
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 18 - 15.12.2022

Conduzione elettrica - Legge di Ohm
Teoria del potenziale in materiali ohmici

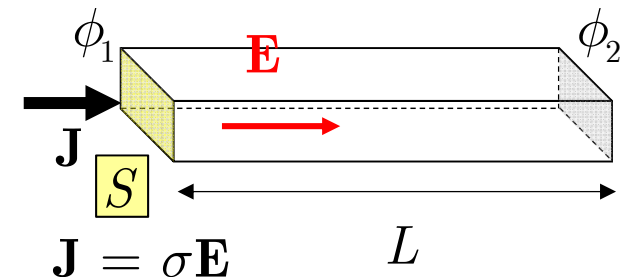
Il campo elettrico all'esterno
di un filo conduttore

Modello microscopico della conduzione elettrica

Anno Accademico 2022/2023

Resistenza di un resistore

- Per passare alla corrente e alla tensione occorre calcolare
 - L'integrale di $\mathbf{J}$ su una superficie
 - L'integrale di $\mathbf{E}$ lungo una linea
- Consideriamo ad esempio un conduttore semplice



- Calcoliamo la differenza di potenziale fra i suoi elettrodi

$$\phi_2 = \phi_1 - \int_0^L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \phi_1 - EL$$
$$\phi_1 - \phi_2 = EL \equiv V \quad \longrightarrow \quad E = \frac{V}{L}$$

- La differenza di potenziale è la stessa per qualunque cammino che unisce i due elettrodi
- Calcoliamo la corrente che fluisce nel conduttore
 - Flusso di $\mathbf{J}$ attraverso la superficie dell'elettrodo

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int_S \sigma \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \sigma ES = \sigma \frac{V}{L} S \quad \longrightarrow \quad V = \frac{L}{\sigma S} I$$

Resistenza di un resistore

- Ricordiamo la definizione della resistenza del conduttore

$$R = \frac{V}{I} = \frac{L}{\sigma S} \quad \boxed{V = RI}$$

- Si usa spesso la resistività

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

- Ovviamente, utilizzando la resistività

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

- La resistività si misura in ohm-m

- La resistenza si misura in ohm (Ω)

- Multipli dell'ohm $1 \Omega - 10^3 K\Omega - 10^6 M\Omega$

- Attenzione: abbiamo utilizzato un resistore con una geometria molto semplice

- Elettrodi piani e paralleli

- Nel caso studiato, all'intero del conduttore, il campo $\mathbf{E}$ è uniforme

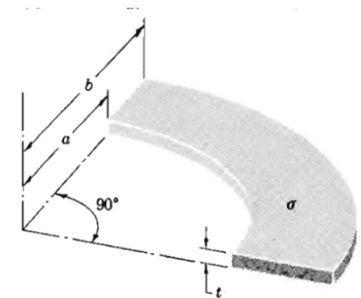
Resistenza di sistemi più complessi

- Il resistore che abbiamo utilizzato era semplice

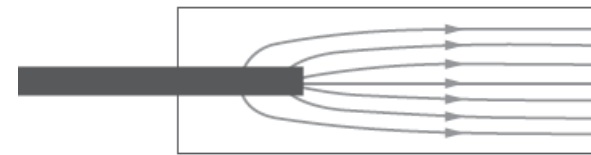
- Sono altrettanto semplici



- Semplici su opportuni elettrodi



- Se l'elettrodo è puntiforme può diventare complesso



- In questi casi si può approssimare

- Se è necessario un calcolo esatto

- Si risolve il problema elettrostatico trovando $\mathbf{E}$, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

- Si calcola la differenza di potenziale V fra gli elettrodi $V = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$

- Si calcola la corrente I che entra negli elettrodi $I = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$

- La resistenza è $R = \frac{V}{I}$

Esempio

- Come esempio, calcoliamo la resistenza di un cilindro cavo
 - I raggi sono $a < b$, l'altezza h , la conduttività σ
 - Gli elettrodi (neri) sono conduttori ideali (equipotenziali)
 - Il problema ha simmetria azimutale
 - La soluzione generale è ancora

$$\phi(r, z) = (A + B \ln r)(e + fz)$$

- Condizioni al contorno

- a) Sulle superfici superiore e inferiore

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad E_n = \frac{J_n}{\sigma} = 0 \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

- b) Superfici laterali

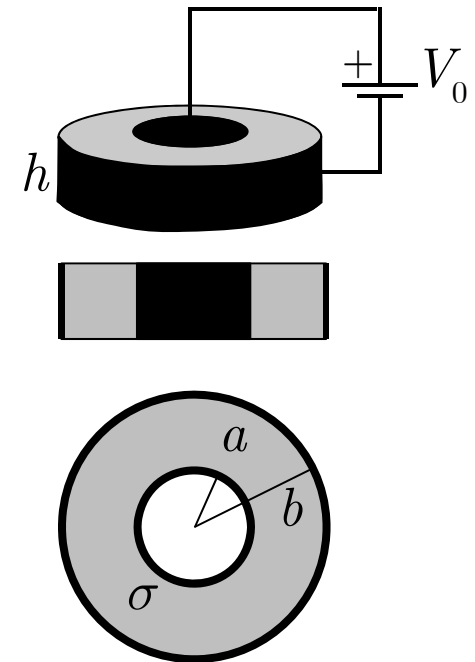
$$\phi(a, z) = V_0 \quad \phi(b, z) = 0$$

- Abbiamo pertanto

- a)

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{dz} = f(A + B \ln r) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = 0 \quad e = 1}$$

