
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 15 - 25.12.2022

Problema elettrostatico con dielettrici
Condizioni di raccordo
Energia elettrostatica con dielettrici
Sfera di dielettrico polarizzata

Anno Accademico 2022/2023

Problema elettrostatico con i dielettrici

- Consideriamo un sistema composto da più dielettrici **lineari**
 - In ogni dielettrico vale la relazione siamo all'interno del dielettrico
escludiamo i confini

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \longrightarrow \quad \nabla \cdot \varepsilon \mathbf{E} = \rho_f \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f}{\varepsilon}$$

- Naturalmente vale sempre $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$
- Il campo elettrostatico $\mathbf{E}$ è sempre derivabile da un potenziale
- Possiamo utilizzare i metodi sviluppati per il calcolo del potenziale separatamente in ogni regione di dielettrico
 - Con le opportune condizioni di raccordo sulle superfici che delimitano i dielettrici sulle quali compaiono le densità superficiali di cariche
- In particolare, nelle regioni in cui $\rho_f = 0$ il potenziale obbedisce all'equazione di Laplace
- Notiamo che se all'interno di un dielettrico lineare non è presente una densità di carica libera ($\rho_f = 0$) anche la densità di carica di polarizzazione sarà nulla ($\rho_b = 0$)

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \varepsilon = \kappa \varepsilon_0 \quad \kappa = 1 + \chi_e \quad \longrightarrow \quad \mathbf{P} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \mathbf{D}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \nabla \cdot \mathbf{D} \quad \longrightarrow \quad -\rho_b = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \rho_f$$

Discontinuità e condizioni di raccordo

- Abbiamo visto che sulla superficie di un dielettrico compaiono densità superficiali di cariche di polarizzazione
 - Sappiamo che il campo elettrico ha delle discontinuità quando incontra strati di carica superficiale
- Analizziamo le discontinuità per i campi D , E
 - Abbiamo visto che il campo D obbedisce alla legge di Gauss

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = Q_f$$

- Applichiamo la legge intorno all'interfaccia fra due dielettrici
 - Supponiamo che non ci siano cariche libere sulla superficie: $Q_f = 0$

- Otteniamo per D (trascuriamo le superfici laterali)

$$(\mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2)A = 0 \quad D_{1\perp} - D_{2\perp} = 0 \quad \boxed{D_{1\perp} = D_{2\perp}}$$

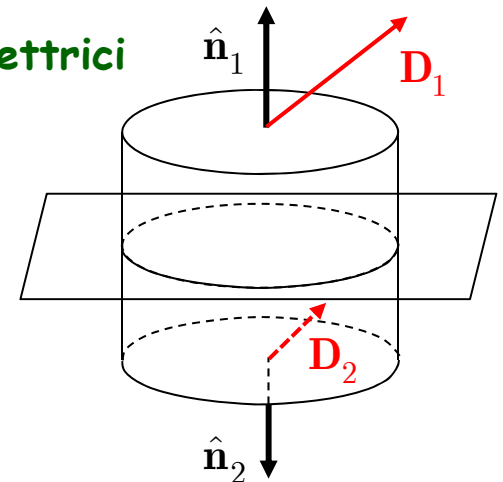
- Ricordando che per un dielettrico lineare si ha $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$



$$\boxed{\epsilon_1 E_{1\perp} = \epsilon_2 E_{2\perp}}$$

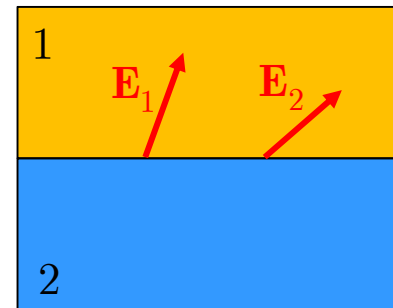
- Pertanto

- La componente normale del campo D è continua se non ci sono cariche libere
- La componente normale del campo elettrico E è discontinua



