
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 13 - 11.11.2022

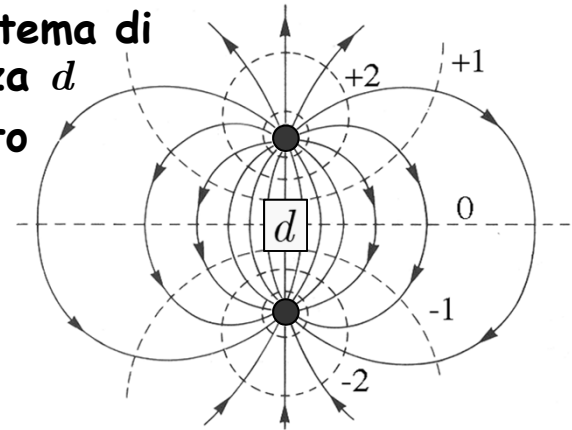
Dipolo Elettrico
Forze sul dipolo. Dipoli atomici
Espansione multipolare

Anno Accademico 2022/2023

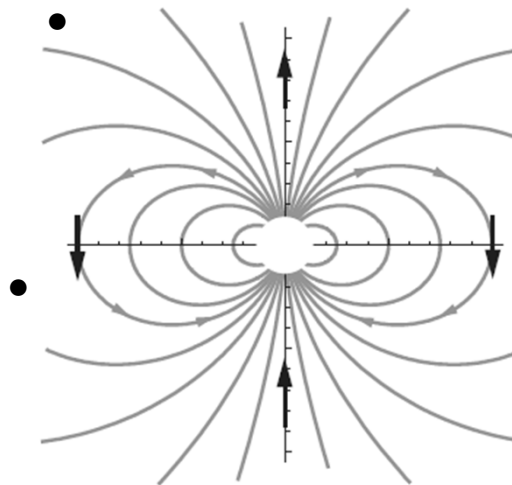
Dipolo elettrico

- Studiamo adesso il campo elettrico prodotto da un sistema di due cariche di segno opposto $+q$ e $-q$ poste a distanza d
 - Abbiamo già visto questo sistema in un altro contesto
 - Calcoliamo il potenziale ψ (usiamo ψ invece di ϕ per evitare in seguito confusione con l'angolo azimutale)

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|}$$

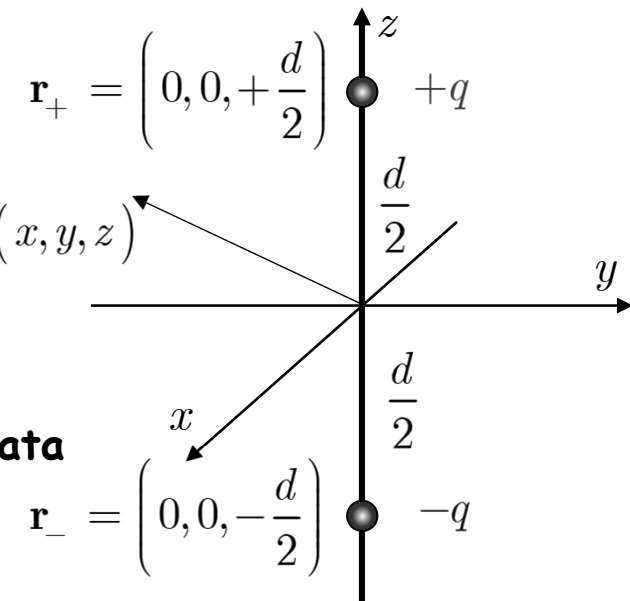


- Tuttavia questa formula ci dice molto di più di quello che ci interessa
 - Non mette in evidenza quello che ci interessa



Il campo a distanze molto grandi rispetto alla dimensione dell'atomo

Cerchiamo allora una formula approssimata



Dipolo elettrico

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|}$$

$$\mathbf{r}_+ = \left(0, 0, +\frac{d}{2}\right) \quad \mathbf{r}_- = \left(0, 0, -\frac{d}{2}\right)$$

- Consideriamo il potenziale in un punto $\mathbf{r}$

- In coordinate sferiche $\mathbf{r} = (r, \theta, \phi)$

- C'è simmetria per rotazioni intorno a z
- Non c'è dipendenza dall'angolo azimutale

- Esaminiamo i denominatori della formula (nel piano $\phi = 0$)

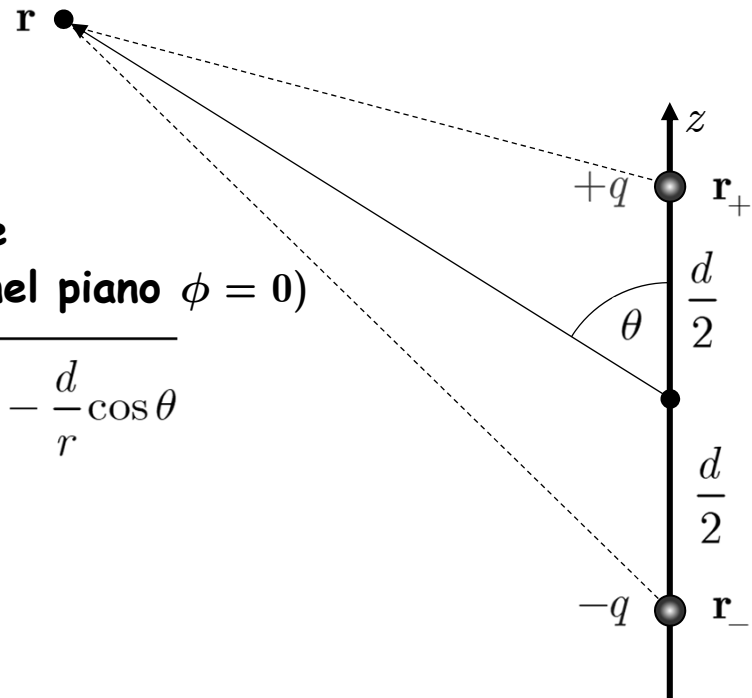
$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+| = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} - rd \cos \theta} = r \sqrt{1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d}{r} \cos \theta}$$