- Per finire, applichiamo la seconda e la terza condizione



Esempio

- **b)**

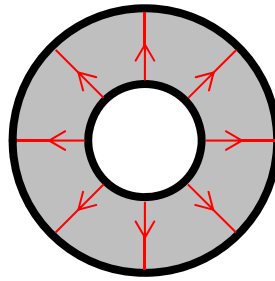
$$\phi(b, z) = (A + B \ln b) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B \ln b \quad \phi(r, z) = B(\ln r - \ln b) = B \ln \frac{r}{b}$$

$$\phi(a, z) = B \ln \frac{a}{b} = V_0 \quad \Rightarrow \quad B = V_0 / \ln \frac{a}{b}$$

- **Pertanto il potenziale e il campo elettrico sono**

$$\phi(r, z) = \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{b} \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r = -\frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \frac{1}{r} \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r} \hat{\mathbf{e}}_r$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r} \hat{\mathbf{e}}_r$$



- **Possiamo calcolare la densità di corrente**

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \sigma \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r} \hat{\mathbf{e}}_r \quad I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = J(a) 2\pi a h = \sigma \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{a} 2\pi a h = \sigma \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a}} 2\pi h$$

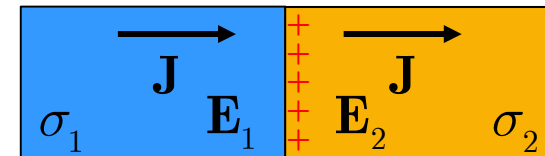
- **E per finire la resistenza**

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma h} \ln \frac{b}{a}$$

Conduttività non omogenea

- Abbiamo fin qui supposto che σ sia costante e che il mezzo sia omogeneo, caratterizzato da un'unica conduttività
- Sappiamo che in condizioni di stazionarietà questo implica che non ci sono densità di carica nel materiale
 - Infatti, in condizioni stazionarie $\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0$
- Dato che $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$

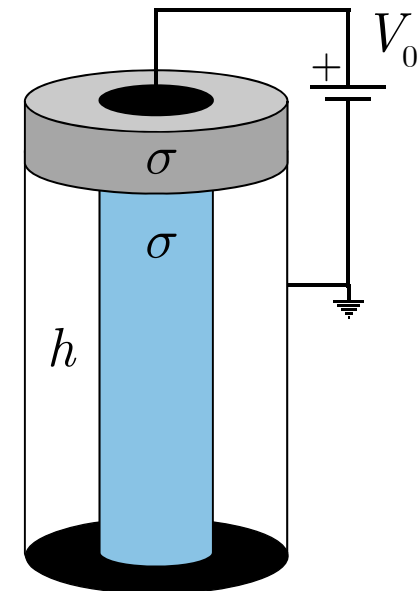
$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \sigma \mathbf{E} = \frac{\sigma}{\kappa \epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{D} \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \longrightarrow \quad \rho = 0$$
- Viceversa se σ varia ci sono densità di carica
- Ad esempio consideriamo due conduttori di conduttività diversa $\sigma_1 > \sigma_2$
 - NB: in queste diapositive σ è la conduttività
 - In condizioni stazionarie $\mathbf{J}$ deve essere lo stesso in entrambi i mezzi
 - In caso contrario ci sarebbe accumulo di carica in funzione del tempo sull'interfaccia
 - Significa che i campi elettrici $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ sono diversi: $E_1 < E_2$
 - Il campo ha una discontinuità sull'interfaccia
 - Sull'interfaccia ci deve essere una densità di carica



$$\sigma_1 \mathbf{E}_1 = \sigma_2 \mathbf{E}_2$$

Campo elettrico all'esterno del filo

- Vediamo adesso che all'esterno di un conduttore in cui scorre corrente è presente un campo elettrico
 - Il problema è tuttavia complicato perché la corrente deve richiudersi su se stessa†
 - In regime stazionario $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ (le linee del campo $\mathbf{J}$ devono essere chiuse)
 - C'è una forza elettromotrice
- Riprendiamo il cilindro di altezza h e raggio a
 - Definiamo con esattezza il cammino della corrente
 - Il cilindro centrale ha conduttività σ
 - È collegato a due elettrodi (neri, $\sigma = \infty$): un cilindro di raggio a altezza d e un disco di raggio b
 - In alto un cilindro cavo di raggi a e b , altezza d e conduttività σ (uguale al cilindro interno)
 - All'esterno un cilindro cavo di raggio b e conduttività infinita (conduttore ideale)
 - È presente una batteria (forza elettromotrice) che mantiene una differenza di potenziale V_0 ai suoi capi
 - I conduttori ideali sono tutti allo stesso potenziale (0 oppure V_0)



†Marcus A. The Electric Field Associated with a Steady Current in Long Cylindrical Conductor – Am.J.Phys. 9 p. 225 (1941)
Haus H., Melcher J. – Electromagnetic Fields and Energy – MIT OCW - https://web.mit.edu/6.013_book/www/book.html

Campo elettrico all'esterno del filo

- Il dominio è suddiviso in tre regioni
 - Abbiamo già risolto il problema nelle regioni 1 e 2

$$\phi_1(z) = V_0 \frac{z}{h} \qquad \phi_2(r, z) = \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{b}$$

