Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 14 – 17.11.2022

Campo elettrico generato dalla materia polarizzata
Densità di carica di polarizzazione
Sfera polarizzata uniformemente

Anno Accademico 2022/2023

Campo all'interno del dielettrico

- Nelle considerazioni fin qui svolte abbiamo considerato noto il vettore densità di polarizzazione $\mathbf{P}$
  - Tuttavia abbiamo visto che la polarizzazione compare in seguito all'applicazione di un campo elettrico al dielettrico
- La relazione fra $\mathbf{P}$ ed $\mathbf{E}$ può essere molto complessa
  - Nei casi più semplici la relazione è lineare $\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}$
    - La costante χ_e (adimensionale) si chiama suscettività elettrica
    - I dielettrici per cui vale questa relazione sono detti lineari e isotropi
    - Se χ_e non dipende dalla posizione il dielettrico è detto omogeneo
  - Nei dielettrici non lineari la suscettività dipende da E: $\mathbf{P} = \mathbf{F}(\mathbf{E}) = \chi_e(E)\varepsilon_0\mathbf{E}$
  - Nei dielettrici non isotropi $\mathbf{P}$ ed $\mathbf{E}$ non sono paralleli
    - La suscettività è una matrice (un tensore, dipende da $\mathbf{E}$ se mezzo non lineare)

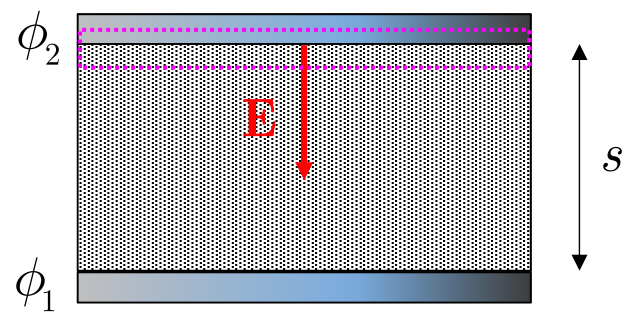
$$\mathbf{P} = \tilde{\boldsymbol{\chi}}\varepsilon_0\mathbf{E} \qquad\qquad P_i = \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{3} \chi_{ik} E_k$$

- Tratteremo principalmente dielettrici lineari e isotropi
  - La suscettività elettrica e la costante dielettrica non sono indipendenti
- Sottolineiamo che il campo elettrico che determina la polarizzazione è il campo elettrico totale esistente nel dielettrico
  - Sia il campo esterno che il campo generato dalla materia stessa

Condensatore con dielettrico

- Ritorniamo al condensatore con dielettrico che abbiamo utilizzato per introdurre l'argomento del campo elettrico nella materia
- Un dispositivo esterno (una batteria) mantiene una differenza di potenziale $\phi_2 - \phi_1$ fra le armature del condensatore
  - Sappiamo che nel vuoto

$$E = \frac{\phi_{12}}{s} \qquad E = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \qquad Q_0 = \sigma_0 A \qquad \phi_{12} = \frac{Q_0 s}{A\varepsilon_0}$$



$$\phi_{12} = \phi_2 - \phi_1$$

    - A è la superficie delle armature
  - Consideriamo il campo elettrico $\mathbf{E}$ presente nel dielettrico
  - Naturalmente l'integrale di linea del campo elettrico è

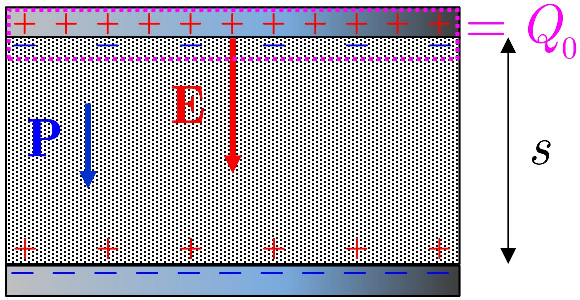
$$-\int_0^s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \phi_{12} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\phi_{12}}{s}$$

Deve essere lo stesso che nel vuoto

  - Questo significa che la carica TOTALE nella regione dell'armatura superiore deve essere la stessa (Q_0) che si aveva nel caso del condensatore nel vuoto
    - Per carica totale si intende carica sulle armature e carica di polarizzazione
    - Questa affermazione può essere dimostrata utilizzando la legge di Gauss
    - L'integrale sulla superficie è sempre $E \cdot A = Q_0/\varepsilon_0$

