
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

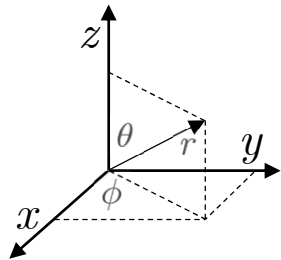
Lezione n. 16 - 1.12.2022

Sfera di dielettrico in campo uniforme
Carica puntiforme e semispazio dielettrico

Anno Accademico 2022/2023

Sfera di dielettrico in campo uniforme

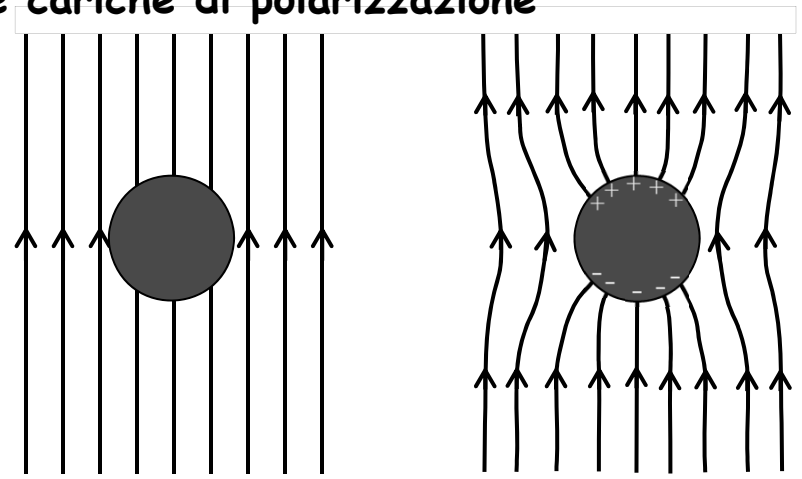
- Consideriamo una sfera di dielettrico posta in un campo elettrico uniforme
 - Dielettrico lineare, omogeneo e isotropo
 - È un problema analogo a quello della sfera conduttrice in campo uniforme che abbiamo affrontato in precedenza (vedi diapositiva [190](#))
 - Utilizziamo il metodo della separazione delle variabili in coordinate sferiche
 - C'è simmetria azimutale (V indipendente da ϕ)
 - Qualitativamente possiamo dire che il campo elettrico polarizza il dielettrico
 - Sulla superficie della sfera compare una carica superficiale
 - Il campo uniforme è distorto
 - Il campo rimane uniforme all'infinito
 - All'interno della sfera il campo elettrico è dato dalla somma del campo esterno e del campo generato dalle cariche di polarizzazione



$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$



Sfera di dielettrico in campo uniforme

- Esprimiamo il potenziale all'esterno e all'interno utilizzando la formula utilizzata per il problema della sfera conduttrice

$$V_{\text{out}}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad V_{\text{in}}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

- La seconda formula è necessaria perché adesso stiamo risolvendo il problema elettrostatico in due regioni con permittività diverse (ε sfera - ε_0 vuoto)
- Le condizioni al contorno sono

- All'infinito campo uniforme

$$V_{\text{out}}(z) \rightarrow -E_0 z + V_0$$

- Potenziale continuo sulla sfera

$$V_{\text{out}}(r_0, \theta) = V_{\text{in}}(r_0, \theta)$$

- Discontinuità della componente normale

$$\varepsilon \frac{\partial V_{\text{in}}(r_0, \theta)}{\partial n} = \varepsilon_0 \frac{\partial V_{\text{out}}(r_0, \theta)}{\partial n}$$

- Assumendo come nel caso della sfera conduttrice $V_0 = 0$, la prima condizione permette di porre a zero tutti gli A_l escluso $A_1 = -E_0$ ($P_1(\cos \theta) = \cos \theta$)
- Inoltre, poiché al centro della sfera il potenziale deve essere finito si ha che per tutti gli l deve essere $D_l = 0$

$$V_{\text{out}}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad V_{\text{in}}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_l(\cos \theta)$$

