
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 14 - 17.11.2022

**Campo elettrico generato dalla
materia polarizzata
Densità di carica di polarizzazione
Sfera polarizzata uniformemente**

Anno Accademico 2022/2023

Campo all'interno del dielettrico

- Nelle considerazioni fin qui svolte abbiamo considerato noto il vettore densità di polarizzazione P
- Tuttavia abbiamo visto che la polarizzazione compare in seguito all'applicazione di un campo elettrico al dielettrico
- La relazione fra P ed E può essere molto complessa
 - Nei casi più semplici la relazione è lineare $P = \chi_e \epsilon_0 E$
 - La costante χ_e (adimensionale) si chiama suscettività elettrica
 - I dielettrici per cui vale questa relazione sono detti lineari e isotropi
 - Se χ_e non dipende dalla posizione il dielettrico è detto omogeneo
 - Nei dielettrici non lineari la suscettività dipende da E : $P = F(E) = \chi_e(E) \epsilon_0 E$
 - Nei dielettrici non isotropi P ed E non sono paralleli
 - La suscettività è una matrice (un tensore, dipende da E se mezzo non lineare)

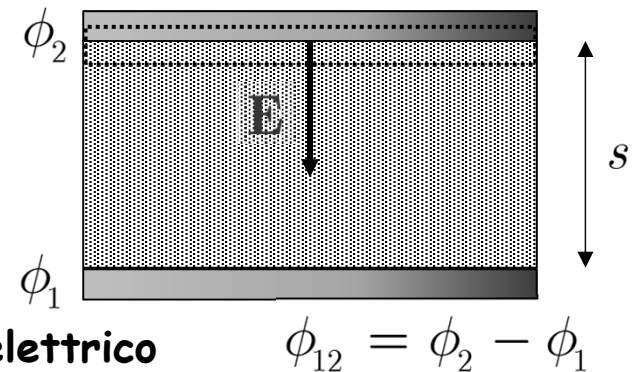
$$P = \tilde{\chi} \epsilon_0 E \qquad P_i = \epsilon_0 \sum_{k=1}^3 \chi_{ik} E_k$$

- Tratteremo principalmente dielettrici lineari e isotropi
 - La suscettività elettrica e la costante dielettrica non sono indipendenti
- Sottolineiamo che il campo elettrico che determina la polarizzazione è il campo elettrico totale esistente nel dielettrico
 - Sia il campo esterno che il campo generato dalla materia stessa

Condensatore con dielettrico

- Ritorniamo al condensatore con dielettrico che abbiamo utilizzato per introdurre l'argomento del campo elettrico nella materia
- Un dispositivo esterno (una batteria) mantiene una differenza di potenziale $\phi_2 - \phi_1$ fra le armature del condensatore
- Sappiamo che nel vuoto

$$E = \frac{\phi_{12}}{s} \quad E = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \quad Q_0 = \sigma_0 A \quad \phi_{12} = \frac{Q_0 s}{A \epsilon_0}$$



- A è la superficie delle armature
- Consideriamo il campo elettrico E presente nel dielettrico
- Naturalmente l'integrale di linea del campo elettrico è

$$-\int_0^s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \phi_{12} \quad \longrightarrow \quad E = \frac{\phi_{12}}{s}$$

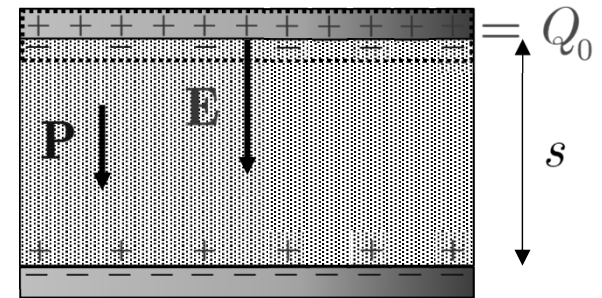
Deve essere lo stesso che nel vuoto

- Questo significa che la carica TOTALE nella regione dell'armatura superiore deve essere la stessa (Q_0) che si aveva nel caso del condensatore nel vuoto
- Per carica totale si intende carica sulle armature e carica di polarizzazione
- Questa affermazione può essere dimostrata utilizzando la legge di Gauss
- L'integrale sulla superficie è sempre $E \cdot A = Q_0 / \epsilon_0$