Condensatore con dielettrico

- Il campo elettrico $\mathbf{E}$ polarizza il dielettrico
  - Il dielettrico acquista una polarizzazione uniforme data dal vettore densità di polarizzazione $\mathbf{P}$
  - Sulle superfici del dielettrico compare una carica superficiale σ



$$\sigma_- = -P \qquad \sigma_+ = P \qquad Q' = \sigma_- A$$

  - La carica Q_0 dovrà pertanto risultare dalla somma
    - Della carica sull'armatura del condensatore: Q
    - Della carica superficiale di polarizzazione: Q'

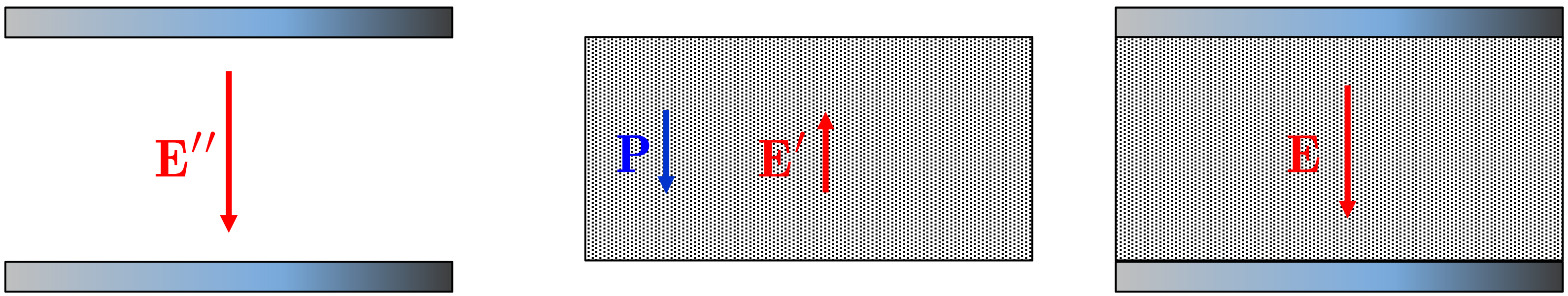
$$Q_0 = Q + Q'$$

- Nel discorso introduttivo avevamo introdotto la costante dielettrica κ

$$Q = \kappa Q_0 \qquad Q' = Q_0 - Q \qquad Q' = (1-\kappa)Q_0 = -(\kappa - 1)Q_0 \qquad \kappa > 1$$

  - Possiamo interpretare il condensatore con dielettrico come
    - Un condensatore nel vuoto con carica κQ_0
    - Due strati di carica di polarizzazione del blocco di dielettrico
  - Entrambi generano un campo elettrico
    - La somma dei due campi elettrici dà il campo elettrico $\mathbf{E}$
    - Il campo elettrico $\mathbf{E}$ è meno intenso di quello generato da κQ_0 nel vuoto

Condensatore con dielettrico



- Il condensatore nel vuoto (con carica κQ_0) genera un campo $\quad \mathbf{E}'' = \kappa \mathbf{E}$
- Nel dielettrico con polarizzazione $\mathbf{P}$ c'è un campo elettrico $\quad \mathbf{E}' = -\dfrac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}$
  - Il campo elettrico nel sistema completo composto è

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}'' + \mathbf{E}' = \kappa \mathbf{E} - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \left(\kappa - 1\right)\mathbf{E} = \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}$$

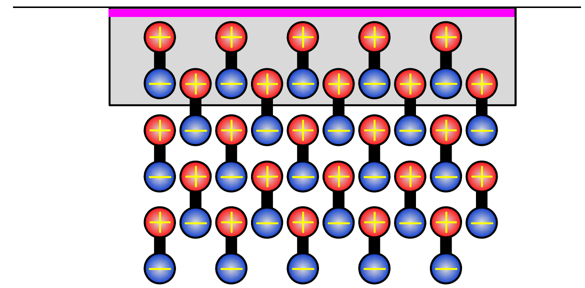
  - Abbiamo definito la suscettività elettrica come $\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}$
    - Otteniamo

$$\left(\kappa - 1\right)\mathbf{E} = \frac{\chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E}}{\varepsilon_0} \qquad \kappa - 1 = \chi_e \qquad \kappa = 1 + \chi_e$$