Sfera di dielettrico in campo uniforme

$$V_{\text{out}}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) \quad V_{\text{in}}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_l(\cos \theta)$$

- La condizione di continuità diventa

$$V_{\text{out}}(r_0, \theta) = V_{\text{in}}(r_0, \theta) \longrightarrow -E_0 r_0 P_1(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r_0^{l+1}} P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r_0^l P_l(\cos \theta)$$

- L'uguaglianza implica che per ogni l devono essere uguali i coefficienti dei corrispondenti polinomi di Legendre P_l ($P_1 = \cos \theta$)

- Per $l = 1$
$$-E_0 r_0 P_1 + \frac{B_1}{r_0^2} P_1 = C_1 r_0 P_1 \quad -E_0 r_0 + \frac{B_1}{r_0^2} = C_1 r_0$$

$$C_1 = -E_0 + \frac{B_1}{r_0^3}$$

- Per $l \neq 1$
$$\frac{B_l}{r_0^{l+1}} P_l = C_l r_0^l P_l \quad \frac{B_l}{r_0^{l+1}} = C_l r_0^l$$

$$B_l = C_l r_0^{2l+1}$$

Sfera di dielettrico in campo uniforme

- Veniamo adesso alla condizione di discontinuità
- Ricordiamo che sulla sfera $\partial/\partial n = \partial/\partial r$

$$\varepsilon \frac{\partial V_{\text{in}}(r_0, \theta)}{\partial n} = \varepsilon_0 \frac{\partial V_{\text{out}}(r_0, \theta)}{\partial n}$$

$$\frac{\partial V_{\text{out}}}{\partial r} = -E_0 \cos \theta - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(l+1)B_l}{r^{l+2}} P_l(\cos \theta) \quad \frac{\partial V_{\text{in}}}{\partial r} = \sum_{l=1}^{\infty} l C_l r^{l-1} P_l(\cos \theta)$$

- Ancora una volta uguagliamo i coefficienti dei polinomi di Legendre dello stesso ordine l

- Per $l = 1$ $-\varepsilon_0 E_0 P_1 - \varepsilon_0 \frac{2B_1}{r_0^3} P_1 = \varepsilon C_1 P_1$

$$\boxed{-E_0 - \frac{2B_1}{r_0^3} = \kappa C_1} \quad \kappa = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

- Per $l \neq 1$ $-\varepsilon_0 (l+1) \frac{B_l}{r_0^{l+2}} P_l = \varepsilon l r_0^{l-1} C_l P_l$

$$\boxed{B_l = -\kappa \frac{l}{l+1} r_0^{2l+1} C_l}$$

- Confrontiamo con la precedente equazione per $l \neq 1$ $B_l = C_l r_0^{2l+1}$

- Concludiamo che

- Per $l = 0 \rightarrow B_0 = 0$

- Da $B_0 = 0$ segue che $C_0 = 0$

- Per $l \neq 0, 1$ le due relazioni per B_l implicano che

$$\boxed{B_l = C_l = 0}$$

Sfera di dielettrico in campo uniforme

- Esaminiamo infine le due equazioni trovate per $l = 1$

$$C_1 = -E_0 + \frac{B_1}{r_0^3} \qquad -E_0 - \frac{2B_1}{r_0^3} = \kappa C_1$$

- Eliminiamo C_1 inserendo la prima equazione nella seconda

$$-E_0 - \frac{2B_1}{r_0^3} = -\kappa E_0 + \kappa \frac{B_1}{r_0^3} \qquad (\kappa - 1)E_0 = \frac{2B_1}{r_0^3} + \kappa \frac{B_1}{r_0^3}$$