Discontinuità e condizioni di raccordo

- La condizione su $\mathbf{E}$ che abbiamo trovato per i dielettrici lineari può essere ottenuta senza l'uso del campo $\mathbf{D}$
 - Utilizziamo la proprietà del campo elettrico che conosciamo
 - Attraversando una densità di carica σ la componente normale ha una discontinuità $\Delta E_{\perp} = \sigma/\epsilon_0$
- Chiamiamo $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ i campi elettrici presenti all'interfaccia nel dielettrico 1 e 2 rispettivamente
 - Poiché i dielettrici sono lineari $\mathbf{P} = \chi\epsilon_0 \mathbf{E}$
- Dai lati 1 e 2 dell'interfaccia ci saranno le densità superficiali di cariche di polarizzazione



$$\sigma_1 = -P_{1\perp} = -\chi_1\epsilon_0 E_{1\perp} \quad \sigma_2 = P_{2\perp} = \chi_2\epsilon_0 E_{2\perp}$$

- Pertanto

$$E_{1\perp} - E_{2\perp} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\epsilon_0} \quad \epsilon_0 E_{1\perp} - \epsilon_0 E_{2\perp} = \chi_2\epsilon_0 E_{2\perp} - \chi_1\epsilon_0 E_{1\perp}$$

$$\epsilon_0 E_{1\perp} + \chi_1\epsilon_0 E_{1\perp} = \chi_2\epsilon_0 E_{2\perp} + \epsilon_0 E_{2\perp} \quad \epsilon_0 (1 + \chi_1) E_{1\perp} = \epsilon_0 (1 + \chi_2) E_{2\perp}$$

- Ricordiamo che $\kappa = 1 + \chi$ e che $\epsilon = \kappa\epsilon_0$

$$\epsilon_0 \kappa_1 E_{1\perp} = \epsilon_0 \kappa_2 E_{2\perp} \quad \epsilon_1 E_{1\perp} = \epsilon_2 E_{2\perp}$$

Discontinuità e condizioni di raccordo

- Possiamo generalizzare la condizione al contorno su $D_{\perp}$ al caso in cui nell'interfaccia sia presente carica libera

- La condizione precedente

$$(\mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2)A = 0 \quad D_{1\perp} - D_{2\perp} = 0$$

- Diventa

$$(\mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 + \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2)A = Q_f = \sigma_f A \quad D_{1\perp} - D_{2\perp} = \sigma_f$$

- Analizziamo infine il caso in cui l'interfaccia è fra un metallo e un dielettrico lineare

- In questo caso uno dei due materiali è un conduttore

- All'interno del conduttore

$$\mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{P} = 0 \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = 0$$

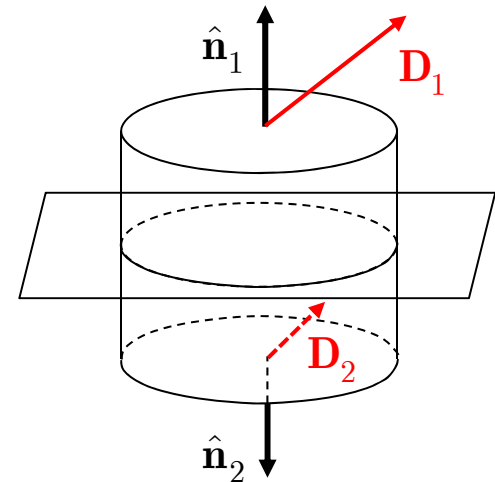
- Supponendo che il materiale conduttore sia il 2

$$\mathbf{D}_2 = 0 \quad D_{2\perp} = 0 \quad \longrightarrow \quad D_{1\perp} = \sigma_f$$

- Ricordiamo che $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$

- Pertanto, nel dielettrico, all'esterno del conduttore avremo

$$E_{1\perp} = \frac{\sigma_f}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_f}{\kappa \varepsilon_0}$$



Discontinuità e condizioni di raccordo

- Per quanto riguarda la componente tangenziale del campo elettrico questa è continua

$$E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$$

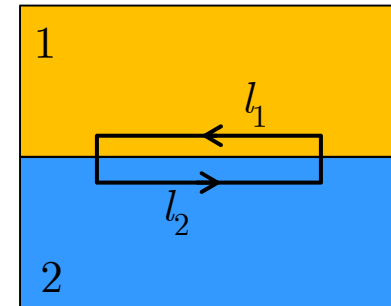
- Questa condizione deriva dal fatto che il campo elettrico è conservativo