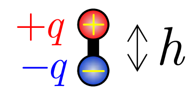
- Sottolineiamo infine che il campo elettrico nel condensatore è determinato dalla differenza di potenziale
  - Dato ϕ_{12} campo elettrico è pertanto lo stesso con o senza dielettrico
  - Cambia la quantità di carica che fluisce sulle armature dall'esterno

Polarizzazione e carica superficiale

- Nell'esempio del condensatore abbiamo visto che sulle superfici del dielettrico all'interno del conduttore compare una carica superficiale
  - Vogliamo approfondire questo fenomeno
- Nella materia polarizzata appaiono dipoli allineati
  - La polarizzazione è descritta dal vettore $\mathbf{P}$
    - Densità di polarizzazione $\mathbf{P} = N(\mathbf{r})\mathbf{p}$
    - N dà il numero di dipoli per unità di volume



- Il singolo dipolo è schematizzato come una coppia di cariche di segno opposto poste ad una distanza h



$$p = qh$$

  - Consideriamo un'area da sulla superficie del dielettrico
  - Il numero di dipoli presenti in un volume hda è $dn = Nhda$
  - La carica presente nel volume è

$$dq = qdn = qNhda = Npda = \left|\mathbf{P}\right| da \qquad \sigma = \frac{dq}{da} = \left|\mathbf{P}\right|$$

  - Osservazioni
    - La carica negativa dei dipoli nel volume hda è cancellata dalla carica positiva dello strato inferiore
    - Lo stesso argomento vale per la superficie inferiore

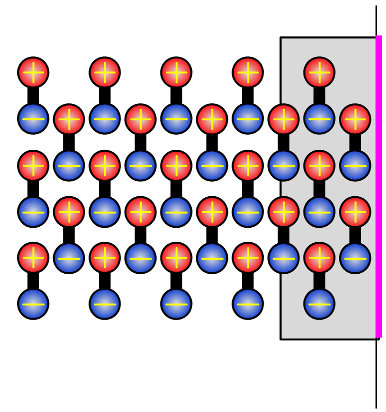
$$\sigma = \frac{dq}{da} = -\left|\mathbf{P}\right|$$

  - Nell'esempio $\mathbf{P}$ è perpendicolare alle superfici
    - Si possono unificare le due formule

$$\boxed{\sigma = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}}$$

Polarizzazione e carica superficiale

- Vediamo cosa succede se il vettore $\mathbf{P}$ non è perpendicolare alla superficie
  - Supponiamo sia parallelo alla superficie
  - Consideriamo un'area da sulla superficie del dielettrico
  - Come nel caso precedente, il numero di dipoli presenti in un volume hda è $dn = Nhda$
  - La carica presente nel volume è nulla
    - Tutti i dipoli si neutralizzano a vicenda
  - Osserviamo che la regola trovata in precedenza è ancora valida $\boxed{\sigma = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}}$

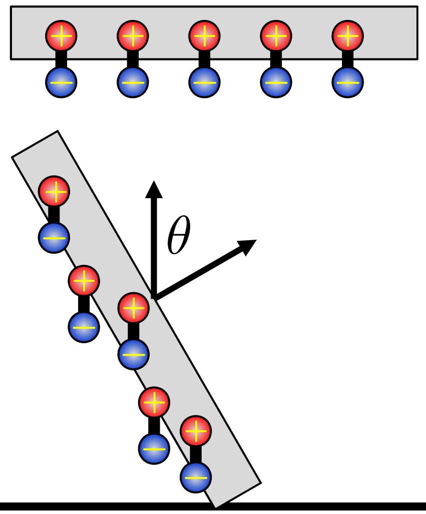


- Per finire il caso di un angolo arbitrario θ fra $\mathbf{P}$ e la normale alla superficie
  - Non è difficile convincersi che la stessa superficie da individua un numero inferiore di dipoli non neutralizzati
    - Una frazione proporzionale a $\cos\theta$

$$\sigma = P\cos\theta$$

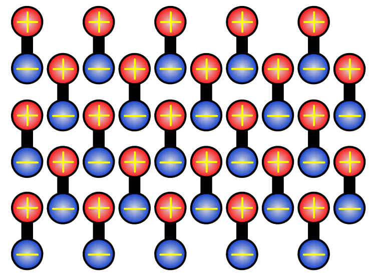
  - Pertanto anche in questo caso generale

$$\boxed{\sigma = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}}$$

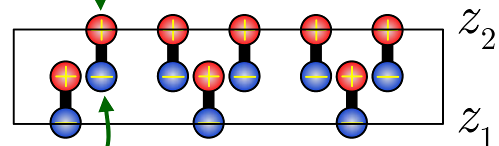


Polarizzazione e carica di volume

- Fino ad ora abbiamo supposto che il vettore densità di polarizzazione $\mathbf{P}$ fosse uniforme in tutto il volume del dielettrico
  - Nel caso generale può variare