- Nella regione 3 le condizioni al contorno per ϕ_3 sono
 - Potenziale nullo sulla superficie a $r = b$ e sulla base $z = 0$

$$\phi_3(b, z) = 0 \qquad \phi_3(r, 0) = 0$$

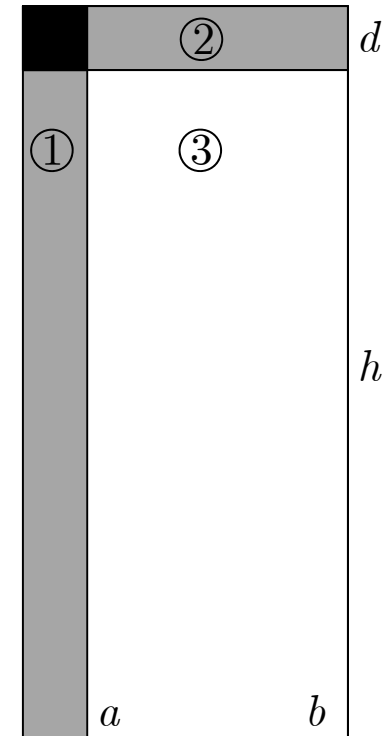
- Continuità di ϕ alle interfacce 1-3 ($r = a$) e 2-3 ($z = h$)

$$\phi_3(a, z) = \phi_1(a, z) = V_0 \frac{z}{h} \qquad \phi_3(r, h) = \phi_2(r, h) = \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \ln \frac{r}{b}$$

- Vedremo che la continuità 2-3 ($z = h$) è automatica
- Come nelle regioni 1 e 2, nella regione 3 la soluzione generale è

$$\phi_3(r, z) = (A + B \ln r)(e + fz)$$

- Imponiamo le condizioni al contorno per trovare le costanti



Campo elettrico all'esterno del filo

$$\phi_3(r, z) = (A + B \ln r)(e + fz)$$

- **Potenziale nullo per $r = b$**

$$\phi_3(b, z) = 0 = (A + B \ln b)(e + fz) \quad A = -B \ln b$$

- **Potenziale nullo per $z = 0$**

$$\phi_3(r, 0) = (A + B \ln r)e = 0 \quad e = 0$$

- **Il potenziale si è ridotto a**

$$\phi_3(r, z) = fzB \ln \frac{r}{b} \equiv Bz \ln \frac{r}{b}$$

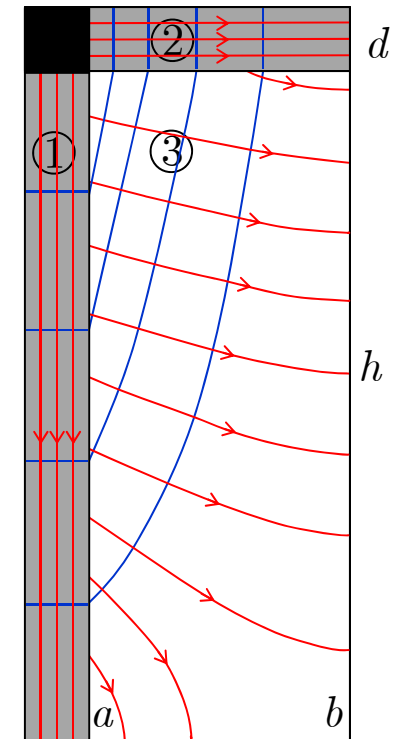
- **Continuità all'interfaccia 1-3**

$$\phi_3(a, z) = Bz \ln \frac{a}{b} = V_0 \frac{z}{h} \quad B = \frac{V_0}{h \ln \frac{a}{b}}$$

$$\phi_3(r, z) = -\frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \frac{z}{h} \ln \frac{r}{b}$$

- **Il campo elettrico nella regione 3 è**

$$\mathbf{E}_3 = -\nabla \phi_3 = \frac{V_0}{\ln \frac{a}{b}} \left[\frac{z}{h} \frac{1}{r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{h} \ln \frac{r}{b} \hat{\mathbf{e}}_z \right]$$



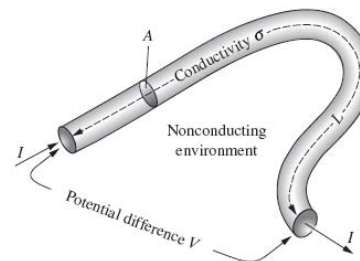
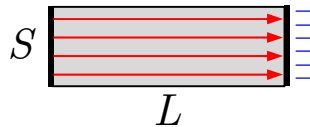
Verifica automaticamente la condizione all'interfaccia 2-3

Campo elettrico all'esterno del filo

- Osserviamo che sulle superfici dei conduttori ohmici appare una densità di carica **superficiale**

$$\sigma_1(z) = \varepsilon_0 E_{1r} = \frac{\varepsilon_0 V_0}{\ln \frac{b}{a}} \frac{z}{ha} \quad \sigma_2(r) = \varepsilon_0 E_{2z} = \frac{\varepsilon_0 V_0}{h \ln \frac{b}{a}} \ln \frac{r}{b}$$

- La densità di carica superficiale permette alla corrente di "seguire" la forma del filo
- Vediamo come e stimiamo la carica
- Consideriamo un tratto di filo prima della curva



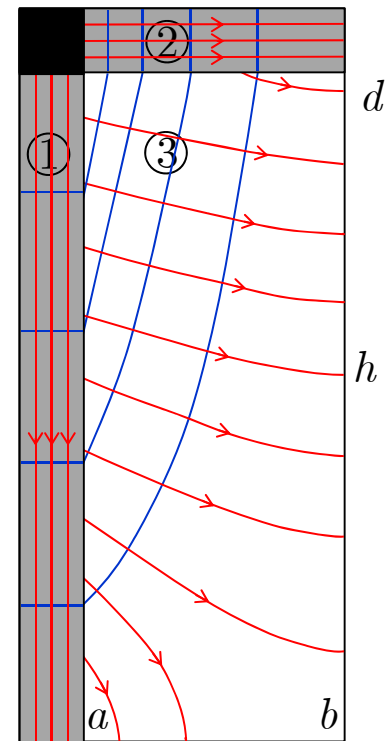
- Il campo elettrico è $E = \frac{V_0}{L}$