$$(\kappa - 1)E_0 r_0^3 = (\kappa + 2)B_1$$

$$B_1 = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} E_0 r_0^3$$

- Per finire inseriamo il valore trovato per B_1 nell'equazione di C_1

$$C_1 = -E_0 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} E_0 = \frac{\kappa - 1 - \kappa - 2}{\kappa + 2} E_0 = -\frac{3}{\kappa + 2} E_0$$

$$C_1 = -\frac{3}{\kappa + 2} E_0$$

- Abbiamo trovato il potenziale

$$V_{\text{out}}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} E_0 r_0^3 \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$V_{\text{in}}(r, \theta) = -\frac{3}{\kappa + 2} E_0 r \cos \theta$$

Sfera di dielettrico in campo uniforme

$$V_{\text{out}}(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} E_0 r_0^3 \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$V_{\text{in}}(r, \theta) = -\frac{3}{\kappa + 2} E_0 r \cos \theta$$

- **Calcoliamo le componenti del campo elettrico**

- **All'interno**

$$E_r = \frac{3}{\kappa + 2} E_0 \cos \theta \quad E_\theta = -\frac{3}{\kappa + 2} E_0 \sin \theta$$

$$\mathbf{E} = \frac{3}{\kappa + 2} \mathbf{E}_0$$

Campo uniforme

- **All'esterno**

$$E_r = E_0 \cos \theta + 2 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} E_0 r_0^3 \frac{\cos \theta}{r^3}$$

Campo uniforme

$$E_\theta = -E_0 \sin \theta + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} E_0 r_0^3 \frac{\sin \theta}{r^3}$$

Campo dipolo

- **Sulla superficie della sfera**

$$E_r = \left(1 + 2 \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} \right) E_0 \cos \theta = \frac{3\kappa}{\kappa + 2} E_0 \cos \theta$$

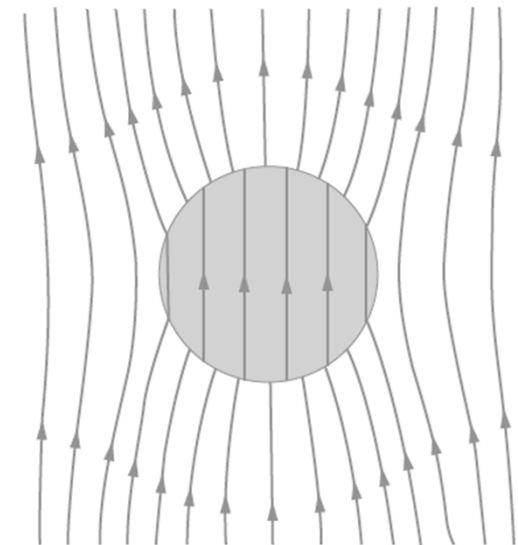
$$E_\theta = \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} - 1 \right) E_0 \sin \theta = -\frac{3}{\kappa + 2} E_0 \sin \theta$$

Componente tangenziale continua

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

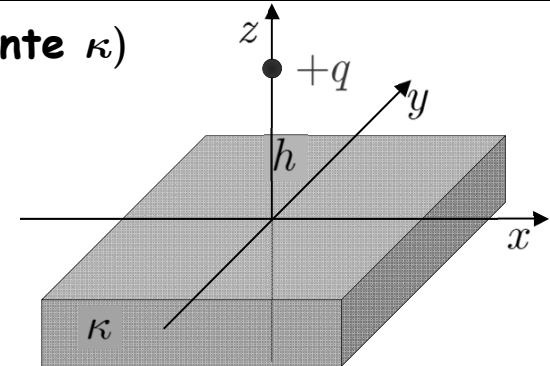
Polarizzazione uniforme

$$\mathbf{P} = (\kappa - 1) \varepsilon_0 \mathbf{E}$$



Carica e dielettrico

- Consideriamo un materiale dielettrico lineare (di costante κ) che riempie tutto lo spazio per $z < 0$
 - Consideriamo una carica positiva $+q$ posta ad una altezza h
 - Calcoliamo potenziale e campo elettrico in tutto lo spazio
-
- Il problema può essere risolto considerando
 - Una soluzione particolare dell'equazione Poisson
 - Il potenziale di una carica puntiforme posta in $\mathbf{r}_+ = h\hat{\mathbf{e}}_z$
 - Una soluzione dell'equazione di Laplace che consenta di soddisfare le condizioni al contorno
 - Potenziale che si annulla all'infinito
 - Potenziale continuo sul piano $z = 0$
 - Discontinuità delle derivate normali