- Supponiamo per semplicità che vari solo lungo l'asse z
  - Facendo riferimento alla figura è facile convincersi che dentro una scatola posta all'interno del dielettrico non si ha la completa neutralizzazione dei dipoli
  - Possiamo calcolare la carica non neutralizzata all'interno come differenza fra le cariche presente sulle due superfici
    - In realtà la differenza cambiata di segno



$$dq_- = -P(z_1)da \qquad dq_+ = P(z_2)da$$

$$dq = -(dq_+ + dq_-) = -[P(z_2) - P(z_1)]da = -\frac{\partial P_z}{\partial z}dzda$$

$$dzda = dv$$

- Definiamo la densità volumetrica della carica di polarizzazione ρ_P

$$\rho_P = \frac{dq}{dv} = -\frac{\partial P_z}{\partial z}$$

- Se $\mathbf{P}$ varia in tutte le direzioni $\rho_P = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right)$

$$\rho_P = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}$$

Densità di carica σ_P e ρ_P

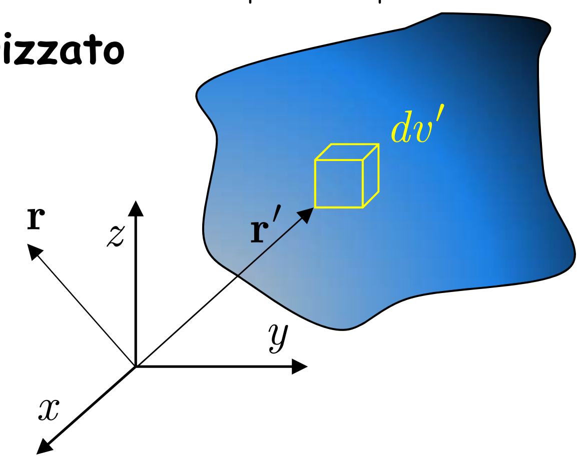
- Ricaviamo i risultati precedenti in modo più formale
  - Ricordiamo la formula per il potenziale di un dipolo

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p}}{r^2}$$

Se il dipolo non è nell'origine ma in $\mathbf{r}'$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)\cdot\mathbf{p}}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3}$$

  - Supponiamo di avere un blocco di dielettrico polarizzato
  - L'elemento di volume dv' ha un momento di dipolo



$$d\mathbf{p} = \mathbf{P}\left(\mathbf{r}'\right)dv'$$

    - Genera un potenziale

$$d\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)\cdot d\mathbf{p}}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)\cdot\mathbf{P}\left(\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3}dv'$$

  - Il potenziale generato dal corpo polarizzato è

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V d\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)\cdot\mathbf{P}\left(\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^3}dv'$$

    - L'integrale è esteso a tutto il volume del corpo
- Se P è noto la formula precedente risolve il problema

Densità di carica σ_P e ρ_P

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dv'$$

- La formula precedente può essere elaborata e messa in una forma molto interessante
  - Si parte dalla seguente, importante relazione

$$\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = +\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \qquad \boldsymbol{\nabla}' = \left(\frac{\partial}{\partial x'} \quad \frac{\partial}{\partial y'} \quad \frac{\partial}{\partial z'}\right)$$

  - Utilizzando questa relazione possiamo riscrivere l'integrando

$$\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot\boldsymbol{\nabla}'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'$$

- Il passo successivo è utilizzare la relazione

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(f\mathbf{A}) = f\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}f$$