- Trascurando $\frac{d^2}{r^2} \ll 1$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|} \approx \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{d}{r} \cos \theta}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta\right)$$

- Analogamente

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta\right)$$



Dipolo elettrico: potenziale

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \quad \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right)$$

- Introduciamo nella formula del potenziale

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|}$$

$$\psi(\mathbf{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \left(1 + \frac{d}{2r} \cos \theta \right) - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d}{2r} \cos \theta \right) \right]$$

- I due termini si elidono

$$\psi(\mathbf{r}) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{d}{2r^2} \cos \theta + \frac{d}{2r^2} \cos \theta \right]$$

$$\psi(r, \theta) = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

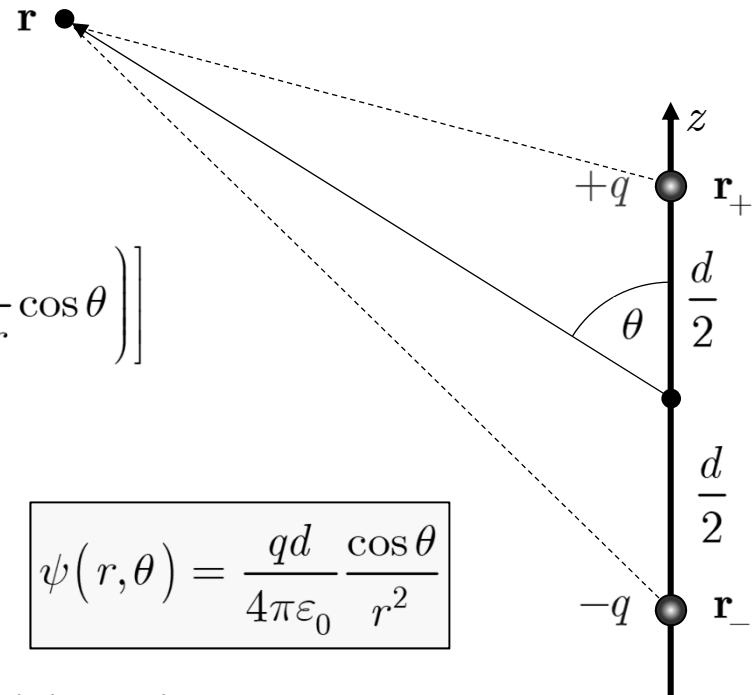
- Osserviamo che il potenziale dipende solo dal prodotto qd
 - Definiamo il momento di dipolo elettrico $p = qd$
 - Si definisce dipolo elettrico ideale un sistema nel quale

$$d \rightarrow 0$$

$$q \rightarrow \infty$$

$$qd \rightarrow p$$

Il dipolo ideale è puntiforme

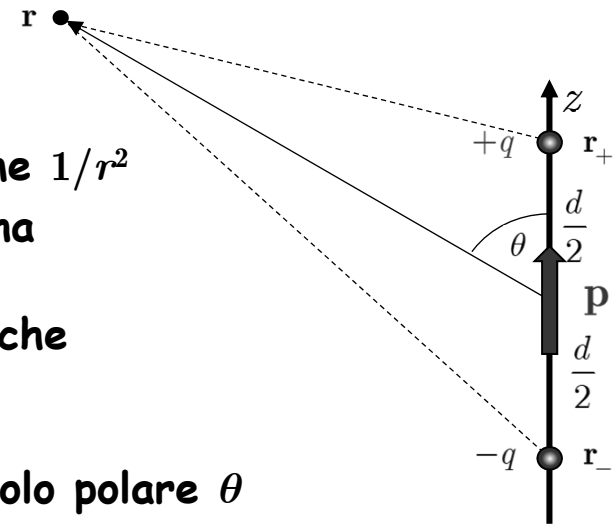


Dipolo elettrico: potenziale

- Sottolineiamo che la formula trovata descrive il sistema originale solo per distanze molto maggiori della distanza fra le cariche

$$\psi(r, \theta) = \frac{qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

- Osserviamo che il potenziale del dipolo varia come $1/r^2$
 - Si attenua più rapidamente del potenziale di una carica puntiforme
 - La componente del potenziale delle singole cariche che varia come $1/r$ si cancella e rimane solo la componente che si attenua più rapidamente
- Notiamo infine che il potenziale dipende dall'angolo polare θ
 - Era prevedibile che il potenziale non avesse più la simmetria sferica della carica puntiforme
 - Il dipolo ha una direzione privilegiata
 - L'asse delle due cariche
 - Nel nostro caso coincide con l'asse z
- Si definisce il vettore momento di dipolo $\mathbf{p}$ diretto dalla carica negativa alla carica positiva e modulo $|\mathbf{p}| = qd$
 - In funzione del vettore $\mathbf{p}$ il potenziale diventa



$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \mathbf{p}}{r^2}$$

Dipolo elettrico: campo elettrico

- Calcoliamo il campo elettrico del dipolo

$$\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

- Utilizziamo le coordinate sferiche

- Ricordiamo il potenziale

- Non dipende da ϕ :

simmetria azimutale $E_\phi = 0$

$$\psi(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

- Confrontiamolo inoltre con il potenziale della sfera conduttrice in campo uniforme (diapositiva **197**)

$$V(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{r_0^3}{r^2} \right) \cos \theta$$