Condensatore con dielettrico

- Il campo elettrico E polarizza il dielettrico
- Il dielettrico acquista una polarizzazione uniforme data dal vettore densità di polarizzazione P
- Sulle superfici del dielettrico compare una carica superficiale σ

$$\sigma_- = -P \quad \sigma_+ = P \quad Q' = \sigma_- A$$



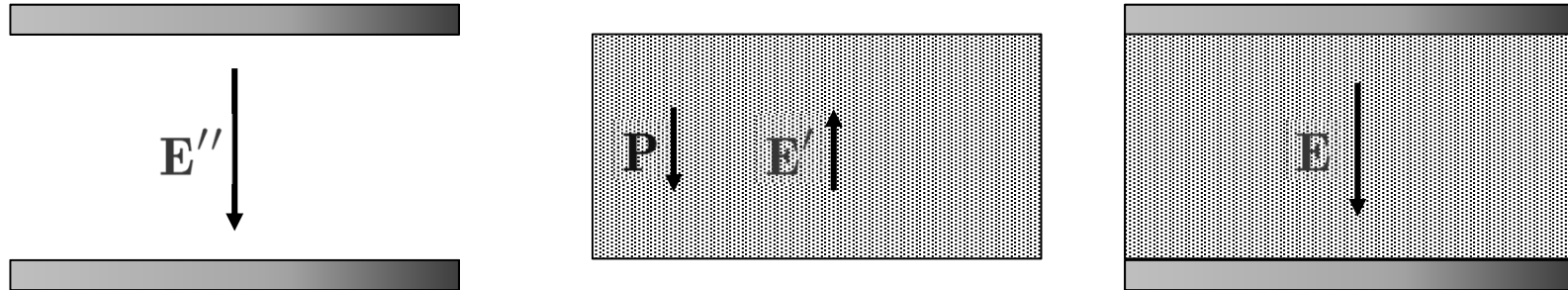
- La carica Q_0 dovrà pertanto risultare dalla somma
 - Della carica sull'armatura del condensatore: Q
 - Della carica superficiale di polarizzazione: Q'
- Nel discorso introduttivo avevamo introdotto la costante dielettrica κ

$$Q_0 = Q + Q'$$

$$Q = \kappa Q_0 \quad Q' = Q_0 - Q \quad Q' = (1 - \kappa) Q_0 = -(\kappa - 1) Q_0 \quad \kappa > 1$$

- Possiamo interpretare il condensatore con dielettrico come
 - Un condensatore nel vuoto con carica κQ_0
 - Due strati di carica di polarizzazione del blocco di dielettrico
- Entrambi generano un campo elettrico
 - La somma dei due campi elettrici dà il campo elettrico E
 - Il campo elettrico E è meno intenso di quello generato da κQ_0 nel vuoto

Condensatore con dielettrico



- Il condensatore nel vuoto (con carica κQ_0) genera un campo $E'' = \kappa E$
- Nel dielettrico con polarizzazione P c'è un campo elettrico $E' = -\frac{P}{\epsilon_0}$
- Il campo elettrico nel sistema completo composto è

$$E = E'' + E' = \kappa E - \frac{P}{\epsilon_0} \longrightarrow (\kappa - 1)E = \frac{P}{\epsilon_0}$$

- Abbiamo definito la suscettività elettrica come $P = \chi_e \epsilon_0 E$

- Otteniamo

$$(\kappa - 1)E = \frac{\chi_e \epsilon_0 E}{\epsilon_0} \quad \kappa - 1 = \chi_e \quad \kappa = 1 + \chi_e$$