Densità di carica σ_P e ρ_P

- **Verifichiamo la relazione** $\nabla\cdot\left(f\mathbf{A}\right) = f\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\left(\nabla f\right)$

$$\nabla\cdot\left(f\mathbf{A}\right) = \frac{\partial f A_x}{\partial x} + \frac{\partial f A_y}{\partial y} + \frac{\partial f A_z}{\partial z}$$

$$= A_x\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial A_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial A_y}{\partial y} + A_z\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$= A_x\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial A_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial A_y}{\partial y} + A_z\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial A_z}{\partial z} = \mathbf{A}\cdot\left(\nabla f\right) + f\nabla\cdot\mathbf{A}$$

- **Ritorniamo al potenziale**

$$\phi\left(\mathbf{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \mathbf{P}\left(\mathbf{r}'\right)\cdot\nabla'\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}dv'$$

poniamo $\mathbf{A} = \mathbf{P}\left(\mathbf{r}'\right)$ $\quad f = \dfrac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}$

$$\mathbf{A}\cdot\nabla f = \nabla\cdot\left(f\mathbf{A}\right) - f\nabla\cdot\mathbf{A} \Longrightarrow \mathbf{P}\left(\mathbf{r}'\right)\cdot\nabla'\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|} = \nabla'\cdot\frac{\mathbf{P}\left(\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|} - \frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\nabla'\cdot\mathbf{P}\left(\mathbf{r}'\right)$$

$$\phi\left(\mathbf{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\left[\nabla'\cdot\frac{\mathbf{P}\left(\mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|} - \frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\nabla'\cdot\mathbf{P}\left(\mathbf{r}'\right)\right]dv'$$

Densità di carica σ_P e ρ_P

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \left[\boldsymbol{\nabla}' \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\boldsymbol{\nabla}' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')\right] dv'$$

- Possiamo adesso trasformare il primo integrale utilizzando il teorema della divergenza $\displaystyle\int_V \boldsymbol{\nabla}' \cdot \mathbf{A}\, dv' = \oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, da$

$$\int_V \boldsymbol{\nabla}' \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' = \oint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} da'$$

  - Ha la forma di un potenziale generato da una densità superficiale di carica
- Il secondo integrale ha la forma del potenziale di una densità volumica di carica
- A questo punto, sfruttando l'analogia, introduciamo
  - La densità superficiale di carica di polarizzazione $\quad \sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$
  - La densità di volume di carica di polarizzazione $\quad \rho_P = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{P}$
- Sostituiamo nella formula del potenziale

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} da'$$

Densità di carica σ_P e ρ_P

- Esaminiamo di nuovo il risultato ottenuto

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}da'$$

- Ai fini del calcolo del potenziale il blocco di materiale polarizzato è equivalente a
  - Una distribuzione volumetrica di carica nel volume del dielettrico
    - La densità di carica è data dalla divergenza del vettore densità di polarizzazione

$$\rho_P = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}$$

  - Una distribuzione di carica superficiale sulle superfici del dielettrico
    - La densità di carica è data dalla componente normale alla superficie del vettore densità di polarizzazione

$$\sigma_P = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}$$

- Naturalmente, una volta scelta questa modalità di calcolo, non si considera più l'integrale di partenza

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cancel{\int_V \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}}dv'$$

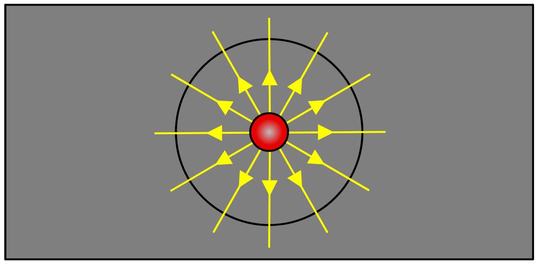
O l'uno o l'altro!

Densità di carica σ_P e ρ_P

- Qualche osservazione per concludere il punto della diapositiva precedente
  - La derivazione è stata puramente matematica
    - Tuttavia concorda con le considerazioni fisiche fatte in precedenza
  - L'integrale di superficie è esteso a tutte le superfici del dielettrico
    - Anche eventuali superfici interne che delimitano cavità
    - Anche sulle superfici delle cavità compare una carica superficiale
  - Non bisogna dimenticare che si tratta di un dielettrico
    - Le cariche non sono libere di muoversi
    - In particolare non si possono disporre arbitrariamente come nei conduttori per annullare il campo elettrico all'intero o rendere equipotenziali le superfici
      - In generale il campo elettrico non è perpendicolare alle superfici che delimitano il dielettrico