- La carica superficiale della sfera genera un campo dipolare

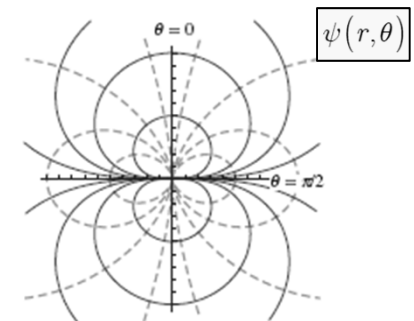
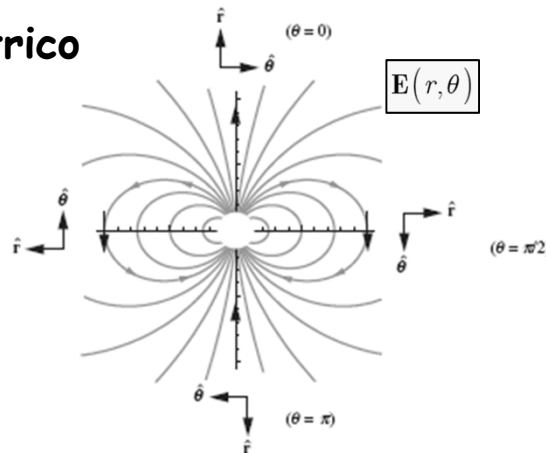
- Calcoliamo il campo elettrico

$$E_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}$$

- Notiamo che il campo elettrico decresce come $1/r^3$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2\hat{e}_r \cos \theta + \hat{e}_\theta \sin \theta)$$



Forze sul dipolo elettrico

- Consideriamo un dipolo in un campo elettrico uniforme
 - Sulle due cariche agiscono due forze che si elidono
- Calcoliamo il lavoro fatto per ruotare il dipolo da una posizione parallela ad una che forma un angolo θ con $\mathbf{E}$
 - Le due forze hanno adesso un momento meccanico

$$|\mathbf{F}| = qE \quad |\boldsymbol{\tau}| = qEd \sin \theta = pE \sin \theta$$

- Il lavoro compiuto da un momento delle forze per una rotazione $d\alpha$ è

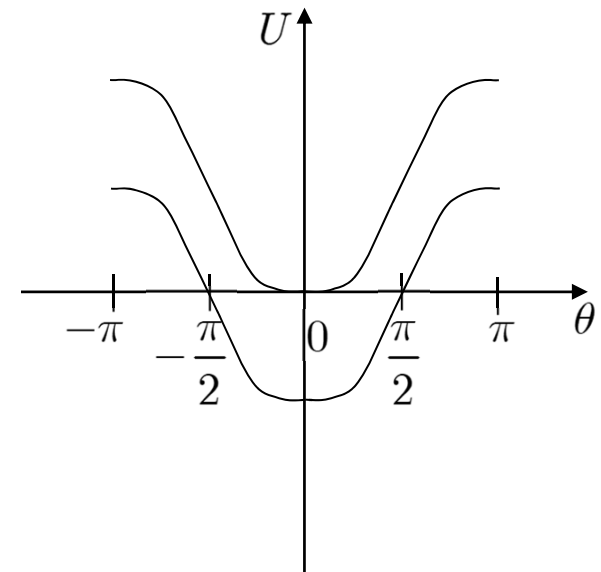
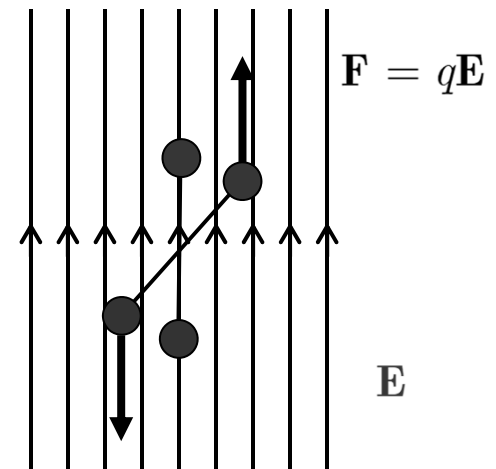
$$dW = \tau d\alpha = pE \sin \alpha d\alpha$$

- Pertanto per ruotare il dipolo di un angolo θ si deve compiere un lavoro W

$$W = \int_0^\theta pE \sin \alpha d\alpha = pE(1 - \cos \theta)$$

- Come al solito il lavoro fatto dalla forza esterna è uguale all'energia potenziale U del sistema
 - In realtà è il lavoro fatto dal momento della forza
 - Il grafico mostra l'andamento dell'energia U
- Si preferisce definire $U(\theta)$ in modo che $U(\pi/2) = 0$

$$U(\theta) = -pE \cos \theta = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$



Forze sul dipolo elettrico

- Se il campo elettrico non è uniforme la risultante delle forze non è nulla
- Calcoliamo la forza totale lungo l'asse z
 - Semplifichiamo limitandoci a un caso bidimensionale

$$F_{1z} = qE_z(x_1, z_1) \quad x_1 = x + \frac{d}{2} \sin \theta$$

$$F_{1z} \approx q \left[E_z(x, z) + \frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{d}{2} \sin \theta + \frac{\partial E_z}{\partial z} \frac{d}{2} \cos \theta \right] \quad z_1 = z + \frac{d}{2} \cos \theta$$