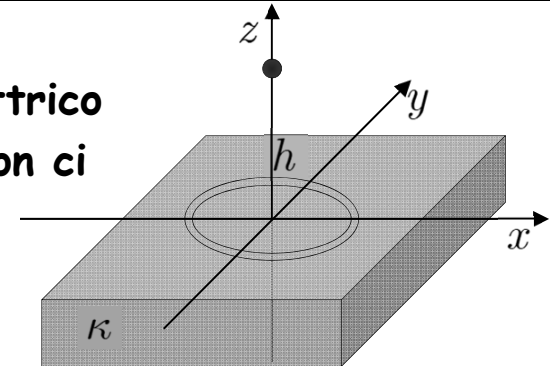
$$\varepsilon_0 \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{z \rightarrow 0^+} = \kappa \varepsilon_0 \left. \frac{\partial \phi}{\partial n} \right|_{z \rightarrow 0^-}$$

- Risolviamo questo problema con una generalizzazione del metodo delle immagini

Carica e dielettrico

- Descriviamo qualitativamente cosa succede
 - La carica $+q$ genera un campo che polarizza il dielettrico
 - Il dielettrico è lineare: $\nabla \cdot \mathbf{P} = \chi_e \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \rightarrow$ non ci sono cariche di polarizzazione di volume
 - Compare una carica superficiale di polarizzazione sul piano di separazione dielettrico - vuoto

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$



- Il campo elettrico in tutto lo spazio è la somma di due campi elettrici
 - Il campo $\mathbf{E}'$ generato dalla densità di carica superficiale
 - Il campo $\mathbf{E}''$ generato dalla carica puntiforme
 - È il problema equivalente nel vuoto del problema iniziale
 - La densità di carica superficiale è determinata dalla polarizzazione ed è da calcolare

- Dato che il dielettrico è lineare

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = (\kappa - 1) \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

- Per effetto della polarizzazione compare una densità superficiale di carica
 - La densità di carica superficiale ha una simmetria azimutale
 - È determinata dalla componente normale del vettore $\mathbf{P}$

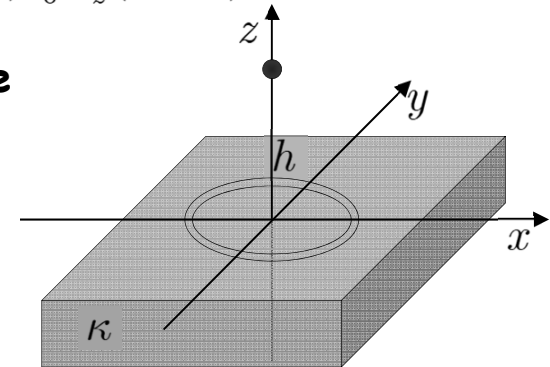
$$\sigma_p(x, y) = \mathbf{P}(x, y, 0) \cdot \hat{\mathbf{n}} = P_z(x, y, 0) = (\kappa - 1) \varepsilon_0 E_z(x, y, 0)$$

Carica e dielettrico

$$\sigma_P(x, y) = \mathbf{P}(x, y, 0) \cdot \hat{\mathbf{n}} = P_z(x, y, 0) = (\kappa - 1)\varepsilon_0 E_z(x, y, 0)$$