- Sottolineiamo infine che il campo elettrico nel condensatore è determinato dalla differenza di potenziale
 - Dato ϕ_{12} campo elettrico è pertanto lo stesso con o senza dielettrico
 - Cambia la quantità di carica che fluisce sulle armature dall'esterno

Polarizzazione e carica superficiale

- Nell'esempio del condensatore abbiamo visto che sulle superfici del dielettrico all'interno del conduttore compare una carica superficiale

- Vogliamo approfondire questo fenomeno

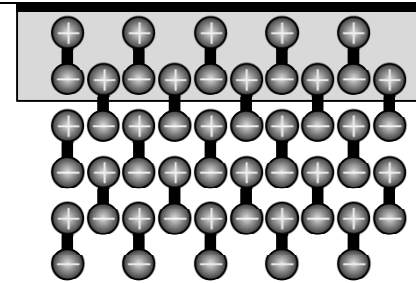
- Nella materia polarizzata appaiono dipoli allineati

- La polarizzazione è descritta dal vettore $\mathbf{P}$

- Densità di polarizzazione $\mathbf{P} = N(\mathbf{r})\mathbf{p}$

- N dà il numero di dipoli per unità di volume

- Il singolo dipolo è schematizzato come una coppia di cariche di segno opposto poste ad una distanza h



$$\begin{array}{c} +q \\ -q \end{array} \updownarrow h \quad p = qh$$

- Consideriamo un'area da sulla superficie del dielettrico

- Il numero di dipoli presenti in un volume hda è $dn = Nhda$

- La carica presente nel volume è

$$dq = qdn = qNhda = Npda = |\mathbf{P}|da$$

$$\sigma = \frac{dq}{da} = |\mathbf{P}|$$

- Osservazioni

- La carica negativa dei dipoli nel volume hda è cancellata dalla carica positiva dello strato inferiore

- Lo stesso argomento vale per la superficie inferiore

$$\sigma = \frac{dq}{da} = -|\mathbf{P}|$$

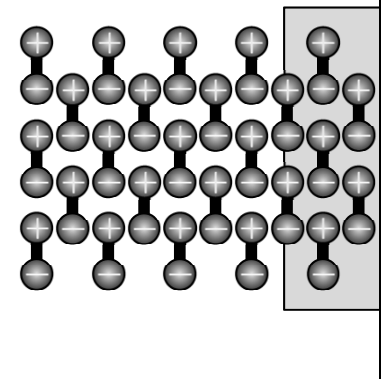
- Nell'esempio $\mathbf{P}$ è perpendicolare alle superfici

- Si possono unificare le due formule

$$\sigma = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

Polarizzazione e carica superficiale

- Vediamo cosa succede se il vettore $\mathbf{P}$ non è perpendicolare alla superficie
 - Supponiamo sia parallelo alla superficie
 - Consideriamo un'area da sulla superficie del dielettrico
 - Come nel caso precedente, il numero di dipoli presenti in un volume hda è $dn = Nhda$
 - La carica presente nel volume è nulla
 - Tutti i dipoli si neutralizzano a vicenda
 - Osserviamo che la regola trovata in precedenza è ancora valida



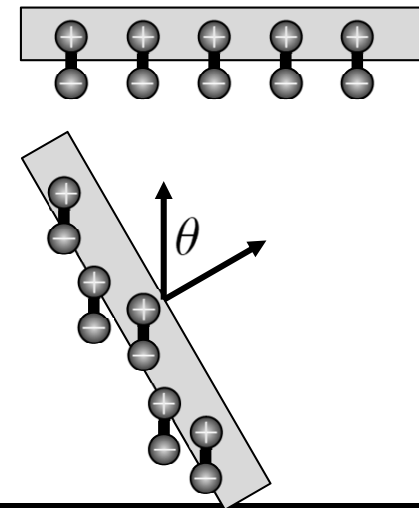
$$\sigma = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