- Analogamente, per la forza 2

$$F_{2z} = -qE_z(x_2, z_2)$$

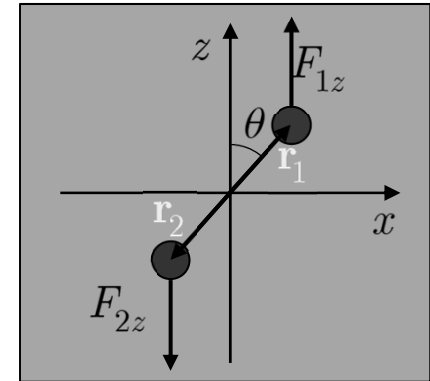
$$F_{2z} \approx -q \left[E_z(x, z) - \frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{d}{2} \sin \theta - \frac{\partial E_z}{\partial z} \frac{d}{2} \cos \theta \right]$$

- Calcoliamo la componente z della forza totale sul dipolo

$$F_z = F_{1z} + F_{2z}$$

$$F_z = q \left[E_z(x, z) + \frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{d}{2} \sin \theta + \frac{\partial E_z}{\partial z} \frac{d}{2} \cos \theta \right]$$

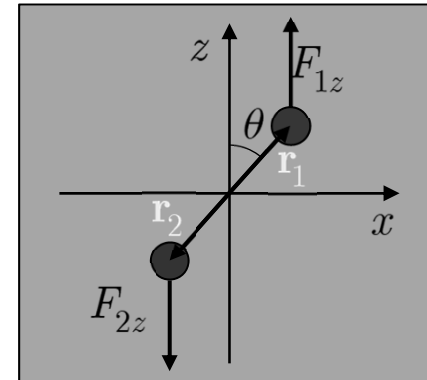
$$- q \left[E_z(x, z) - \frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{d}{2} \sin \theta - \frac{\partial E_z}{\partial z} \frac{d}{2} \cos \theta \right]$$



Forze sul dipolo elettrico

$$F_z = q \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{d}{2} \sin \theta + \frac{\partial E_z}{\partial z} \frac{d}{2} \cos \theta + \frac{\partial E_z}{\partial x} \frac{d}{2} \sin \theta + \frac{\partial E_z}{\partial z} \frac{d}{2} \cos \theta \right]$$

$$= qd \sin \theta \frac{\partial E_z}{\partial x} + qd \cos \theta \frac{\partial E_z}{\partial z} = p_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z}$$



- Generalizzando a tre dimensioni

$$F_z = p_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_z}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$F_z = p_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_z}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

- Si trovano equazioni analoghe per le altre componenti

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad F_y = p_x \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_y}{\partial z}$$

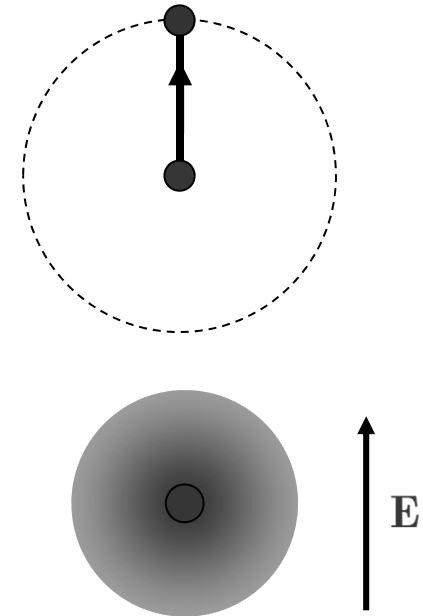
- Le equazioni possono essere riassunte in un'unica formula vettoriale

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

- Sottolineiamo che la forza sul dipolo è proporzionale al gradiente del campo
- Ribadiamo che se il campo è uniforme la forza è nulla

Dipoli atomici

- Il semplice modello "planetario" di atomo ha le caratteristiche di un dipolo
 - Consideriamo ad esempio un atomo di idrogeno
 - L'elettrone e il nucleo costituirebbero un dipolo
 - Sarebbe un dipolo ruotante molto rapidamente
 - Il momento di dipolo mediato nel tempo sarebbe nullo
 - Tuttavia dovrebbe emettere radiazione
 - Uno dei problemi insolubili dalla elettrodinamica classica
 - Risolto con la meccanica quantistica
- Utilizziamo un modello più aderente alla realtà
 - Lo abbiamo già visto
 - Un nucleo positivo puntiforme di carica $+q$
 - Una distribuzione sferica di carica negativa $-q$
 - Se non lo perturbiamo ha una simmetria sferica
 - Il momento di dipolo è nullo
 - Tuttavia un campo elettrico esterno può alterare la simmetria
 - Spostare le cariche elettriche: negativa verso il basso, positiva verso l'alto
 - L'atomo così perturbato ha un momento di dipolo
 - Calcoliamo il momento di dipolo in funzione del campo elettrico esterno E



Dipoli atomici

- Consideriamo il campo elettrico generato dalla distribuzione sferica e uniforme di carica negativa (l'elettrone)
- Supponiamo che il campo esterno non modifichi la forma sferica della distribuzione di carica degli elettroni
- Abbiamo visto che l'effetto netto del campo elettrico esterno è spostare il nucleo positivo rispetto al centro della sfera di elettroni
 - La carica negativa attrae il nucleo verso il centro della carica elettronica
 - Il campo esterno respinge il nucleo dal centro della carica elettronica
 - Otteniamo l'equilibrio quando il nucleo è ad una distanza d dal centro dove il campo esterno è uguale al campo della distribuzione sferica di elettroni
- Abbiamo già risolto questo problema (vedi diapositiva [110](#))
- Per una sfera di raggio R e carica totale q , il campo ad una distanza d dal centro della sfera è dato da

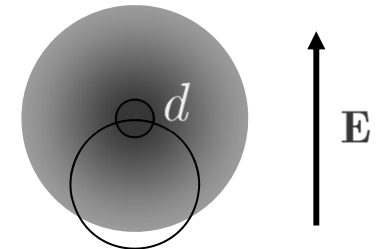
$$E_e(d) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{R^3}$$

