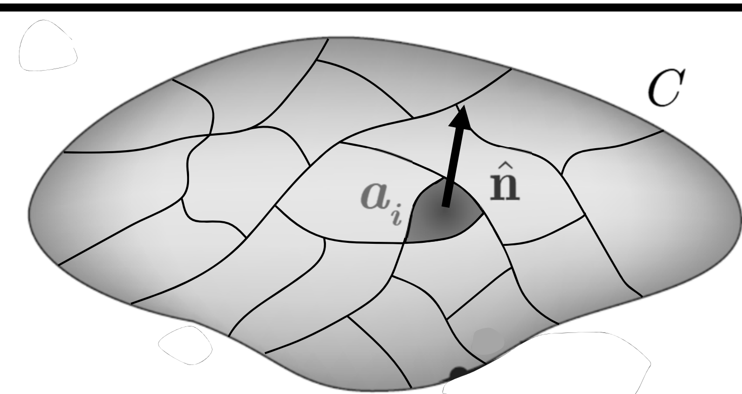
  - Analogamente possiamo trovare una proprietà differenziale del campo legata alla legge della circuitazione calcolando il limite del rapporto fra le circuitazioni Γ_i e le superfici a_i

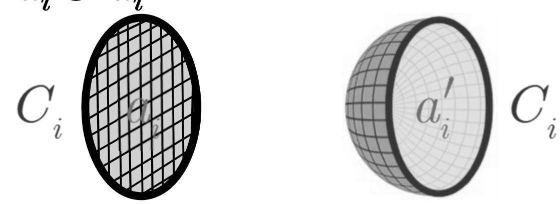
$$\lim_{a_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i}$$

    - Tuttavia ci sono importanti differenze

Rotore di un campo vettoriale

- Esaminiamo le differenze
  - La superficie a_i è connessa al cammino C_i in modo ambiguo
    - Ad esempio le due superfici di seguito hanno lo stesso contorno C_i ma hanno differenti valori a_i e a_i'





C_i non individua l'area a_i in modo univoco

  - Il limite del rapporto Γ_i / a_i dipende dalla forma della superficie
- Si può ovviare a questa ambiguità utilizzando la normale $\hat{\mathbf{n}}$ alla superficie
  - Se si fa tendere a zero la superficie mantenendo fissa la direzione $\hat{\mathbf{n}}$ della normale si dimostra che il limite esiste ed è univoco
    - È un limite diverso per ogni direzione
    - In conclusione la grandezza che stiamo definendo è un vettore
    - Mantenere fissa la direzione della normale equivale a dire che si sta calcolando la componente del vettore nella direzione di $\hat{\mathbf{n}}$
  - Il limite (vettoriale) definisce il rotore del campo vettoriale $\mathbf{V}$

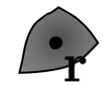
$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{V} = \lim_{a_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i}$$

In inglese $\mathrm{curl}\ \mathbf{V}$
To curl = arrotolare

Rotore di un campo vettoriale

- **Notiamo che la grandezza che abbiamo definito è una funzione vettoriale del punto $\mathbf{r}$**

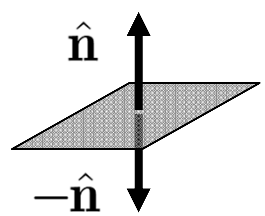
$$\Gamma_i = \oint_{C_i} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} \qquad \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{V} = \lim_{a_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{a_i}$$



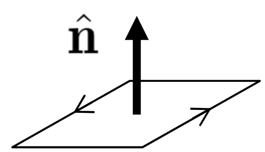
$$\mathrm{rot}\mathbf{V} = \mathbf{F}\left(\mathbf{r}\right)$$

  - **Inoltre dobbiamo anche risolvere altre due ambiguità**
    - **Un cammino può essere percorso in due sensi**

    - **La normale alla superficie può avere due versi**



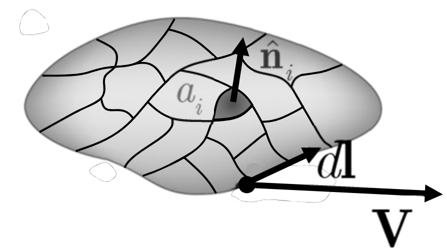
  - **Si usa la convenzione della mano destra**
    - **Lega il verso della normale al senso di percorrenza del cammino**



Teorema di Stokes

- Il teorema di Stokes lega il flusso del rotore di un campo vettoriale $\mathbf{V}$ attraverso una superficie alla circuitazione del campo vettoriale $\mathbf{V}$
  - È analogo al teorema di Gauss che lega l'integrale di volume della divergenza di un campo vettoriale $\mathbf{V}$ al flusso del vettore $\mathbf{V}$
- Consideriamo la circuitazione del campo $\mathbf{V}$

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{N}\Gamma_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{\Gamma_i}{a_i}a_i$$



  - Per N sufficientemente grande

$$\frac{\Gamma_i}{a_i} \rightarrow \hat{\mathbf{n}}_i \cdot \left(\mathrm{rot}\,\mathbf{V}\right)_{\mathbf{r}_i}$$

    - Sostituendo

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{N}\hat{\mathbf{n}}_i \cdot \left(\mathrm{rot}\,\mathbf{V}\right)_{\mathbf{r}_i} a_i \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,da$$

- Otteniamo pertanto il teorema di Stokes

$$\boxed{\oint_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,da}$$

La superficie S è arbitraria ma è delimitata da C