- Il campo elettrico E_z che compare è il campo totale
- La componente normale del campo elettrico $E'_z(x, y)$ dovuto alla densità superficiale di carica $\sigma_P(x, y)$ è

$$E'_z(x, y, 0) = \frac{\sigma_P(x, y)}{2\varepsilon_0}$$



- Per convincerci della correttezza di questa espressione osserviamo che
 - La carica superficiale è equivalente all'effetto del dielettrico
 - Il campo elettrico generato dalla densità superficiale di carica ha la seguente simmetria

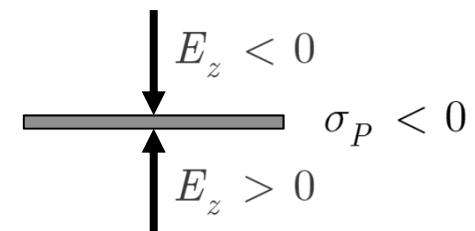
$$\mathbf{E}'_{\perp}(x, y, z) = -\mathbf{E}'_{\perp}(x, y, -z) \quad \mathbf{E}'_{\parallel}(x, y, z) = \mathbf{E}'_{\parallel}(x, y, -z)$$

- Infine, come per tutti i campi elettrici, sappiamo che la componente normale ha una discontinuità attraverso lo strato di carica

$$\Delta \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\sigma_P}{\varepsilon_0} \hat{\mathbf{e}}_z$$

- Possiamo pertanto concludere che

$$E'_z(x, y, 0) = \frac{\sigma_P(x, y)}{2\varepsilon_0}$$



Carica e dielettrico

- La componente del campo elettrico $E''_z(x,y)$ dovuta alla carica elettrica $+q$ è

$$E''_z(x,y,0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2 + y^2 + h^2} \cos\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qh}{(x^2 + y^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- Abbiamo pertanto

$$\begin{aligned}\sigma_P(x,y) &= (\kappa - 1)\epsilon_0 E_z(x,y,0) \\ &= (\kappa - 1)\epsilon_0 [E'_z(x,y,0) + E''_z(x,y,0)]\end{aligned}$$

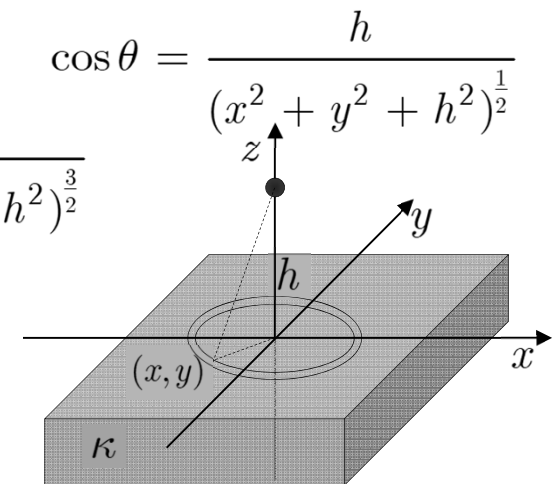
$$\sigma_P(x,y) = (\kappa - 1) \left[-\frac{\sigma_P(x,y)}{2} - \frac{1}{4\pi} \frac{qh}{(x^2 + y^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

- Possiamo determinare la densità di carica superficiale σ_P

$$\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2}\right) \sigma_P(x,y) = -\frac{\kappa - 1}{4\pi} \frac{qh}{(x^2 + y^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\sigma_P(x,y) = -\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{1}{2\pi} \frac{qh}{(x^2 + y^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- Osserviamo che, a meno del fattore dipendente dalla costante dielettrica, è la stessa densità di carica trovata nella diapositiva [220](#)
 - Piano conduttore infinito e carica puntiforme con il metodo della carica immagine



Carica e dielettrico

- Nel caso della carica puntiforme e piano conduttore avevamo trovato

$$-\frac{hq}{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{(r^2 + h^2)^{3/2}} 2\pi r dr = -q$$