- La distanza d è determinata dalla condizione

$$E_e(d) = E$$

- Otteniamo

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{R^3} = E \qquad qd = 4\pi\epsilon_0 R^3 E$$



Dipoli atomici

- Se il nucleo positivo è spostato di una distanza d l'atomo è equivalente ad un dipolo di due cariche $\pm q$ a distanza d
- L'atomo è pertanto equivalente ad un dipolo elettrico

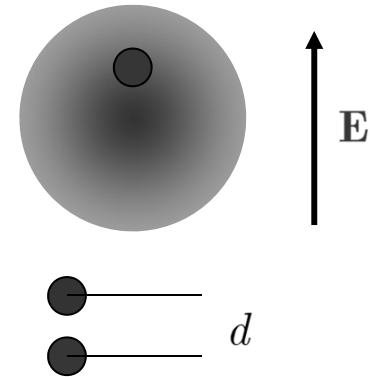
$$p = qd$$

- La relazione appena trovata diventa

$$p = 4\pi\epsilon_0 R^3 E$$

$$p = \alpha E$$

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 R^3$$



- Il coefficiente α prende il nome di polarizzabilità atomica
- Un calcolo esatto utilizzando la meccanica quantistica dà il seguente risultato

$$\alpha = \frac{9}{2} 4\pi\epsilon_0 a_0^3 \quad a_0 \text{ raggio di Bohr} \quad a_0 = 0.52 \times 10^{-10} \text{ m}$$

- La tabella nella diapositiva seguente mostra le polarizzabilità di alcuni atomi
- Spesso invece di α si definisce polarizzabilità atomica il rapporto

$$\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0}$$

- Si misura in m^3
- Per l'idrogeno

$$\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} = 0.66 \times 10^{-30} \text{ m}^3$$



$$R = 0.87 \times 10^{-10} \text{ m}$$

Dipoli atomici

Atomic polarizabilities ($\alpha/4\pi\epsilon_0$), in units of 10^{-30} m^3

Element	H	He	Li	Be	C	Ne	Na	Ar	K
$\alpha/4\pi\epsilon_0$	0.66	0.21	12	9.3	1.5	0.4	27	1.6	34

Electron Configurations in the Periodic Table

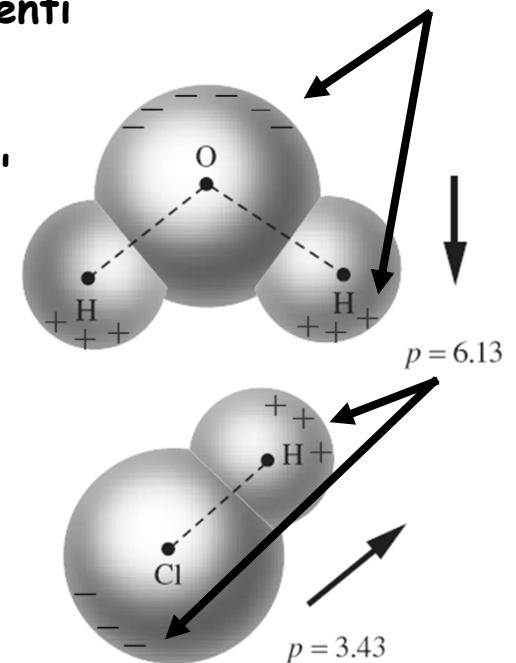
1 H 1s																	2 He 1s	
3 Li 2s	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne	
11 Na 3s	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar	
19 K 4s	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr	
37 Rb 5s	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe	
55 Cs 6s	56 Ba	57 La	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn	
87 Fr 7s	88 Ra	89 Ac	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110	111	112	113	114					
		58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu			
		90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr			

by: Sarah Faizi

by: Sarah Faizi

Momenti di dipolo permanente

- La tabella precedente può essere interpretata qualitativamente con il semplice modello classico che abbiamo visto nelle diapositive precedenti
 - Gli elementi del I gruppo (metalli alcalini) hanno un elettrone esterno
 - La distribuzione di carica risulta facilmente deformabile, poco rigida
 - Gli elementi dell'ultimo gruppo (i gas nobili) hanno una struttura elettronica molto rigida
 - Poco deformabili
- Le molecole possono esibire dei momenti di dipolo permanenti
 - I legami molecolari rendono le distribuzioni della carica degli elettroni asimmetriche
 - Si formano delle regioni "positive" e regioni "negative"
 - Normalmente i momenti di dipolo sono orientati casualmente
 - La somma di tutti i dipoli è in media nulla
 - La presenza di un campo elettrico esterno li allinea, in media, in una direzione
 - Per comprendere a fondo l'allineamento occorre un modello termodinamico (lo faremo forse)
- In entrambi i casi la materia viene polarizzata
 - Il materiale ha un momento di dipolo totale non nullo



Momenti di dipolo permanente

- Le molecole delle figure precedenti hanno momenti di dipolo elettrico che, come vedremo fra poco, sono molto elevati

- HCl $p = 3.4 \times 10^{-30}$ coulomb-metro

- H₂O $p = 6.1 \times 10^{-30}$ coulomb-metro

- Calcoliamo per confronto il momento di dipolo indotto in un atomo di idrogeno

$$\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} = 0.66 \times 10^{-30} \text{ m}^3$$

- Se applicassimo un campo di 1 megavolt/m (1000 V su 1 mm) il momento di dipolo indotto sarebbe

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 \times 0.66 \times 10^{-30} = \frac{0.66 \times 10^{-30}}{9 \times 10^9} = 7.3 \times 10^{-41}$$

$$p = \alpha E = 7.3 \times 10^{-41} \times 10^6 = 7.3 \times 10^{-35} \text{ coulomb-metro}$$