- Per finire il caso di un angolo arbitrario θ fra $\mathbf{P}$ e la normale alla superficie
 - Non è difficile convincersi che la stessa superficie da individua un numero inferiore di dipoli non neutralizzati
 - Una frazione proporzionale a $\cos\theta$

$$\sigma = P \cos \theta$$

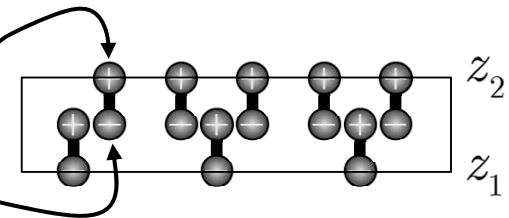
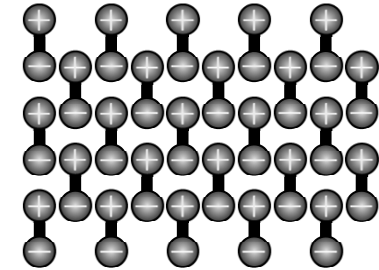
- Pertanto anche in questo caso generale

$$\sigma = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$



Polarizzazione e carica di volume

- Fino ad ora abbiamo supposto che il vettore densità di polarizzazione P fosse uniforme in tutto il volume del dielettrico
- Nel caso generale può variare
- Supponiamo per semplicità che vari solo lungo l'asse z
 - Facendo riferimento alla figura è facile convincersi che dentro una scatola posta all'interno del dielettrico non si ha la completa neutralizzazione dei dipoli
 - Possiamo calcolare la carica non neutralizzata all'interno come differenza fra le cariche presente sulle due superfici
 - In realtà la differenza cambiata di segno



$$dq_- = -P(z_1) da \quad dq_+ = P(z_2) da$$

$$dq = -(dq_+ + dq_-) = -[P(z_2) - P(z_1)] da = -\frac{\partial P_z}{\partial z} dz da$$

$$dz da = dv$$

- Definiamo la densità volumetrica della carica di polarizzazione ρ_P

$$\rho_P = \frac{dq}{dv} = -\frac{\partial P_z}{\partial z}$$

- Se P varia in tutte le direzioni $\rho_P = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) \quad \left| \quad \rho_P = -\nabla \cdot P \right.$

Densità di carica σ_P e ρ_P

- Ricaviamo i risultati precedenti in modo più formale
- Ricordiamo la formula per il potenziale di un dipolo

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}}{r^2} \quad \text{Se il dipolo non è nell'origine ma in } \mathbf{r}' \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

- Supponiamo di avere un blocco di dielettrico polarizzato
- L'elemento di volume dv' ha un momento di dipolo

$$d\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{r}') dv'$$

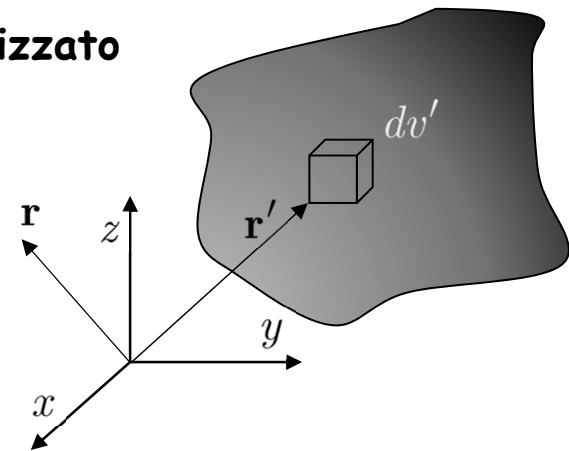
- Genera un potenziale

$$d\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

- Il potenziale generato dal corpo polarizzato è

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_V d\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

- L'integrale è esteso a tutto il volume del corpo
- Se $\mathbf{P}$ è noto la formula precedente risolve il problema



Densità di carica σ_P e ρ_P

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

- La formula precedente può essere elaborata e messa in una forma molto interessante
- Si parte dalla seguente, importante relazione

$$\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = + \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad \nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial x'} \quad \frac{\partial}{\partial y'} \quad \frac{\partial}{\partial z'} \right)$$