- La carica[†] sugli elettrodi è $\eta = -\varepsilon_0 E = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{L}$

$$Q = \eta S = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{L} S = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{\varepsilon_0 V_0}{L} S = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{R \sigma}$$

$$Q_- = -\frac{\varepsilon_0 I}{\sigma}$$

$$R = \frac{L}{\sigma S}$$

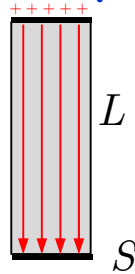


- [†]Per evitare confusione con la conduttività indichiamo la densità di carica con η

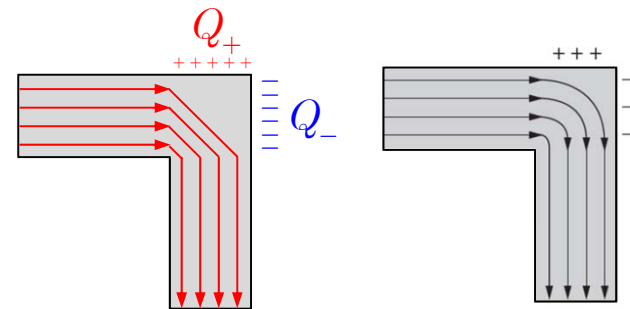
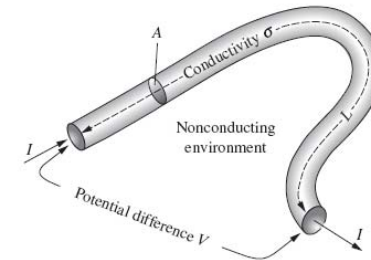
Carica superficiale del filo

- Analogamente per il tratto dopo la curva

$$Q_+ = \frac{\epsilon_0 I}{\sigma}$$



- Consideriamo adesso il filo completo
 - Consideriamo i campi prima e dopo la curva
 - Supponiamo che siano presenti le cariche superficiali calcolate prima
 - Per effetto della carica nella regione della curva il campo elettrico è modificato



- Calcoliamo infine l'ordine di grandezza di $Q_{\pm}$
 - Per un conduttore come il platino ($\sigma = 9.66 \cdot 10^6$) e una corrente di 1 A

$$|Q_{\pm}| = \frac{\epsilon_0 I}{\sigma} = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 1}{9.66 \cdot 10^6} = 9.16 \cdot 10^{-19}$$

- È equivalente alla carica di qualche elettrone!

Velocità di deriva

- Nella diapositiva 362 abbiamo definito la densità di corrente come

$$\mathbf{J} = -en_e \bar{\mathbf{u}}$$

- La velocità $\bar{\mathbf{u}}$ è definita come il valor medio delle velocità degli elettroni
 - Non abbiamo discusso le caratteristiche di questa velocità
- Stimiamo il valore della velocità di deriva con un esempio
 - Un filo di rame lungo 1 Km è collegato ad un generatore di tensione di 6 V
 - Calcolare la velocità di deriva in queste condizioni
 - Quanto tempo impiega un elettrone per percorrere tutto il filo?
 - Dati: $\rho = 1.7 \times 10^{-8} \Omega\text{-m}$ $n_e = 8.0 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

- Determiniamo J $J = \sigma E = \frac{1}{\rho} E = \frac{1}{\rho} \frac{V}{L}$

- Utilizzando la definizione di J determiniamo $\bar{u}$ $\bar{u} = \frac{J}{en_e} = \frac{V}{en_e \rho L}$

- Introduciamo i valori numerici

$$\bar{u} = \frac{6}{1.6 \times 10^{-19} \times 8 \times 10^{28} \times 1.7 \times 10^{-8} \times 10^3} = 2.8 \times 10^{-5} \text{ m/s}$$

Velocità di deriva

- Rendiamoci conto di cosa vuol dire questo ordine di grandezza
 - Per percorrere il filo lungo 1 Km occorre un tempo

$$\Delta t = \frac{L}{\bar{u}} = \frac{1000}{2.8 \times 10^{-5}} = 3.57 \times 10^7 \text{ s}$$

Un po' più di un anno !!

- La termodinamica ci dice che gli atomi e le molecole della materia a temperatura T non sono fermi
 - Hanno un moto caotico
 - Ad esempio in un gas o nel caso degli elettroni in un conduttore
 - Il moto è caratterizzato da un'energia cinetica media dell'ordine di $k_B T$
 - $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ costante di Boltzmann
 - T temperatura assoluta in gradi Kelvin
 - 300 K la temperatura ambiente
 - Le velocità delle molecole corrispondenti a questa energia sono dell'ordine di 10^5 m/s
 - Vediamo pertanto che la velocità di deriva è molto più piccola della velocità istantanea degli elettroni