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

- Infatti, considerando una linea chiusa intorno all'interfaccia, come in figura

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{2\parallel}l_2 - E_{1\parallel}l_1 = (E_{2\parallel} - E_{1\parallel})l = 0$$

$$E_{2\parallel} = E_{1\parallel}$$



- Per il potenziale le condizioni diventano

- Il potenziale è continuo attraverso l'interfaccia

V è l'integrale di $\mathbf{E}$

$$V_1(\mathbf{r}) = V_2(\mathbf{r})$$

Il vettore $\mathbf{r}$ varia sulla superficie di interfaccia dei dielettrici

- La derivata del potenziale (proporzionale a $\mathbf{E}$) è discontinua

- Se $\mathbf{n}$ è la normale alla superficie

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad E_n = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\phi \equiv -\frac{\partial\phi}{\partial n}$$

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp} \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_1 \frac{\partial\phi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial\phi_2}{\partial n}$$

N.B.: non ci sono cariche libere sull'interfaccia

Discontinuità e condizioni di raccordo

- Riepilogando

- Ricordiamo solo le condizioni al contorno per campo elettrico e potenziale

- Sono sufficienti per risolvere i problemi

- Per il campo elettrico

$$\varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp} \qquad E_{2\parallel} = E_{1\parallel}$$

- Per il potenziale

- Il potenziale è continuo attraverso l'interfaccia

$$V_1(\mathbf{r}) = V_2(\mathbf{r})$$

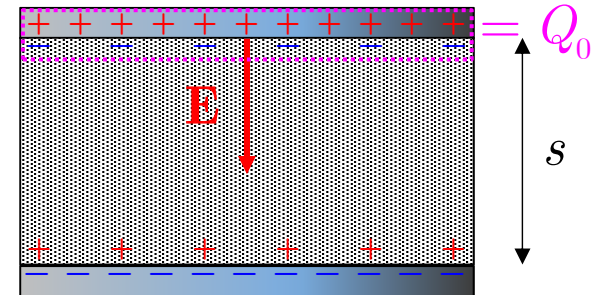
- Il vettore $\mathbf{r}$ varia sulla superficie di interfaccia fra i dielettrici

- La condizione sulla componente normale del campo diventa

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}$$

Energia elettrostatica

- Riprendiamo il problema del condensatore con dielettrico fra le armature (vedi diapositiva [300](#))
 - Ricordiamo che a parità di differenza di potenziale V il campo elettrico è sempre $E = V/s$
 - Inoltre la carica nella regione delle armature è Q_0 che è la somma algebrica
 - Della carica Q sulle armature ($Q = \kappa Q_0$)
 - Della carica di polarizzazione $Q_{\text{pol}} = -(\kappa - 1) Q_0$
 - Q_0 è la carica necessaria per avere una ddp V in assenza di dielettrico
- L'energia del condensatore è



$$C = \kappa \frac{\epsilon_0 A}{s} = \kappa C_0$$

- $$U = \frac{1}{2} C V^2$$
 - Rispetto al caso senza dielettrico l'energia è cresciuta $U = \kappa \frac{1}{2} C_0 V^2$
 - La capacità è cresciuta di un fattore κ
- D'altro canto abbiamo visto che l'energia può essere espressa come energia del campo elettrico

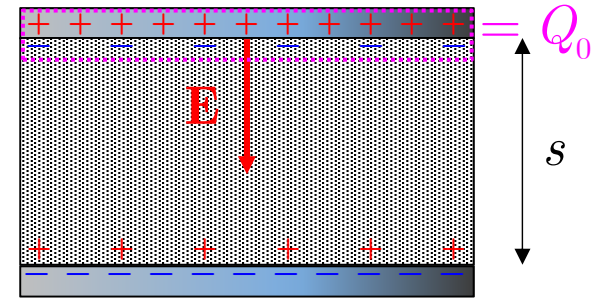
$$U_0 = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dv = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 A s = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{V^2}{s^2} A s = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{s} V^2 = \frac{1}{2} C_0 V^2$$

- Quale delle due espressioni è corretta?