- La carica superficiale di polarizzazione è pertanto

$$q_P = -\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} q$$

- Il potenziale del campo elettrico è

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi'(\mathbf{r}) + \phi''(\mathbf{r})$$

$$\phi''(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - h\hat{\mathbf{e}}_z|}$$

$$\phi'(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{piano}} \frac{\sigma_P(x', y')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'$$

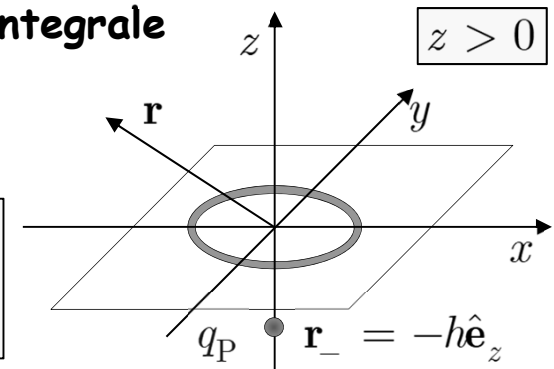
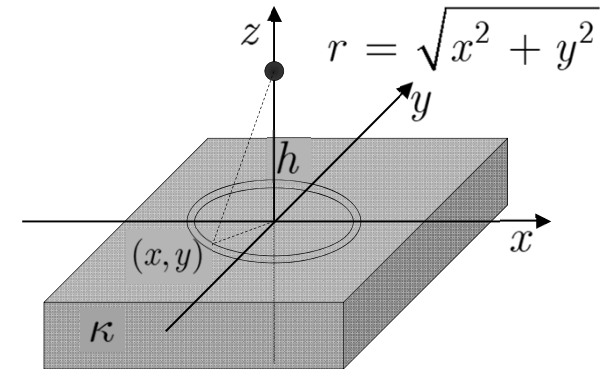
$$\sigma_P(x, y) = -\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{1}{2\pi} \frac{qh}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}$$

- Tuttavia esiste un metodo più semplice che calcolare l'integrale

- L'effetto dell'integrale è equivalente a porre una carica immagine $q_P < 0$ nella posizione $-h$

$$\phi'(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_P}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|}$$

$$\phi'(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_P}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}}$$



Carica e dielettrico

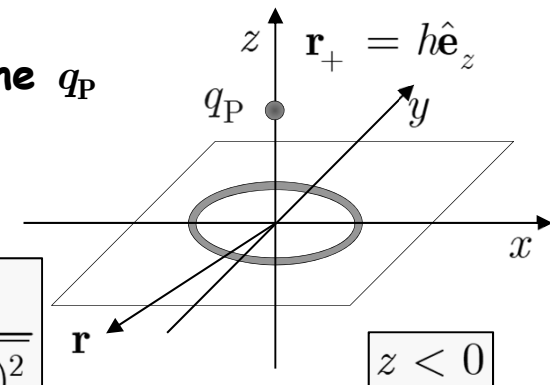
- Quindi il potenziale nel semispazio $z > 0$ è

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi'(\mathbf{r}) + \phi''(\mathbf{r})$$

$$q_P = -\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}q$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_P}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}}$$

- A differenza del problema della carica e il piano conduttore il campo nel semispazio $z < 0$ non è nullo
- Calcoliamo il potenziale per $z < 0$
 - C'è il campo della carica $+q$ posto a $\mathbf{r}_+$
 - C'è anche il campo dovuto alla carica di polarizzazione q_P
 - Questa volta calcolato nel semispazio $z < 0$
 - Equivalente ad una carica q_P posta nel punto $\mathbf{r}_+$



$$\phi'(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_P}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|}$$

$$\phi'(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_P}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}}$$

- Quindi il potenziale nel semispazio $z < 0$ è

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_P}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}}$$

Carica e dielettrico

- Riepilogando

$$q_P = -\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}q$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_P}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} \quad z > 0$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_P}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} \quad z < 0$$