- Come si vede se una molecola ha un momento di dipolo permanente questo è di solito enormemente superiore a quello indotto in un atomo simmetrico
- Questa è la distinzione fra molecole polari e molecole normali
- Per finire vale la pena notare quanto vale il campo elettrico di un protone a distanze di circa 1 Å

$$E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(10^{-10})^2} \approx 10^{11} \text{ V/m}$$

Espansione multipolare

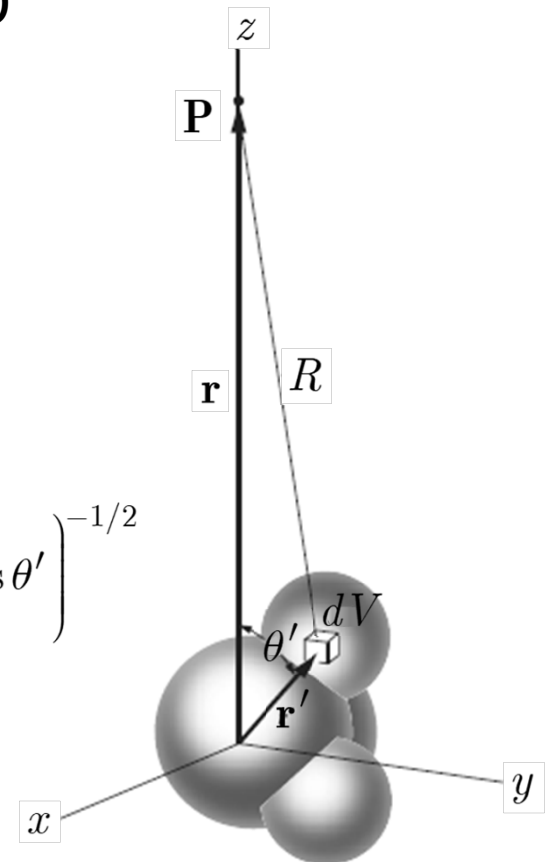
- Vale la pena a questo punto fare una piccola digressione per introdurre l'espansione multipolare del potenziale elettrico (o del campo elettrico)
 - Il dipolo che abbiamo studiato è il multipolo di ordine 1
- Abbiamo visto che il potenziale elettrico di una distribuzione arbitraria di carica ρ in un punto P si scrive come (vedi diapositiva [69](#))

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

- Per semplicità consideriamo $\mathbf{r}$ sull'asse z
- L'approssimazione di questa formula per distanze r molto maggiori delle dimensioni della distribuzione di carica ci ha portato all'introduzione del dipolo
- Esaminiamo il denominatore

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta')^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{r'}{r} \cos \theta' \right)^{-1/2}$$

- Poniamo $u = \frac{r'}{r} \implies \frac{1}{R} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 - 2u \cos \theta'}}$



Espansione multipolare

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{R} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 - 2u \cos \theta'}} \quad u = \frac{r'}{r}$$

- Ricordiamo la funzione generatrice dei polinomi di Legendre (diapositiva [194](#))

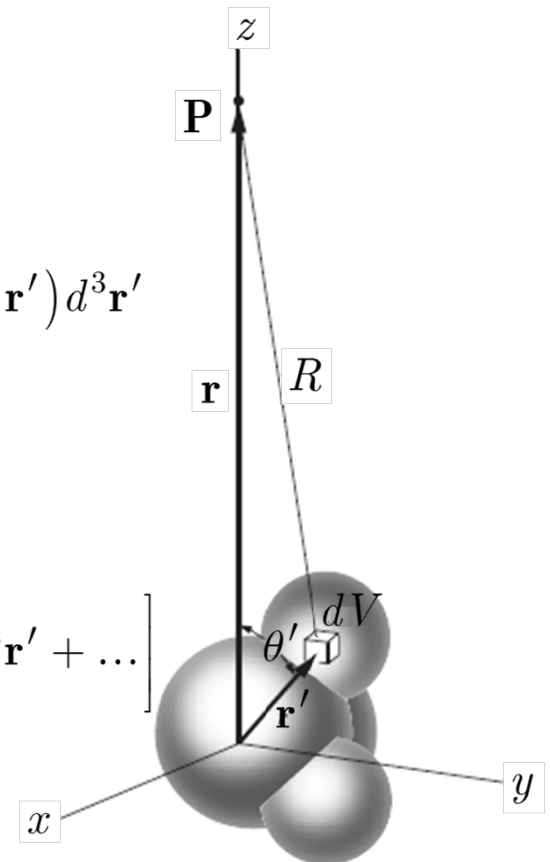
$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2u \cos \theta' + u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta') u^n$$

- Introduciamo nel potenziale

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta') \frac{r'^n}{r^n} \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_V P_n(\cos \theta') r'^n \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int \rho d^3\mathbf{r}' + \frac{1}{r^2} \int r' P_1(\cos \theta') \rho d^3\mathbf{r}' + \frac{1}{r^3} \int r'^2 P_2(\cos \theta') \rho d^3\mathbf{r}' + \dots \right]$$



Espansione multipolare

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int \rho d^3\mathbf{r}' + \frac{1}{r^2} \int r' P_1(\cos \theta') \rho d^3\mathbf{r}' + \frac{1}{r^3} \int r'^2 P_2(\cos \theta') \rho d^3\mathbf{r}' + \dots \right]$$

- Pertanto otteniamo il seguente sviluppo del potenziale

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} K_0 + \frac{1}{r^2} K_1 + \frac{1}{r^3} K_2 + \dots \right] \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} K_n$$