- Utilizzando questa relazione possiamo riscrivere l'integrando

$$\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$
$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

- Il passo successivo è utilizzare la relazione

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f$$

Densità di carica σ_P e ρ_P

- Verifichiamo la relazione $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f\nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (f\mathbf{A}) &= \frac{\partial fA_x}{\partial x} + \frac{\partial fA_y}{\partial y} + \frac{\partial fA_z}{\partial z} \\&= A_x \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial A_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial f}{\partial y} + f \frac{\partial A_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial A_z}{\partial z} \\&= A_x \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial A_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial f}{\partial y} + f \frac{\partial A_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial A_z}{\partial z} = \mathbf{A} \cdot (\nabla f) + f\nabla \cdot \mathbf{A}\end{aligned}$$

- Ritorniamo al potenziale

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad \text{poniamo} \quad \mathbf{A} = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \quad f = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\mathbf{A} \cdot \nabla f = \nabla \cdot (f\mathbf{A}) - f\nabla \cdot \mathbf{A} \implies \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') \right] dv'$$

Densità di carica σ_P e ρ_P

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \left[\nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}') \right] dv'$$

- Possiamo adesso trasformare il primo integrale utilizzando il teorema della divergenza $\int_V \nabla' \cdot \mathbf{A} dv' = \oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$

$$\int_V \nabla' \cdot \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = \oint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{n}}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da'$$

- Ha la forma di un potenziale generato da una densità superficiale di carica
- Il secondo integrale ha la forma del potenziale di una densità volumica di carica
- A questo punto, sfruttando l'analogia, introduciamo
 - La densità superficiale di carica di polarizzazione $\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$
 - La densità di volume di carica di polarizzazione $\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$
- Sostituiamo nella formula del potenziale

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da'$$

Densità di carica σ_P e ρ_P

- Esaminiamo di nuovo il risultato ottenuto

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da'$$

- Ai fini del calcolo del potenziale il blocco di materiale polarizzato è equivalente a
 - Una distribuzione volumetrica di carica nel volume del dielettrico
 - La densità di carica è data dalla divergenza del vettore densità di polarizzazione

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

- Una distribuzione di carica superficiale sulle superfici del dielettrico
 - La densità di carica è data dalla componente normale alla superficie del vettore densità di polarizzazione

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

- Naturalmente, una volta scelta questa modalità di calcolo, non si considera più l'integrale di partenza

~~$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$~~

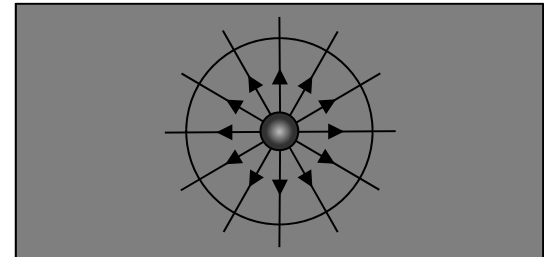
O l'uno o l'altro!

Densità di carica σ_P e ρ_P

- Qualche osservazione per concludere il punto della diapositiva precedente
 - La derivazione è stata puramente matematica
 - Tuttavia concorda con le considerazioni fisiche fatte in precedenza
 - L'integrale di superficie è esteso a tutte le superfici del dielettrico
 - Anche eventuali superfici interne che delimitano cavità
 - Anche sulle superfici delle cavità compare una carica superficiale
 - Non bisogna dimenticare che si tratta di un dielettrico
 - Le cariche non sono libere di muoversi
 - In particolare non si possono disporre arbitrariamente come nei conduttori per annullare il campo elettrico all'intero o rendere equipotenziali le superfici
 - In generale il campo elettrico non è perpendicolare alle superfici che delimitano il dielettrico