- Il potenziale $\phi(\mathbf{r})$ soddisfa l'equazione di Poisson
 - Il termine dovuto a q per $z > 0$ soddisfa l'equazione di Poisson
 - Gli altri tre termini sono soluzioni dell'equazione di Laplace nei rispettivi domini

$$\phi(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q + q_P}{\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}} \quad z > 0$$

- Il potenziale è continuo per $z = 0$

$$\phi(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q + q_P}{\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}} \quad z < 0$$

- Il potenziale va a zero all'infinito
- Verifichiamo l'ultima condizione sulle derivate normali

Carica e dielettrico

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_P}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} \quad z > 0$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_P}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} \quad z < 0$$

- **Calcoliamo le derivate normali**

- **Ovviamente** $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial z}$

- **Iniziamo con** $z > 0$

$$q_P = -\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} q$$

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{2q_P(z + d)}{\left[x^2 + y^2 + (z + d)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{2q(z - d)}{\left[x^2 + y^2 + (z - d)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left. \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial z} \right|_{z=0^+} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_P d}{\left[x^2 + y^2 + d^2 \right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{-q d}{\left[x^2 + y^2 + d^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right] = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q_P - q)d}{\left[x^2 + y^2 + d^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$q_P - q = -\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} q - q = \frac{-2\kappa}{\kappa + 1} q$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0^+} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\kappa}{\kappa + 1} \frac{q d}{\left[x^2 + y^2 + d^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

Carica e dielettrico

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_P}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} \quad z > 0$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_P}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}} \quad z < 0$$

$$q_P = -\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} q$$

- Adesso il caso $z < 0$

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{2(q_P + q)(z - d)}{\left[x^2 + y^2 + (z - d)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0^-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q_P + q)d}{\left[x^2 + y^2 + d^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$q_P + q = -\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} q + q = \frac{2}{\kappa + 1} q$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0^-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{\kappa + 1} \frac{qd}{\left[x^2 + y^2 + d^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0^+} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\kappa}{\kappa + 1} \frac{qd}{\left[x^2 + y^2 + d^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

- E naturalmente

$$\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0^+} = \kappa \epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0^-}$$

Carica e dielettrico

- Naturalmente le due derivate calcolate sono anche, a meno del segno, la componente z del campo elettrico all'interfaccia

- La componente parallela è continua

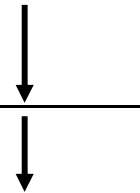
- Calcoliamo ad esempio E_x

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(q_P + q)x}{\left[x^2 + y^2 + (z-d)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{\kappa + 1} \frac{qx}{\left[x^2 + y^2 + (z-d)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\kappa}{\kappa + 1} \frac{qd}{\left[x^2 + y^2 + d^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{\kappa + 1} \frac{qd}{\left[x^2 + y^2 + d^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$



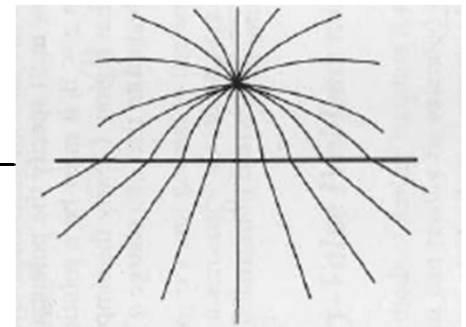
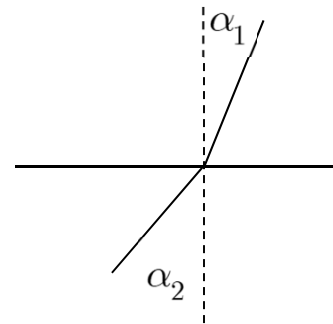
- Calcoliamo l'angolo che E fa con l'asse z , ad esempio nel piano $y = 0$