La legge di Gauss nella materia

- Supponiamo di avere un grande dielettrico all'interno del quale si trova una carica libera q
  - Una carica che non fa parte della struttura molecolare del dielettrico
  - Ad esempio una sfera metallica carica immersa in un bagno di olio



- Come nel condensatore piano con il dielettrico presente, il campo elettrico nel materiale risulta ridotto rispetto a quello nel vuoto (con la stessa carica q)

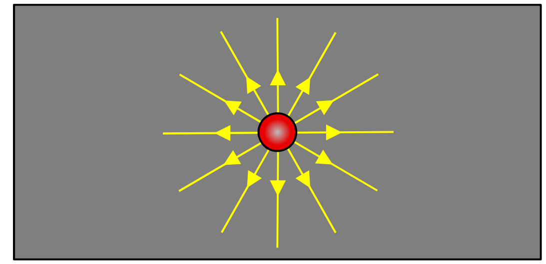
$$E(r) = \frac{1}{\kappa}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Normalmente si definisce la permittività del dielettrico

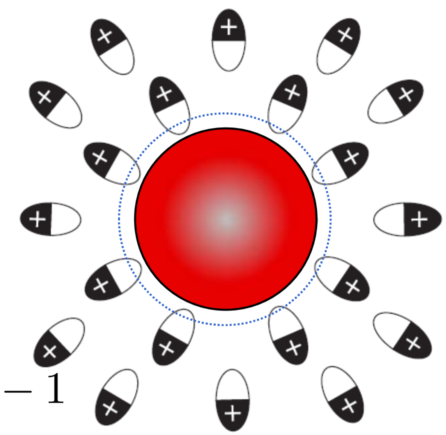
$$\varepsilon = \kappa\varepsilon_0 \qquad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}$$

- È legittimo chiedersi se la legge di Gauss è ancora valida
  - Infatti il flusso del campo elettrico su una superficie che circonda la carica, ad esempio una sfera, sarà più piccolo perché E è più piccolo
    - Sembra pertanto che il flusso non sia più uguale a q/ε_0 ma piuttosto q/ε
- Nel fare questa affermazione commettiamo un grave errore
  - La carica q non è la sola carica all'interno della sfera che utilizziamo per il calcolo del flusso
  - C'è una densità di carica indotta dalla polarizzazione di cui bisogna tenere conto

La legge di Gauss nella materia



- Infatti il campo elettrico polarizza il materiale
  - La sferetta metallica carica ha un'interfaccia con il dielettrico
  - Intorno alla sferetta compare una carica superficiale della quale bisogna tenere conto
    - È a causa di questa carica, che "scherma" la sfera, che il campo risulta meno intenso
  - In generale potrebbe esserci anche una carica volumetrica se $\nabla\cdot\mathbf{P} \neq 0$ (in questo caso $\nabla\cdot\mathbf{P} = 0$)



- Supponiamo che il dielettrico sia lineare
  - Il campo elettrico e la densità di polarizzazione sono

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{\kappa}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad \mathbf{P}(r) = \chi_e\varepsilon_0\mathbf{E} = \frac{\kappa-1}{\kappa}\frac{q}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad \chi_e = \kappa - 1$$

- Supponendo che il raggio della sfera sia a la densità di carica di polarizzazione (uniforme) sulla sua superficie è

$$\sigma_p = -\mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{r}} = -\frac{\kappa-1}{\kappa}\frac{q}{4\pi a^2} \qquad q_p = 4\pi a^2\sigma_p = -\frac{\kappa-1}{\kappa}q = -q + \frac{q}{\kappa}$$

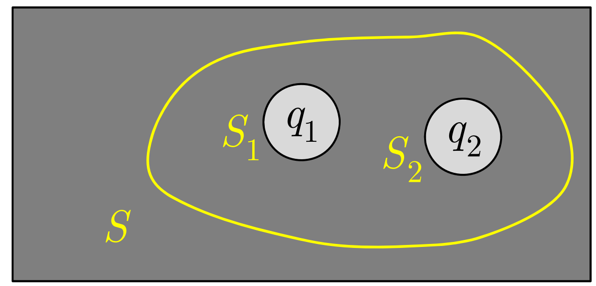
- All'esterno della sfera il campo è quello di una carica puntiforme $Q = q + q_p$

$$Q = q + q_p = q - q + \frac{q}{\kappa} = \frac{q}{\kappa}$$

Carica schermata, più piccola

La legge di Gauss nella materia

- Tenere conto della carica di polarizzazione non è sempre semplice
  - In laboratorio si controllano le cariche o i potenziali sui conduttori, non si controlla la carica di polarizzazione
  - Sarebbe utile una relazione che utilizzasse solo le cariche libere $Q_{\text{free}} = q_1 + q_2$
- Scriviamo la legge di Gauss in forma integrale tenendo conto di tutte le cariche presenti



$$Q_{\text{free}} = q_1 + q_2 \qquad \int_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}da = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(Q_{\text{free}} + Q_{\text{pol}}\right)$$