Energia elettrostatica†

- La soluzione della contraddizione sta nel fatto che le due energie rappresentano cose differenti
- L'energia del campo elettrico rappresenta l'energia immagazzinata in un sistema di cariche (vedi 143)
 - L'energia necessaria per "costruire" la disposizione delle cariche (sia libere che di polarizzazione)
- L'energia del condensatore rappresenta invece il lavoro che è stato fatto
 - Per caricare il condensatore con una carica Q
 - Per polarizzare il dielettrico e fare in modo che fornisca una carica Q_{pol}
- Per polarizzare il dielettrico è necessario fare un lavoro
 - Il lavoro necessario per deformare gli atomi o le molecole
 - Il lavoro necessario per allineare i dipoli (più complicato - termodinamica)
- Analizziamo in maggiore dettaglio il problema
 - In particolare l'energia associata alla polarizzazione
- †Per ulteriori approfondimenti vedi: Das B., Ghosh A., Gupta-Bhaya P. - Electrostatic energy of a system of charges and dielectrics - Am.J.Phys. 63, p. 452 (1995)



Lavoro per polarizzare un atomo sferico

- La polarizzazione di un atomo sferico è stata discussa nella diapositiva [278](#)
- La forza (attrattiva) che la sfera di carica negativa (gli elettroni) esercita sul nucleo positivo è

$$F(z) = qE_e(z) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{R^3}$$

- Il lavoro fatto per allontanare il nucleo di una distanza d

$$w = \int_0^d F(z) dz = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \int_0^d z dz = \frac{1}{2} \frac{q^2 d^2}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

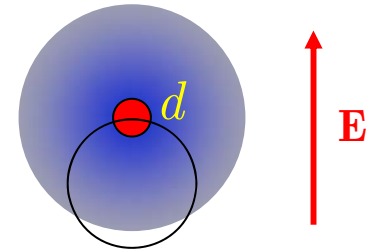
- Nella formula trovata

- Il momento di dipolo dell'atomo deformato è $p = qd$
- Il momento di dipolo dipende dal campo elettrico esterno E

$$qd = 4\pi\epsilon_0 R^3 E \quad \text{da cui} \quad w = \frac{1}{2} qd \frac{4\pi\epsilon_0 R^3 E}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{1}{2} pE$$

- Ricordiamo che la densità di atomi è $n(\mathbf{r})$
- Ricordiamo la definizione di polarizzazione $P = n(\mathbf{r}) p$
- Otteniamo la densità di energia di polarizzazione

$$u_P = n(\mathbf{r})w = \frac{1}{2} PE \quad \text{e infine l'energia spesa per polarizzare il corpo} \quad U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} dV$$



Energia elettrostatica

- Nel nostro caso (condensatore piano a tensione costante) abbiamo

- Dielettrico lineare, omogeneo e isotropo $P = (\kappa - 1)\varepsilon_0 E$

- L'energia associata alla polarizzazione è pertanto

$$U_{pol} = \frac{1}{2} \int_{VOL} P E dv = \frac{1}{2} P E A s = \frac{1}{2} (\kappa - 1) \varepsilon_0 E^2 A s$$

- Ricordiamo inoltre che $U_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 A s \quad \Rightarrow \quad U_{pol} = (\kappa - 1) U_0$
- Otteniamo infine

$$U = U_{pol} + U_0 = (\kappa - 1) U_0 + U_0 = \kappa U_0 = \frac{1}{2} \kappa C_0 V^2$$

- Vediamo pertanto esplicitamente i due contributi all'energia elettrostatica totale in presenza di dielettrici
- Troviamo adesso un sistema per esprimere l'energia elettrostatica totale con una formula analoga a quella dell'energia del campo elettrico

Energia elettrostatica

- Definiamo esattamente cosa vogliamo fare
 - Consideriamo lo stato finale che vogliamo ottenere
 - Un sistema di cariche libere descritto da una densità di carica ρ_f
 - Un dielettrico (lineare) polarizzato
 - Il sistema (ρ_f + dielettrico) genera un potenziale $\phi(\mathbf{r})$
- Per costruire questo sistema
 - Iniziamo da un sistema scarico: $\rho_f = 0$
 - Trasportiamo una carica $d\rho_f$ infinitesima dall'infinito nel nostro sistema
 - Disponiamo la carica $d\rho_f$ in modo che in ogni parte del sistema la densità di carica sia una frazione α di quella finale
$$\rho_\alpha(\mathbf{r}) = \alpha \rho_f(\mathbf{r}) \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad d\rho_f = \rho_f(\mathbf{r}) d\alpha$$
 - Per un dato valore di α la densità di carica libera è una frazione di quella finale
 - Dato che il dielettrico è lineare
 - Anche il potenziale elettrico $\phi_k(\mathbf{r}) = \alpha \phi(\mathbf{r})$ sarà una frazione di quello finale
$$\phi_\alpha(\mathbf{r}) = \alpha \phi(\mathbf{r})$$
 - Anche le cariche di polarizzazione saranno una frazione α di quelle finali
 - Anche i campi $\mathbf{P}$ e $\mathbf{D}$ saranno una frazione α di quelli finali