Modello della conduzione

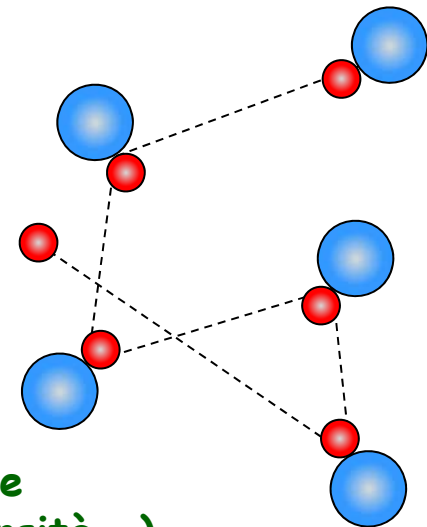
- Abbiamo già visto che per avere conduzione è necessario avere portatori di carica elettrica liberi di muoversi nella materia
 - Ioni, vale a dire atomi o molecole che hanno perso almeno un elettrone
 - Elettroni liberi
- Normalmente il numero di ioni/elettroni liberi è molto piccolo
 - Nell'acqua pura la molecola H_2O si dissocia in H^+ OH^-
 - In condizioni normali ci sono circa 6×10^{13} ioni/cm³
 - $\text{pH} = 7$ pari a 10^{-7} moli/litro = 10^{-10} moli/cm³ e 1 mole = 6×10^{23}
 - Gli ioni/elettroni presenti nell'acqua pura sono responsabili della conduttività dell'acqua
 - Per l'acqua pura la conduttività è $\sigma = 4 \times 10^{-6} \text{ (ohm-m)}^{-1}$
 - Sciogliere un sale nell'acqua aumenta il numero di ioni
 - Ad esempio aggiungendo NaCl si arriva a circa 10^{20} ioni/cm³ (Na^+ Cl^-)
 - In un conduttore come il rame ci sono circa 8×10^{22} e/cm³ (vedi diapositiva 148)
 - In un gas ci sono pochissimi ioni, virtualmente zero
 - Una piccola concentrazione di ioni è dovuta alla radioattività naturale

Modello della conduzione

- Consideriamo adesso un gas che contiene ioni liberi di massa m
 - Supponiamo che la densità sia dell'ordine di 10^{25} atomi/m³
 - Gli ioni si muovono liberamente all'interno della sostanza
 - Nelle condizioni di densità date la distanza media fra due molecole è dell'ordine di 10^{-8} m pari a un centinaio di raggi molecolari (10^{-10} m)
 - Nel loro moto caotico urtano con le molecole
 - Sono troppo pochi per urtare fra di loro
 - Chiamiamo l_k la distanza percorsa fra l'urto k e $k+1$
 - Naturalmente le distanze l_k sono tutte diverse
 - Si definisce libero cammino medio λ

$$\lambda = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N l_k$$

- Il libero cammino medio dipende dalla natura del gas e dalle sue condizioni termodinamiche (temperatura, densità ...)
 - Il libero cammino medio di uno ione può essere dell'ordine di 10^{-7} m
 - Molto maggiore della distanza media fra molecole
- Abbiamo definito il libero cammino medio seguendo il moto di un singolo ione
 - Avremmo potuto definire una media a un dato istante su tutti gli ioni



Sezione d'urto

- Vogliamo adesso definire e calcolare la probabilità di un urto

- Supponiamo che un elettrone si muova all'interno di un reticolo di ioni del metallo

- Descriviamo gli elettroni come sfere rigide di raggio r_1 e gli ioni come sfere rigide di raggio r_2

- Avviene un urto se la distanza d fra i centri delle sfere è inferiore alla somma dei raggi

- Per calcolare la probabilità di interazione supponiamo di "guardare" attraverso uno spessore dz del cristallo

- Intuitivamente la probabilità di interazione dipende dal rapporto fra l'area occupata dai nuclei e l'area del corpo
 - Bisognerebbe tenere conto della dimensione dell'elettrone
 - Lo facciamo assumendo l'elettrone puntiforme e il raggio del nucleo uguale a $r_1 + r_2 = R$

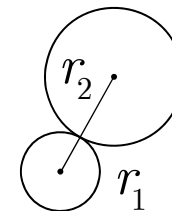
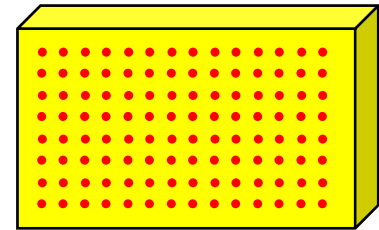
- Supponiamo che il corpo abbia un'area S , uno spessore dz e che i suoi dati atomici siano numero di massa A e densità ρ

- La densità di ioni (bersagli) è

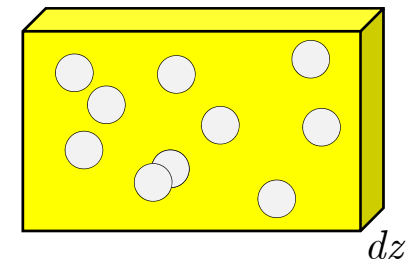
$$\rho_B = \frac{\rho}{A} N_A$$

- In numero di bersagli nel volume Sdz è

$$n_B = \rho_B Sdz = \frac{\rho}{A} N_A Sdz$$



$$d \leq r_1 + r_2$$



Sezione d'urto

- Consideriamo adesso

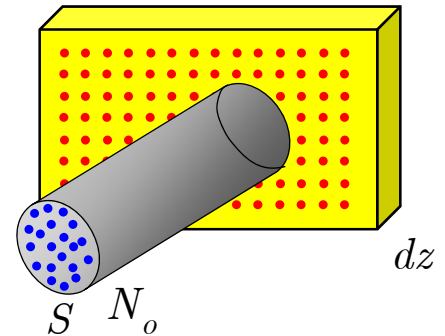
- Un bersaglio di spessore dz e densità $\rho_B = \frac{\rho}{A} N_A$ (bersagli per unità di volume)

- Un fascio di particelle di area S

- L'area del corpo in cui può avvenire l'interazione è solo S

- Chiamiamo N_0 il numero di particelle incidenti e σ l'area dei bersagli: $\sigma = \pi R^2$

- La frazione f di area "occupata dai nuclei è $f = \frac{n_B \sigma}{S} = \frac{\rho}{A} N_A S dz \frac{\sigma}{S} = \frac{\rho}{A} N_A \sigma dz$



- La frazione f è proprio la probabilità che cerchiamo

- Il numero di particelle che interagiscono è $dn = f N_0 = N_0 \frac{\rho}{A} N_A \sigma dz$

- L'area σ prende il nome di sezione d'urto

- Lo stesso concetto può essere utilizzato anche quando proiettile e bersaglio non si toccano

- L'interazione avviene tramite un campo

- Elettrico, gravitazionale ...