  - La carica di polarizzazione Q_{pol} è quella presente nel volume e sulle superfici S_1 e S_2
- Notiamo che la superficie S è una superficie matematica
  - Non è una discontinuità nel dielettrico
    - Non c'è una carica superficiale su di essa

$$\boxed{Q_{\text{pol}} = -\int_S \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}da}$$

- Calcoliamo Q_{pol}

$$Q_{\text{pol}} = \int_{S_1+S_2} \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}da + \int_V \left(-\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}\right)dv$$

Il volume V è quello delimitato da S, S_1, S_2

  - Usiamo il teorema della divergenza per trasformare l'integrale di volume

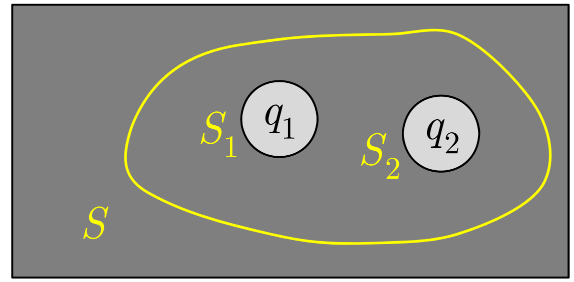
$$\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}\,dv = \int_{S_1+S_2+S} \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}da \Rightarrow Q_{\text{pol}} = \int_{S_1+S_2} \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}da - \int_{S_1+S_2+S} \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}da$$

relazione matematica

La legge di Gauss nella materia

- Riepiloghiamo

$$\int_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}da = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(Q_{\text{free}} + Q_{\text{pol}}\right) \qquad Q_{\text{pol}} = -\int_S \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}da$$



- Inseriamo l'espressione di Q_{pol} nella legge di Gauss

$$\int_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}da = \frac{Q_{\text{free}}}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\int_S \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}da \qquad \int_S \varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}da + \int_S \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}da = Q_{\text{free}}$$

$$\int_S \left(\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}\right)\cdot\hat{\mathbf{n}}da = Q_{\text{free}}$$

- Definiamo il campo vettoriale $\mathbf{D}$, chiamato induzione elettrica
  - Chiamato anche "spostamento elettrico"

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$$

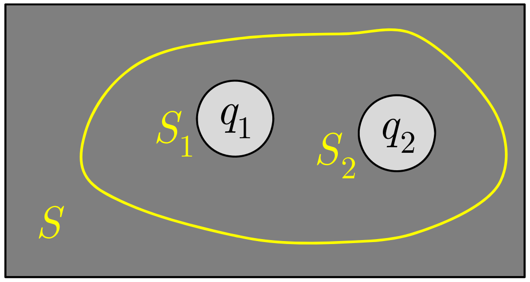
- Introducendo nell'equazione otteniamo

$$\boxed{\int_S \mathbf{D}\cdot\hat{\mathbf{n}}da = Q_{\text{free}}} \qquad \text{in forma differenziale} \qquad \boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D} = \rho_{\text{free}}}$$

- Vediamo che per il campo $\mathbf{D}$ vale una versione della legge di Gauss che stabilisce una relazione con le sole cariche libere