Energia elettrostatica

- Si può dimostrare che il lavoro dW fatto per trasportare la carica $d\rho_f$ è

$$dW = \int [\phi_\alpha(\mathbf{r}) d\rho_f(\mathbf{r})] d^3\mathbf{r}$$

- Sottolineiamo che il potenziale $\phi_\alpha(\mathbf{r})$ è generato anche dal dielettrico
 - Il lavoro dW è diverso da quello che si avrebbe senza il dielettrico
 - Il dielettrico è lineare e pertanto il lavoro dW indicato contiene anche il lavoro necessario per polarizzare il dielettrico

- Elaborando $dW = \int [\alpha\phi(\mathbf{r})\rho_f(\mathbf{r})d\alpha] d^3\mathbf{r} = \alpha d\alpha \int \phi(\mathbf{r})\rho_f(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$

$$W = \int_0^1 \alpha d\alpha \int \phi(\mathbf{r})\rho_f(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$$

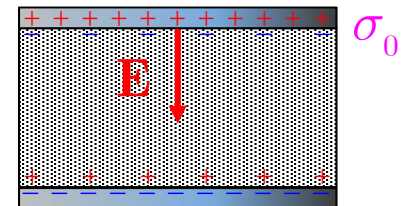
$$W = \frac{1}{2} \int \phi(\mathbf{r})\rho_f(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$$

- Sottolineiamo ancora una volta la differenza con la trattazione della diapositiva 143

- In quel caso nella formula era presente TUTTA la carica ρ (sia libera che di polarizzazione)

$$U = \frac{1}{2} \int \phi(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$$

- L'energia trovata era quella del sistema di cariche $\rho_f + \rho_{pol}$ e non includeva il lavoro fatto per polarizzare il materiale
- Nel caso del condensatore con dielettrico era l'energia dei due strati di carica $\pm [\kappa\sigma_0 - (\kappa - 1)\sigma_0] = \pm \sigma_0$



Energia elettrostatica

- Elaboriamo adesso la formula trovata per metterla in funzione del campo elettrico $\mathbf{E}$ e dello spostamento elettrico $\mathbf{D}$

$$W = \frac{1}{2} \int \phi(\mathbf{r}) \rho_f(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$$

- Ricordiamo innanzitutto la legge di Gauss per il campo $\mathbf{D}$ $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$

- Introduciamo nell'integrale

$$W = \frac{1}{2} \int \phi(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{D} d^3\mathbf{r}$$

- Ricordiamo che

$$\nabla \cdot (f \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \mathbf{C} \quad \longrightarrow \quad \phi \nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\phi \mathbf{D}) - \mathbf{D} \cdot \nabla \phi$$

- Otteniamo

$$W = \frac{1}{2} \int \nabla \cdot (\phi \mathbf{D}) d^3\mathbf{r} - \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \nabla \phi d^3\mathbf{r}$$

- Il primo integrale

$$\int \nabla \cdot (\phi \mathbf{D}) d^3\mathbf{r} = \oint (\phi \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{a} \rightarrow 0 \quad \text{Per campi che si annullano velocemente all'infinito}$$

- Pertanto

$$W = -\frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \nabla \phi d^3\mathbf{r} \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi$$

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d^3\mathbf{r}$$

Energia elettrostatica

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d^3\mathbf{r}$$

- La formula che abbiamo ricavato vale per dielettrici lineari
 - Per un dielettrico lineare si ha $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = \kappa \varepsilon_0 \mathbf{E}$

$$W = \frac{1}{2} \int \kappa \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} d^3\mathbf{r} = \kappa \frac{\varepsilon_0}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} d^3\mathbf{r} = \kappa W_0$$

- W_0 è il lavoro fatto in assenza di dielettrico
- Pensiamo all'esempio iniziale del condensatore con dielettrico
- Riepilogando

$$U_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} d^3\mathbf{r}$$

- Rappresenta l'energia associata ad un campo elettrico $\mathbf{E}$ generato da un sistema di cariche $\rho = \rho_f + \rho_{pol}$
 - Non include il lavoro che è stato fatto per polarizzare il dielettrico
- Per includere anche il lavoro che è stato necessario per polarizzare il dielettrico si calcola

$$W = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d^3\mathbf{r}$$

- Include l'energia del campo elettrico $\mathbf{E}$ generato da $\rho = \rho_f + \rho_{pol}$
- Include il lavoro fatto per polarizzare il dielettrico