- La teoria del campo permette di calcolare la probabilità di interazione che permette di definire la sezione d'urto σ

- La sezione d'urto è un'area e si misura in m^2

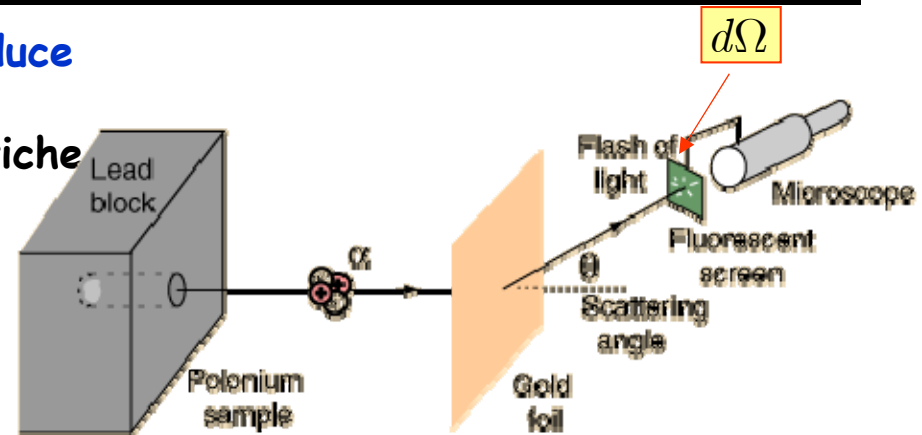
$[\sigma] = L^2$ Unità di misura barn

1 barn = 10^{-24} cm^2



Sezione d'urto differenziale

- La sezione d'urto differenziale si introduce quando si vuole studiare la dipendenza della sezione d'urto da variabili cinematiche
 - Nel caso più semplice dagli angoli
- Se invece di considerare tutte le interazioni si considerano solo quelle che producono una particella nello stato finale in un angolo solido $d\Omega$



$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$

$$dn(\theta, \phi) = N_o \rho_B dz \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

$$d\Omega = d\phi \sin \theta d\theta$$

- L'unità di misura della sezione d'urto differenziale è barn per steradiante b/sr
 - La sezione d'urto differenziale e la sezione d'urto totale sono legate

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

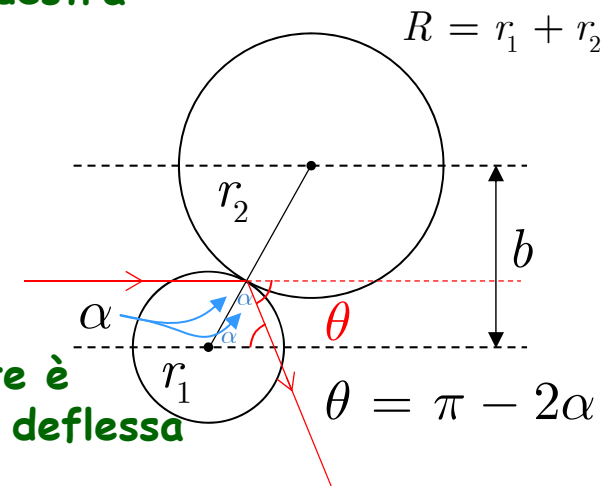
- Spesso non c'è dipendenza da ϕ

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$$

$$dn(\theta) = N_o \rho_B dz \frac{d\sigma}{d \cos \theta} d \cos \theta$$

Urto elastico di sfere

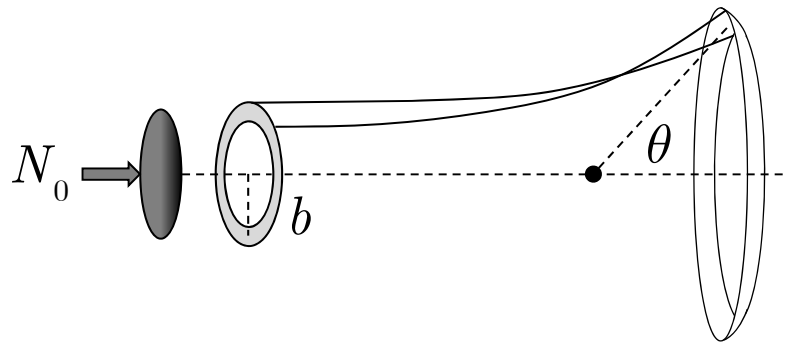
- Ritorniamo al problema degli urti degli elettroni con il reticolo
- Possiamo assumere che gli urti siano elastici
 - Nell'urto si conserva l'energia e la quantità di moto
- Schematizziamo le due particelle in collisione come sfere rigide
- Vogliamo calcolare la sezione d'urto differenziale
 - L'obiettivo è calcolare la distribuzione angolare degli elettroni dopo l'urto
 - Consideriamo due sfere rigide di raggi r_1 e r_2
 - La sfera di raggio r_1 si muove da sinistra verso destra
 - La sfera di raggio r_2 è ferma
 - Definiamo il parametro d'impatto b
 - La distanza fra due rette parallele alla velocità e passanti per i centri
 - Consideriamo la normale alle sfere passante per il punto di contatto
 - L'angolo α fra la normale e la direzione incidente è uguale all'angolo α fra la normale e la direzione deflessa
 - Definiamo l'angolo di deflessione θ
 - La relazione fra b e θ è univoca



$$\alpha + \alpha + \theta = \pi \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \quad b = R \sin \alpha = R \cos \frac{\theta}{2}$$