La legge di Gauss nella materia

- Supponiamo di avere un grande dielettrico all'interno del quale si trova una carica libera q
 - Una carica che non fa parte della struttura molecolare del dielettrico
 - Ad esempio una sfera metallica carica immersa in un bagno di olio
- Come nel condensatore piano con il dielettrico presente, il campo elettrico nel materiale risulta ridotto rispetto a quello nel vuoto (con la stessa carica q)



$$E(r) = \frac{1}{\kappa} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Normalmente si definisce la permittività del dielettrico

$$\epsilon = \kappa\epsilon_0 \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2}$$

- È legittimo chiedersi se la legge di Gauss è ancora valida
 - Infatti il flusso del campo elettrico su una superficie che circonda la carica, ad esempio una sfera, sarà più piccolo perché E è più piccolo
 - Sembra pertanto che il flusso non sia più uguale a q/ϵ_0 ma piuttosto q/ϵ
- Nel fare questa affermazione commettiamo un grave errore
 - La carica q non è la sola carica all'interno della sfera che utilizziamo per il calcolo del flusso
 - C'è una densità di carica indotta dalla polarizzazione di cui bisogna tenere conto

La legge di Gauss nella materia

- Infatti il campo elettrico polarizza il materiale
 - La sferetta metallica carica ha un'interfaccia con il dielettrico
 - Intorno alla sferetta compare una carica superficiale della quale bisogna tenere conto
 - È a causa di questa carica, che "scherma" la sfera, che il campo risulta meno intenso
 - In generale potrebbe esserci anche una carica volumetrica se $\nabla \cdot \mathbf{P} \neq 0$ (in questo caso $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$)
- Supponiamo che il dielettrico sia lineare
 - Il campo elettrico e la densità di polarizzazione sono

$$\mathbf{E}(r) = \frac{1}{\kappa} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \mathbf{P}(r) = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{q}{4\pi r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \chi_e = \kappa - 1$$

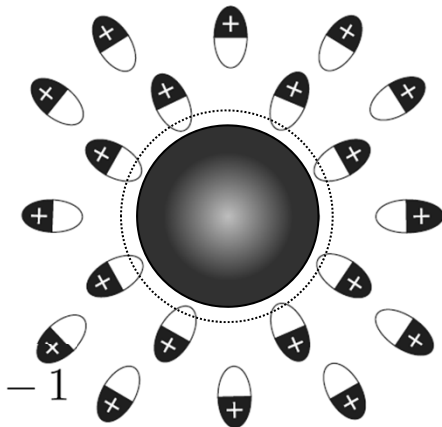
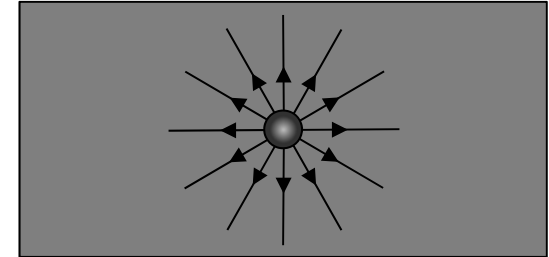
- Supponendo che il raggio della sfera sia a la densità di carica di polarizzazione (uniforme) sulla sua superficie è

$$\sigma_p = -\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{r}} = -\frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{q}{4\pi a^2} \quad q_p = 4\pi a^2 \sigma_p = -\frac{\kappa - 1}{\kappa} q = -q + \frac{q}{\kappa}$$

- All'esterno della sfera il campo è quello di una carica puntiforme $Q = q + q_p$

$$Q = q + q_p = q - q + \frac{q}{\kappa} = \frac{q}{\kappa}$$

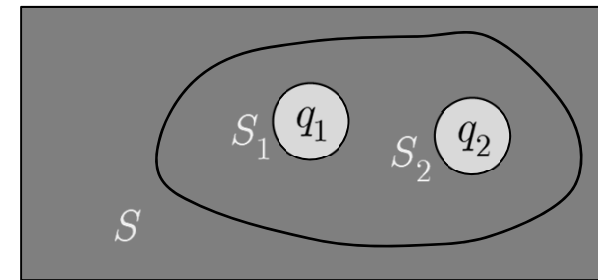
Carica schermata, più piccola



La legge di Gauss nella materia

- Tenere conto della carica di polarizzazione non è sempre semplice
 - In laboratorio si controllano le cariche o i potenziali sui conduttori, non si controlla la carica di polarizzazione
 - Sarebbe utile una relazione che utilizzasse solo le cariche libere $Q_{\text{free}} = q_1 + q_2$
- Scriviamo la legge di Gauss in forma integrale tenendo conto di tutte le cariche presenti