Campo elettrico di una sfera polarizzata

- Consideriamo una sfera di dielettrico uniformemente polarizzata

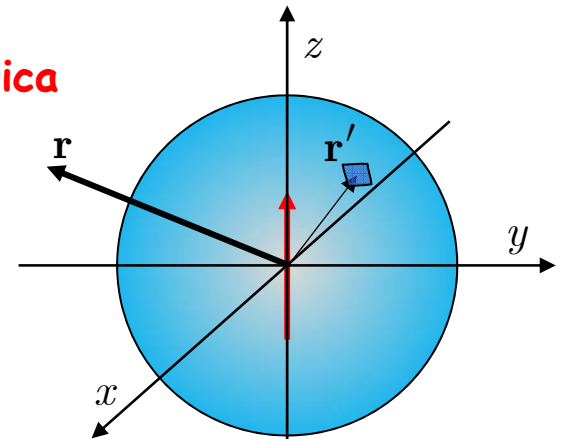
- Dato che la polarizzazione è uniforme all'interno non ci sono densità di carica volumetriche $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$

- Sulla superficie ci sarà una densità superficiale di carica che dipende dall'angolo polare

$$\sigma_P(\theta) = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = P \cos \theta$$

$$\mathbf{r}' = (r', \theta, \phi)$$

$$\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$$



- Possiamo pertanto sostituire al blocco di dielettrico la distribuzione di carica superficiale $\sigma_P(\theta)$

- Il potenziale si ottiene con l'integrale

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi \frac{P \cos \theta'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} r'^2 \sin \theta' d\theta'$$

- La formula risolve il problema per r interno o esterno alla sfera

- Il calcolo di questo integrale è un po' laborioso

- È un problema computazionale

- Possiamo sviluppare altre soluzioni più interessanti dal punto di vista della fisica

Campo elettrico di una sfera polarizzata

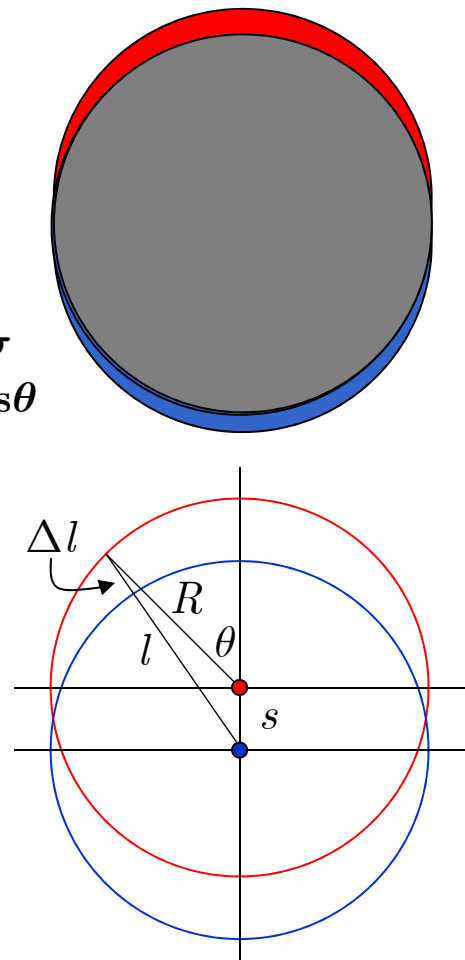
- Un modo alternativo per risolvere il problema è quello di considerare due sfere di densità ρ uniforme e raggio R
 - Di carica totale Q , **positiva e negativa rispettivamente**
 - Le due sfere sovrapposte sono equivalenti ad un sistema neutro
- Spostiamo le due sfere in modo che i centri distino una piccola distanza s
 - **Compaiono due regioni di carica di densità superficiale σ**
 - Verifichiamo che la densità varia con l'angolo come $\cos\theta$
 - La carica presente è proporzionale a $\Delta l = l - R$

$$l^2 = R^2 + s^2 - 2Rs \cos(\pi - \theta) = R^2 + s^2 + 2Rs \cos \theta$$

$$l = R \sqrt{1 + \frac{s^2}{R^2} + 2 \frac{s}{R} \cos \theta} \quad \text{trascuriamo} \quad \frac{s^2}{R^2}$$

$$l \approx R \sqrt{1 + 2 \frac{s}{R} \cos \theta} \approx R \left(1 + \frac{s}{R} \cos \theta \right)$$

$$\Delta l = l - R \approx s \cos \theta$$



Campo elettrico di una sfera polarizzata

- Un elemento di superficie da sulla sfera individua un volume $dv = da \Delta l$