Urto elastico di sfere

- Per calcolare la sezione d'urto differenziale dell'urto fra due sfere rigide supponiamo che ci sia un flusso uniforme di particelle N_0
- Uniformemente distribuite su una superficie
 - $N_0 =$ particelle per unità di superficie



$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$$

$$b = R \cos \frac{\theta}{2}$$

- Consideriamo un centro diffusore
- Consideriamo inoltre l'angolo solido $d\Omega$ sotteso dall'anello di sfera centrato sul centro diffusore
- Ci chiediamo quante particelle sono deflesse nell'angolo solido $d\Omega$
- L'angolo di deflessione dipende dal parametro di impatto
 - Le particelle diffuse nell'angolo solido $d\Omega$ ad angolo θ sono quelle che hanno parametro di impatto $b(\theta)$
 - Contenute nella corona circolare di raggio b

Sezione d'urto differenziale

- Le particelle deflesse in $d\Omega$ sono le stesse che attraversano la corona dS

$$dS = 2\pi b db \quad dN = 2\pi b db N_0$$

- Per definizione di sezione d'urto

$$dN = N_0 \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad \text{uguagliando} \quad 2\pi b db N_0 = -N_0 \frac{d\sigma}{d\Omega} 2\pi \sin \theta d\theta$$

- Il segno meno perché ad un $d\theta$ positivo corrisponde un db negativo

$$b db = -\frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta}$$

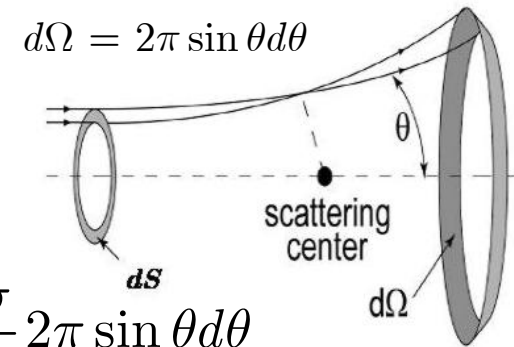
$$b = R \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{-1}{\sin \theta} R \cos \frac{\theta}{2} \left(-R \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{4} \frac{2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} R^2 = \frac{R^2}{4}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}$$

- Vediamo che la sezione d'urto non dipende da θ
- La particella ha una probabilità uniforme di essere stata deflesse in una direzione qualunque

La particella ha perso la memoria della direzione iniziale



Modello della conduzione

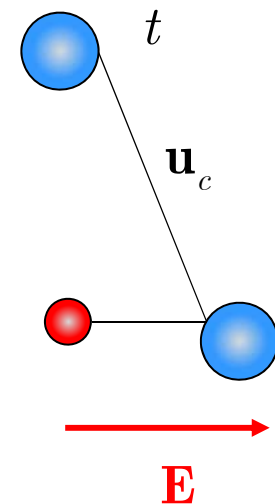
- Assumiamo che gli ioni siano sfere rigide e che nell'urto elastico la particella incidente perda memoria della sua direzione iniziale
 - Nel caso più generale di un urto questo potrebbe essere non vero
 - Ad esempio se l'urto fosse mediato da un potenziale di Coulomb
 - Tuttavia la memoria della direzione iniziale viene persa rapidamente
 - Una trattazione statistica degli urti mostrerebbe che esiste un tempo t_c dopo il quale la correlazione fra direzione iniziale e finale si perde
 - In un tempo t_c ci possono essere tanti urti
 - Naturalmente il tempo t_c dipende dallo ione, dalla sostanza, dalle condizioni termodinamiche
- Pertanto se in dato momento uno ione ha una velocità u , dopo un certo numero di collisioni avrà una velocità u' la cui direzione interseca uniformemente una sfera centrata sulla posizione dello ione
- Per semplificare la trattazione possiamo supporre che questa condizione si verifichi dopo ogni urto
 - Non sarebbe necessario ma la trattazione sarebbe più complicata
 - In pratica stiamo supponendo che le particelle siano sfere rigide

Modello della conduzione

- Supponiamo adesso di applicare un campo elettrico E uniforme al gas debolmente ionizzato descritto precedentemente
 - Supponiamo che subito dopo un urto lo ione abbia una velocità u_c completamente scorrelata da quella che aveva prima dell'urto
 - Supponiamo che prima dell'urto successivo passi un tempo t
 - In questo tempo il campo elettrico esercita una forza eE
 - Al tempo t lo ione avrà una quantità di moto

$$p = mu_c + eEt$$

- Abbiamo visto prima che le velocità di agitazione termica sono molto maggiori della velocità di deriva
 - Possiamo supporre che la variazione di quantità di moto impartita dal campo elettrico non modifichi la probabilità delle interazioni successive
- Se in un istante di tempo arbitrario potessimo esaminare lo stato di tutti gli ioni scopriremmo
 - Che lo ione j ha subito una collisione t_j secondi prima
 - La sua quantità di moto è $p_j = mu_{jc} + eEt_j$
 - La velocità u_{jc} è in una direzione casuale



Modello della conduzione

- Calcoliamo la quantità di moto media degli ioni

$$\bar{\mathbf{p}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{p}_j = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (m\mathbf{u}_{jc} + e\mathbf{E}t_j)$$