$$Q_{\text{free}} = q_1 + q_2 \quad \int_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_{\text{free}} + Q_{\text{pol}})$$



- La carica di polarizzazione Q_{pol} è quella presente nel volume e sulle superfici S_1 e S_2
- Notiamo che la superficie S è una superficie matematica
 - Non è una discontinuità nel dielettrico
 - Non c'è una carica superficiale su di essa

$$Q_{\text{pol}} = - \int_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

- Calcoliamo Q_{pol} $Q_{\text{pol}} = \int_{S_1+S_2} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da + \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{P}) dv$ Il volume V è quello delimitato da S, S_1, S_2

- Usiamo il teorema della divergenza per trasformare l'integrale di volume

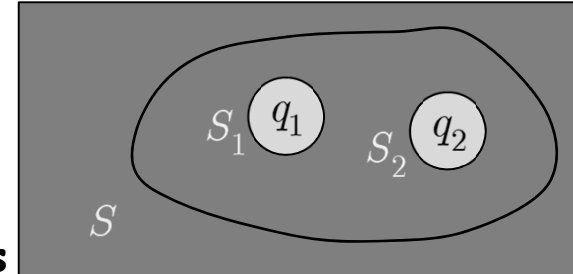
$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{P} dv = \int_{S_1+S_2+S} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da \Rightarrow Q_{\text{pol}} = \int_{S_1+S_2} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da - \int_{S_1+S_2+S} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

relazione matematica

La legge di Gauss nella materia

- Riepiloghiamo

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{1}{\varepsilon_0} (Q_{\text{free}} + Q_{\text{pol}}) \quad Q_{\text{pol}} = - \int_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$



- Inseriamo l'espressione di Q_{pol} nella legge di Gauss

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{Q_{\text{free}}}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0} \int_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da \quad \int_S \varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da + \int_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = Q_{\text{free}}$$
$$\int_S (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da = Q_{\text{free}}$$

- Definiamo il campo vettoriale $\mathbf{D}$, chiamato induzione elettrica
 - Chiamato anche "spostamento elettrico"

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

- Introducendo nell'equazione otteniamo

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = Q_{\text{free}}$$

in forma differenziale

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{free}}$$

- Vediamo che per il campo $\mathbf{D}$ vale una versione della legge di Gauss che stabilisce una relazione con le sole cariche libere

La carica di un dielettrico

- Osservazione

- Le cariche che compaiono in un dielettrico polarizzato dipendono dalle deformazioni degli atomi e dall'orientamento dei dipoli molecolari
- Le cariche fanno piccoli spostamenti (dell'ordine delle dimensioni atomiche)
- Il dielettrico si polarizza ma la sua carica totale è nulla

- Nel calcolo precedente abbiamo trovato

$$Q_{\text{pol}} = \int_{S_1+S_2} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da + \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{P}) dv$$

$$Q_{\text{pol}} = \int_{S_1+S_2} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da - \int_{S_1+S_2+S} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da \quad Q_{\text{pol}} = - \int_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