- La carica di questo volume è $dq = \frac{Q}{V} dv$

- V è il volume della sfera

- Calcoliamo la densità superficiale di carica

$$dq = \frac{Q}{V} da \Delta l \quad \longrightarrow \quad \sigma(\theta) = \frac{dq}{da} = \frac{Q}{V} \Delta l = \frac{Q}{V} s \cos \theta$$

- Confrontando con la densità superficiale dovuta alla densità di polarizzazione P : $\sigma(\theta) = P \cos \theta$

- Otteniamo la relazione fra Q , s e i dati del problema

$$\frac{Qs}{V} = P$$

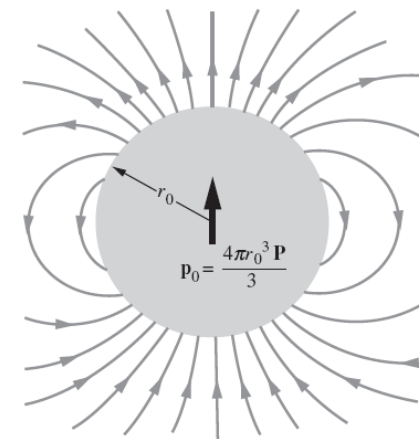
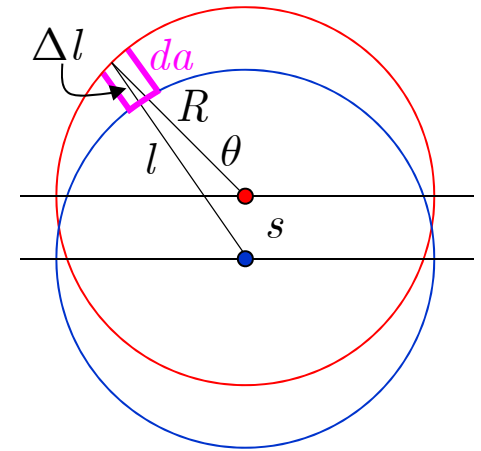
- A questo punto possiamo calcolare il campo elettrico

- Iniziamo con la regione esterna alla sfera

- Questo è banale

- Il sistema è equivalente a due cariche puntiformi $\pm Q$ distanti s : un dipolo $p_0 = Qs$

$$p_0 = PV = \frac{4\pi}{3} R^3 P \quad Qs = PV = \frac{4\pi}{3} R^3 P$$



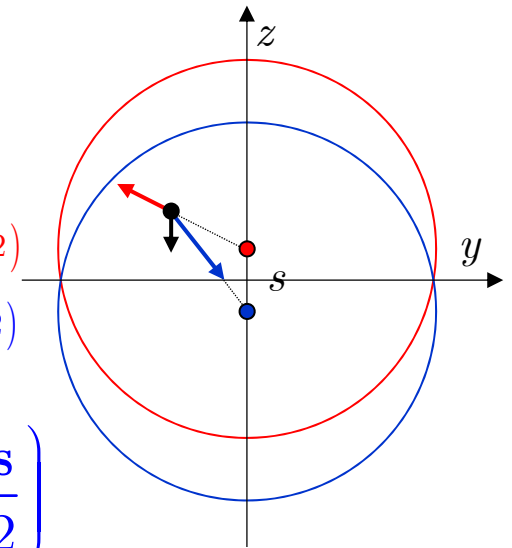
Campo elettrico di una sfera polarizzata

- Veniamo al campo elettrico all'interno
 - Utilizziamo il principio di sovrapposizione e sommiamo i campi all'interno delle due sfere di carica uniforme
- Abbiamo già calcolato il campo all'interno di una sfera di carica di densità uniforme (diapositiva 111)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \mathbf{r}$$

$$\mathbf{r}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & +s/2 \end{pmatrix}$$