- Esaminiamo i due termini

- Il primo

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N m\mathbf{u}_{jc}$$

È nullo: le velocità $\mathbf{u}_{jc}$ sono in tutte le direzioni casualmente

- Il secondo

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e\mathbf{E}t_j = e\mathbf{E} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N t_j = e\mathbf{E}\tau$$

Abbiamo definito il tempo medio fra le collisioni τ

$$\tau = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N t_j$$

- Tramite la quantità di moto media definiamo la velocità di deriva

$$\bar{\mathbf{p}} = m\bar{\mathbf{v}}_d = e\mathbf{E}\tau$$

$$\bar{\mathbf{v}}_d = \frac{e\tau}{m} \mathbf{E}$$

- Pertanto in presenza di un campo elettrico gli ioni acquistano una velocità nella direzione del campo e proporzionale al campo stesso

- Notiamo che è la velocità a essere proporzionale a $\mathbf{E}$, non l'accelerazione

- Definiamo infine la mobilità dello ione

$$\mu = \frac{e\tau}{m}$$

$$\bar{\mathbf{v}}_d = \mu \mathbf{E}$$

$$[\mu] = \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$$

Medie d'insieme e medie temporali

- Vale la pena fare un'interessante osservazione
 - Il valore medio che abbiamo calcolato è fatto "osservando" tutti gli ioni in un dato istante di tempo
 - Una sorta di "fotografia"
 - Questo tipo di media prende il nome di "media di insieme"
 - L'ipotesi, molto naturale, è che tutti gli ioni abbiano le stesse caratteristiche fisiche
- Sarebbe possibile un altro tipo di media, concettualmente differente
 - Si potrebbe seguire un singolo ione in un grande numero di urti successivi
 - In questo caso il tempo t_j è l'intervallo di tempo trascorso fra la collisione j e la collisione $j+1$
 - La media viene fatta sulla "storia" del singolo ione
 - Questo tipo di media prende il nome di "media temporale"
- A priori non è detto che le due medie diano lo stesso risultato
 - I processi statistici (processi stocastici) per i quali le due medie danno lo stesso risultato si chiamano processi ergodici

Modello della conduzione

- Ritorniamo al nostro modello della conduzione
 - Abbiamo trovato che sotto l'effetto del campo elettrico gli ioni si muovono in media nella direzione del campo applicato con una velocità

$$\bar{\mathbf{v}}_d = \frac{e\tau}{m} \mathbf{E}$$

- Prende il nome di velocità di deriva
- Osserviamo che la forza e la velocità sono proporzionali
- Una relazione simile si ha per le forze di attrito durante il moto in un fluido viscoso

$$\mathbf{F}_a = -k\mathbf{v}$$

- In questo tipo di moto la particella raggiunge una velocità terminale quando la forza di attrito risulta uguale alla forza esterna
 - Ad esempio la velocità terminale di caduta nell'atmosfera
- Nel nostro caso potremmo riscrivere l'equazione come $e\mathbf{E} - \frac{m}{\tau} \bar{\mathbf{v}}_d = 0$
 - Possiamo pertanto interpretare la velocità di deriva come la velocità terminale di una particella in un fluido viscoso
- L'osservazione fatta è più di una semplice analogia
 - Nel moto descritto lo ione dissipa energia (come vedremo fra poco)

Modello della conduzione

- Richiamiamo la formula per la densità di corrente (diapositiva [362](#))

$$\mathbf{J} = -en_e \bar{\mathbf{u}}$$

- Riscriviamola utilizzando la formula per la velocità di deriva trovata in precedenza

$$\bar{\mathbf{v}}_d = \frac{e\tau}{m} \mathbf{E} = \mu \mathbf{E}$$

- Supponiamo di avere ioni positivi e ioni negativi
 - Le masse, i tempi medi di collisione e le mobilità sono rispettivamente: $m^+, m^-, \tau^+, \tau^-, \mu^+, \mu^-$
 - Chiamiamo n la densità (uguale) di ioni (positivi e negativi)
- La densità di corrente è

$$\mathbf{J} = ne \frac{\tau_+}{m_+} e \mathbf{E} + n(-e) \frac{\tau_-}{m_-} (-e) \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = ne \left(\frac{e\tau_+}{m_+} + \frac{e\tau_-}{m_-} \right) \mathbf{E} = ne (\mu_+ + \mu_-) \mathbf{E}$$

- In questo modello la conduttività è

$$\sigma = ne (\mu_+ + \mu_-)$$

Modello della conduzione

- Vale la pena sottolineare che le ipotesi essenziali per giungere alla legge di proporzionalità fra la densità di corrente J e il campo elettrico E sono state
 - Densità dei portatori di carica rimane costante
 - Meccanismo dell'urto che fa perdere memoria della direzione della velocità
- Se si verificano queste ipotesi si arriva alla legge di Ohm
 - Naturalmente il nostro modello non predice il valore del tempo medio fra le collisioni τ
 - Né tantomeno predice se τ dipende dalla velocità del portatore di carica
- In generale una teoria per poter predire τ è molto complessa
 - Si utilizzano metodi di Meccanica Statistica e Termodinamica
 - Occorre una teoria della struttura della materia
 - Si utilizza la cosiddetta equazione del trasporto
- Possiamo addirittura dire che una teoria per predire la conduttività di una sostanza è nient'altro che una teoria per predire τ
- Non faremo altri approfondimenti di questo interessante argomento

Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 19 – 08.03.2022

Campo all'esterno del filo
Forza elettromotrice
Batteria ricaricabile

Anno Accademico 2022/2023