- Nel vuoto

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{E_x}{E_z} = \frac{\frac{2}{\kappa + 1} x}{\frac{2\kappa}{\kappa + 1} d} = \frac{1}{\kappa} \frac{x}{d}$$

- Nel dielettrico

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{E_x}{E_z} = \frac{\frac{2}{\kappa + 1} x}{\frac{2}{\kappa + 1} d} = \frac{x}{d}$$



Carica e dielettrico

- Per finire calcoliamo la forza che agisce sulla carica
 - La carica di polarizzazione è negativa
 - È equivalente ad una carica negativa q_P posta a distanza $-h$
 - La forza è attrattiva
 - La forza è

$$q_P = -\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}q$$

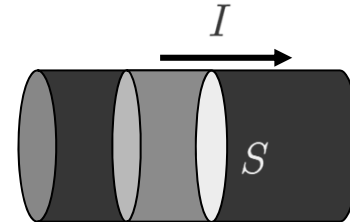
$$\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_P}{(2h)^2} \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{q^2}{(2h)^2} \hat{\mathbf{e}}_z$$

Corrente elettrica

- Cominciamo a studiare situazioni in cui le cariche sono in movimento
 - Per il momento ci limiteremo a movimenti "relativamente lenti"
 - Velocità piccole rispetto alla velocità della luce
 - Prima di iniziare a formulare le differenze nelle forze fra le cariche introduciamo una serie di nuovi concetti necessari per descrivere le cariche in movimento
- Un moto ordinato di portatori di carica costituisce una corrente elettrica
 - L'espressione "portatori di carica" è da intendere in un senso molto generale
 - Possono essere elettroni o ioni
 - Può essere materia "carica", ad esempio goccioline d'acqua nell'atmosfera
- In un filo di materiale conduttore la corrente elettrica è definita come la quantità di carica che attraversa la sezione del filo nell'unità di tempo
 - La corrente ha un segno convenzionale
 - È positiva se le cariche positive seguono la freccia
 - Supponendo che in un tempo Δt la carica ΔQ nel cilindretto blu attraversi la sezione del filo S (gialla)

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

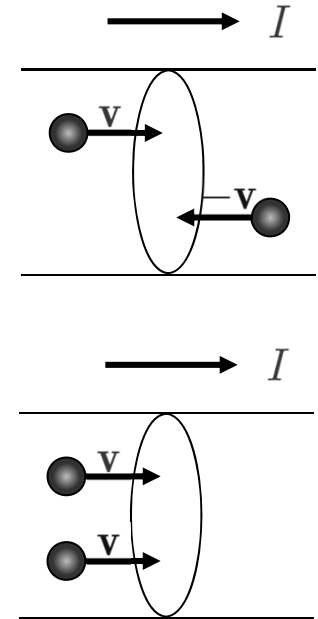


- Nel Sistema Internazionale l'unità di misura della corrente è l'Ampere (A)

$$1 \text{ A} = 1 \text{ Coulomb sec}^{-1}$$

Corrente elettrica

- È importante il flusso netto di carica
 - Definiamo il senso positivo della corrente
 - La carica rossa (positiva) contribuisce con segno +
 - La carica blu (negativa) contribuisce con segno -
 - Analogamente un atomo o molecola neutri non contribuiscono alla corrente nonostante trasportino carica
 - La carica rossa (positiva) contribuisce con segno +
 - La carica blu (negativa) contribuisce con segno -
- La corrente non deve necessariamente essere definita all'interno di un filo conduttore
 - Per una definizione più generale occorre la densità di corrente
 - Abbiamo già utilizzato questo concetto discutendo il flusso (diapositiva [86](#))
 - Avevamo discusso il flusso di materia (fluido)
 - Avevamo definito il vettore densità di corrente $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$
 - Avevamo visto che la quantità di materia che attraversa una superficie S nell'unità di tempo era data da



$$\phi = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} S$$