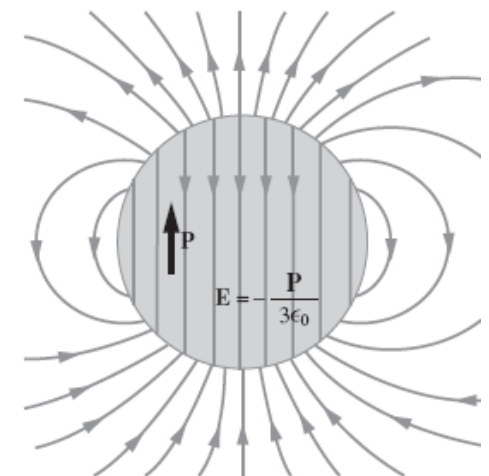
$$\mathbf{r}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -s/2 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{E}_+(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{+Q}{R^3} \left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2} \right) \quad \mathbf{E}_-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q}{R^3} \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2} \right)$$

$$\mathbf{E}_{in} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \left[\left(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{s}}{2} \right) - \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{s}}{2} \right) \right]$$

$$\mathbf{E}_{in} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \mathbf{s} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3} \frac{4\pi}{3} R^3 \mathbf{P} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$



Campo elettrico di una sfera polarizzata

- Notiamo che il campo elettrico è discontinuo sulla superficie della sfera
- Analizziamo la discontinuità
- Per semplicità nel polo nord della sfera ($\theta = 0$)
- Il campo esterno è (diapositiva 273)

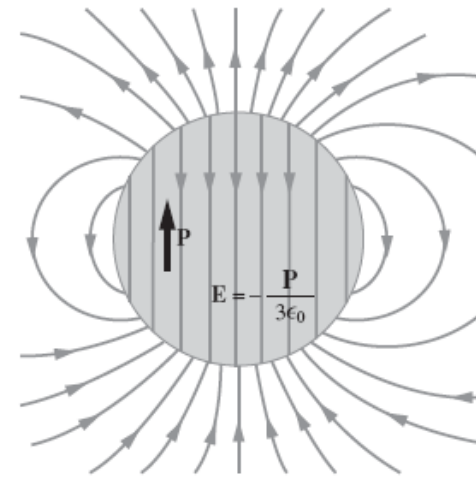
$$\mathbf{E}_{\text{est}}(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0}{r^3} (2\hat{\mathbf{e}}_r \cos\theta + \hat{\mathbf{e}}_\theta \sin\theta) \quad p_0 = \frac{4\pi}{3} R^3 P$$

$$\mathbf{E}_{\text{est}}(R, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^3} \frac{4\pi}{3} R^3 P \hat{\mathbf{e}}_r = \frac{P}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{e}}_r$$

- Il campo interno è

$$\mathbf{E}_{\text{in}} = -\frac{P}{3\epsilon_0} \hat{\mathbf{e}}_r$$

- Vediamo che la discontinuità nella componente normale è $\Delta E_\perp = \frac{P}{\epsilon_0}$
- È la discontinuità della componente normale di un campo elettrico al passaggio di una densità superficiale di carica $\sigma = P$



Campo elettrico di una sfera polarizzata

- Questa relazione vale per tutti gli angoli

$$\mathbf{E}_{\text{est}}(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0}{r^3} (2\hat{\mathbf{e}}_r \cos \theta + \hat{\mathbf{e}}_\theta \sin \theta) \quad p_0 = \frac{4\pi}{3} R^3 P$$

- La componente normale (radiale) del campo elettrico esterno è

$$E_{\text{est}\perp}(R, \theta) = E_r(R, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p_0}{R^3} \cos \theta = \frac{2P}{3\epsilon_0} \cos \theta$$

- La componente radiale del campo elettrico interno è

$$\mathbf{E}_{\text{in}} = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \Rightarrow E_{\text{in}\perp} = -\frac{P}{3\epsilon_0} \cos \theta \Rightarrow \Delta E_{\perp} = \frac{P}{\epsilon_0} \cos \theta = \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0}$$

- La componente tangenziale è continua

$$E_{\text{est}\parallel}(R, \theta) = E_\theta(R, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0}{R^3} \sin \theta = \frac{P}{3\epsilon_0} \sin \theta$$

$$E_{\text{in}\parallel} = \frac{P}{3\epsilon_0} \sin \theta$$