- La superficie S è una superficie matematica

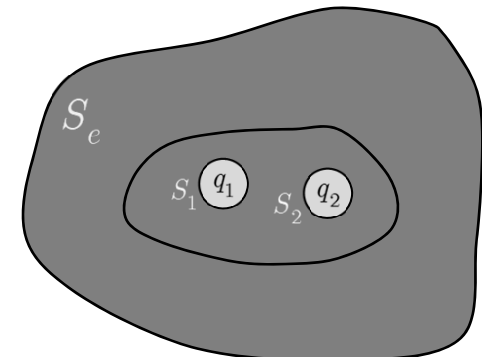
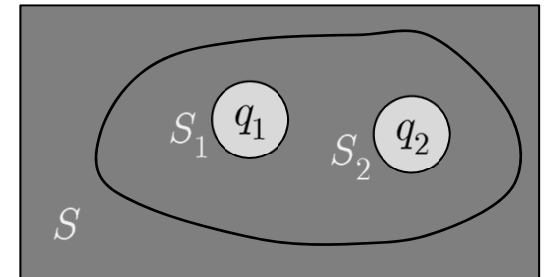
- La carica Q_{pol} è diversa da zero perché non stiamo considerando la superficie esterna del dielettrico

- Consideriamo tutte le superfici del corpo (S_e)

$$Q_{\text{pol}} = \int_{S_1+S_2+S_e} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da + \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{P}) dv$$

$$Q_{\text{pol}} = \int_{S_1+S_2+S_e} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da - \int_{S_1+S_2+S_e} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

$$Q_{\text{pol}} = 0$$



Lo spostamento elettrico D

- Il campo D risulta utile in molte circostanze ma non aggiunge un reale contenuto fisico nuovo
- Può indurre in semplificazioni errate
- Il fatto che soddisfi una legge di Gauss che utilizza solo le cariche libere potrebbe fare pensare che si possa costruire un'elettrostatica solo con D

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{free}}$$

Non esiste una legge di Coulomb per D

~~$$\mathbf{D} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_{\text{free}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \hat{\mathbf{r}}' dv'$$~~

FALSO !!

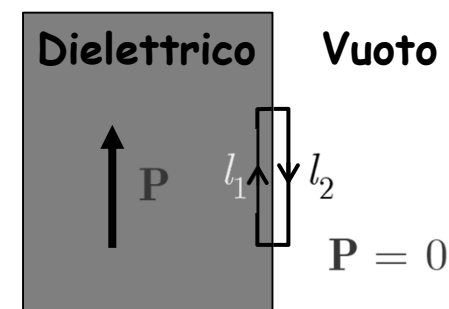
- La ragione importante è che il campo D in generale non è conservativo
 - D non si può scrivere in funzione di un potenziale
 - La legge di Coulomb implica entrambe le proprietà
- Il motivo è ovvio

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} = \oint (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{l} = \epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l}$$

- Consideriamo la circuitazione di P come nella figura
 - Dielettrico uniformemente polarizzato
 - Cammino chiuso con lati paralleli alla polarizzazione

$$\oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} = \int_{l_1} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} + \cancel{\int_{l_2} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l}} = Pl_1 \Rightarrow \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$$



Lo spostamento elettrico D

- In casi particolari risulta semplice calcolare il campo D
 - Succede quando il problema ha evidenti simmetrie che possono condurre alla soluzione come abbiamo visto con la legge di Gauss per E
- Nel caso generale bisogna avere una relazione fra D e il campo elettrico E
 - Una relazione che deriva dall'esperimento o da un modello della materia
 - Come nel caso della densità di polarizzazione
- Per un dielettrico lineare

$$\mathbf{P} = \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} \qquad \kappa - 1 = \chi_e \qquad \kappa = 1 + \chi_e$$

- Per l'induzione elettrica si ottiene in un dielettrico lineare abbiamo

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \kappa \varepsilon_0 \mathbf{E} \equiv \varepsilon \mathbf{E}$$

- Abbiamo definito un'ennesima costante: la permittività del materiale
 - Ha le stesse dimensioni di ε_0
- Avere trovato questa relazione per i dielettrici lineari potrebbe fare pensare che almeno per questi si possa avere la circuitazione nulla

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{l} = \oint \varepsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \varepsilon \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \boxed{\text{FALSO !!}}$$

- La costante ε è discontinua quando si attraversa un'interfaccia
 - In generale non si può portare fuori dall'integrale