- Le quantità K_n sono gli integrali della densità di carica

$$K_n = \int r'^n P_n(\cos \theta') \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$$

- L'espansione scritta si chiama espansione multipolare del potenziale
- I coefficienti K_n sono i momenti di multipolo della distribuzione di carica
 - Il momento K_0 è detto momento di monopolo
 - Il momento K_1 è detto momento di dipolo
 - Il momento K_2 è detto momento di quadrupolo
 - ... ottupolo
 - NB: le espressioni trovate presuppongono che il punto $\mathbf{r}$ sia sull'asse z
 - Per $\mathbf{r}$ arbitrario le formule utilizzano le armoniche sferiche

Espansione multipolare

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} K_n$$

- L'utilità di questa espansione sta nel fatto che a grandi distanze il potenziale è completamente determinato dal primo momento non nullo dello sviluppo
 - I termini successivi vanno a zero più rapidamente con potenze di $1/r$ maggiori
 - I termini precedenti sono nulli
- Se $K_0 \neq 0$ il potenziale ha un andamento di monopolo
 - Il potenziale di una carica puntiforme nell'origine
- Se $K_0 = 0$ allora il prossimo termine importante è K_1

$$K_0 = \int \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' = 0 \quad \text{Il sistema è neutro}$$

- Il termine importante è K_1 , il dipolo che abbiamo studiato
- Se anche $K_1 = 0$ allora si va ai termini superiori, ad esempio il quadrupolo
- I momenti di multipolo dipendono dalle simmetrie (o asimmetrie) della distribuzione di carica

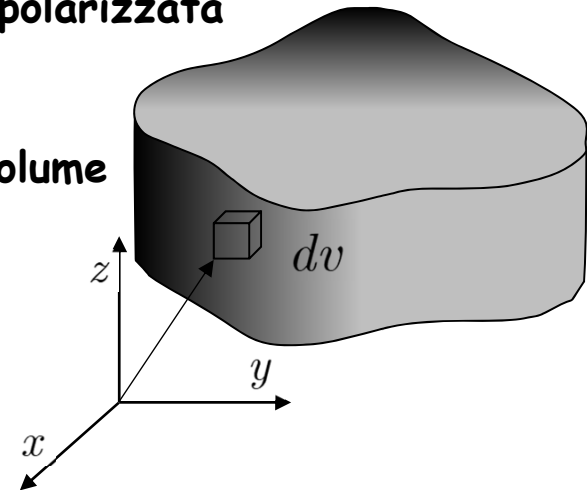
$$K_n = \int r'^n P_n(\cos \theta') \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$$

Campo elettrico della materia polarizzata

- Calcoliamo adesso il campo elettrico prodotto dalla materia polarizzata
 - Supponiamo di avere un blocco di materia polarizzata
 - Per il momento non chiediamoci come sia stata polarizzata
 - Immaginiamo che i dipoli siano allineati in una certa direzione, supponiamo lungo l'asse z
 - Supponiamo che ci siano $n(\mathbf{r})$ dipoli per unità di volume
 - Supponiamo che ogni dipolo abbia valore p
- Introduciamo il vettore densità di polarizzazione $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r})\mathbf{p}$$

- Le sue dimensioni sono (momento di dipolo)/ m^3
 - $\text{C}\cdot\text{m}/\text{m}^3 = \text{C}/\text{m}^2$: Coulomb per m^2
 - $n(\mathbf{r})$ (e quindi $\mathbf{P}$) in generale sono funzioni della posizione
- Supponiamo che $n(\mathbf{r})$ sia tanto grande che in un volume dv (infinitesimo per la geometria del problema ma macroscopico su scala atomica) ci sia un numero di dipoli molto grande
 - Diciamo allora che un elemento di volume dv del blocco di materia ha un momento di dipolo



$$d\mathbf{p} = \mathbf{P} dv$$

Campo elettrico della materia polarizzata

- Per calcolare il campo elettrico generato all'esterno del materiale suddividiamo il blocco in tante "colonne" verticali
- Calcoliamo il campo elettrico generato da una "colonna"
- Consideriamo un elemento della colonna

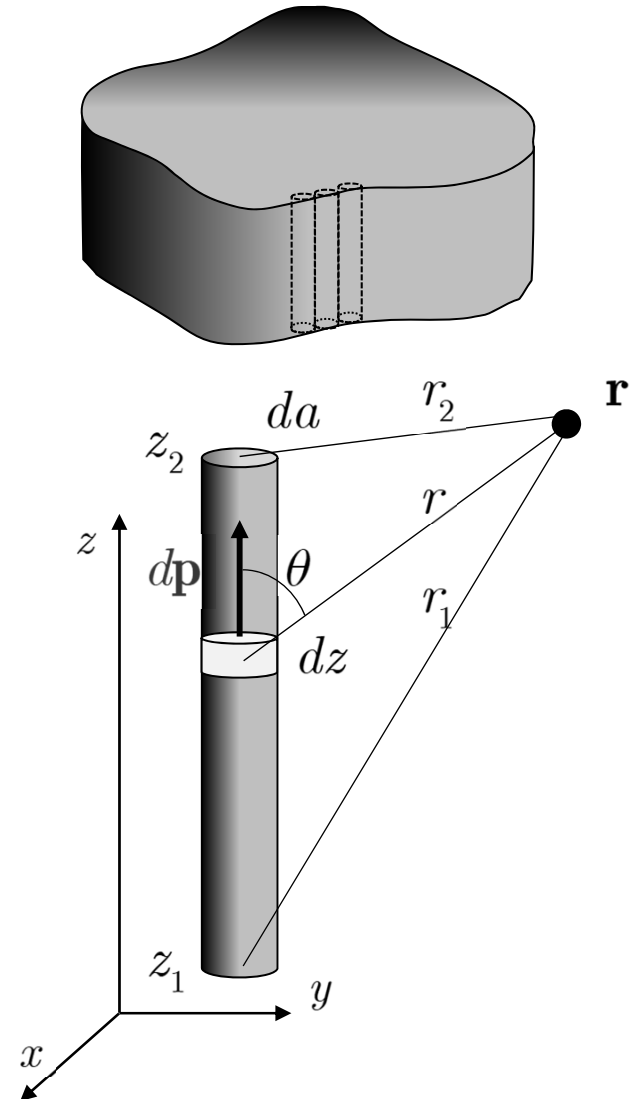
$$dv = dadz \quad d\mathbf{p} = \mathbf{P} dv$$