La carica di un dielettrico

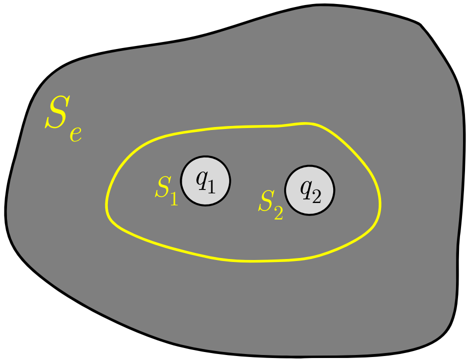
- Osservazione
  - Le cariche che compaiono in un dielettrico polarizzato dipendono dalle deformazioni degli atomi e dall'orientamento dei dipoli molecolari
    - Le cariche fanno piccoli spostamenti (dell'ordine delle dimensioni atomiche)
    - Il dielettrico si polarizza ma la sua carica totale è nulla
- Nel calcolo precedente abbiamo trovato



$$Q_{\text{pol}} = \int_{S_1+S_2} \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}da + \int_V \left(-\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}\right)dv$$

$$Q_{\text{pol}} = \int_{S_1+S_2} \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}da - \int_{S_1+S_2+S} \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}da \qquad Q_{\text{pol}} = -\int_S \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}da$$

  - La superficie S è una superficie matematica
    - La carica Q_{pol} è diversa da zero perché non stiamo considerando la superficie esterna del dielettrico
    - Consideriamo tutte le superfici del corpo (S_e)



$$Q_{\text{pol}} = \int_{S_1+S_2+\boldsymbol{S_e}} \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}da + \int_V \left(-\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}\right)dv$$

$$Q_{\text{pol}} = \int_{S_1+S_2+\boldsymbol{S_e}} \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}da - \int_{S_1+S_2+\boldsymbol{S_e}} \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}}da \qquad \boxed{Q_{\text{pol}} = 0}$$

Lo spostamento elettrico D

- Il campo D risulta utile in molte circostanze ma non aggiunge un reale contenuto fisico nuovo
  - Può indurre in semplificazioni errate
  - Il fatto che soddisfi una legge di Gauss che utilizza solo le cariche libere potrebbe fare pensare che si possa costruire un'elettrostatica solo con D

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{free}}$$

Non esiste una legge di Coulomb per $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D} = \cancel{\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho_{\text{free}}(\mathbf{r}')}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|^2}}\,\hat{\mathbf{r}}'\,dv'$$

FALSO !!

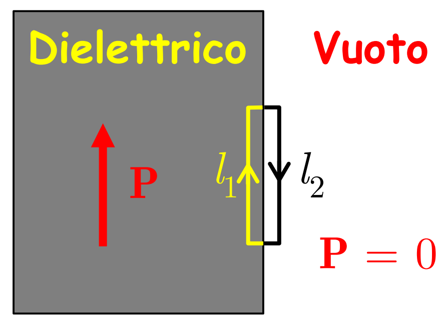
- La ragione importante è che il campo D in generale non è conservativo
  - D non si può scrivere in funzione di un potenziale
    - La legge di Coulomb implica entrambe le proprietà

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

- Il motivo è ovvio

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} = \oint \left(\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}\right) \cdot d\mathbf{l} = \varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l}$$

  - Consideriamo la circuitazione di P come nella figura
    - Dielettrico uniformemente polarizzato
    - Cammino chiuso con lati paralleli alla polarizzazione



$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} = \int_{l_1} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} + \cancel{\int_{l_2} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l}} = P l_1 \Rightarrow \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$$

Lo spostamento elettrico $\mathbf{D}$

- In casi particolari risulta semplice calcolare il campo $\mathbf{D}$
  - Succede quando il problema ha evidenti simmetrie che possono condurre alla soluzione come abbiamo visto con la legge di Gauss per $\mathbf{E}$
- Nel caso generale bisogna avere una relazione fra $\mathbf{D}$ e il campo elettrico $\mathbf{E}$
  - Una relazione che deriva dall'esperimento o da un modello della materia
    - Come nel caso della densità di polarizzazione
- Per un dielettrico lineare

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} \qquad \kappa - 1 = \chi_e \qquad \kappa = 1 + \chi_e$$

  - Per l'induzione elettrica si ottiene in un dielettrico lineare abbiamo

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0 \left(1 + \chi_e\right) \mathbf{E} = \kappa \varepsilon_0 \mathbf{E} \equiv \varepsilon \mathbf{E}$$

    - Abbiamo definito un'ennesima costante: la permettività del materiale
      - Ha le stesse dimensioni di ε_0
- Avere trovato questa relazione per i dielettrici lineari potrebbe fare pensare che almeno per questi si possa avere la circuitazione nulla

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} = \oint \varepsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \varepsilon \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \qquad \boxed{\text{FALSO !!}}$$

  - La costante ε è discontinua quando si attraversa un'interfaccia
    - In generale non si può portare fuori dall'integrale