- Il potenziale generato da questo dipolo è dato da (vedi diapositiva [272](#))

$$d\phi(\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{dp \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$d\phi(\mathbf{r}) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{P dadz \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$d\phi(\mathbf{r}) = \frac{P da}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz \cos \theta}{r^2}$$



Campo elettrico della materia polarizzata

- Per calcolare l'integrale osserviamo la relazione fra dr e dz

- Osserviamo che quando z varia da z_1 a z_2
 r varia da r_1 a r_2 e diminuisce

- Abbiamo pertanto

$$dz \cos \theta = -dr$$

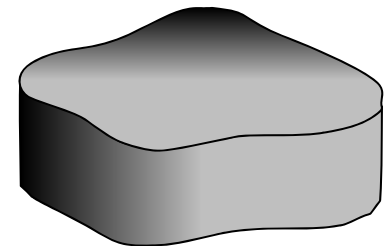
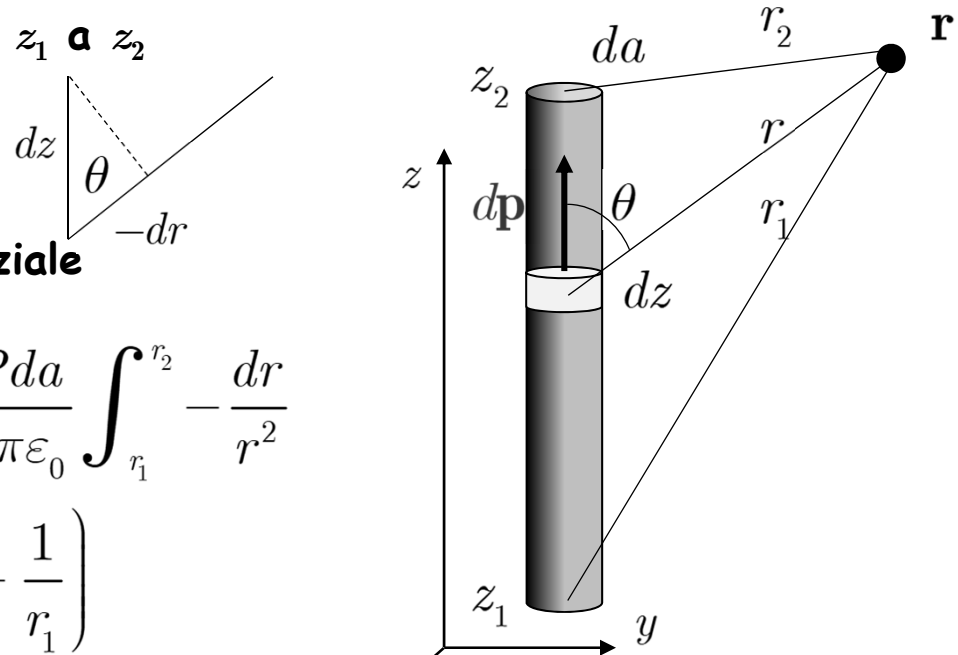
- Inseriamo nella formula del potenziale

$$d\phi(\mathbf{r}) = \frac{Pda}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz \cos \theta}{r^2} = \frac{Pda}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} -\frac{dr}{r^2}$$

$$d\phi(\mathbf{r}) = \frac{Pda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

- Questa formula è identica a quella del potenziale generato da una carica $+Pda$ posta a z_2 e una carica $-Pda$ posta a z_1
- Il calcolo viene concluso integrando sulla superficie del blocco di dielettrico

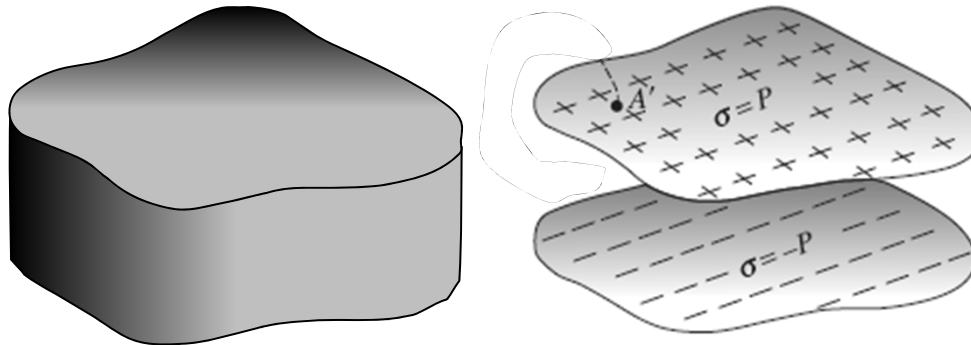
$$\phi(\mathbf{r}) = \int_s \frac{Pda}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$



Campo elettrico della materia polarizzata

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_s \frac{P da}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

- Pertanto il risultato del calcolo è che il blocco di materiale polarizzato genera un potenziale elettrico identico a quello di due densità di carica superficiale poste sulle superfici esterne del blocco



Attenzione
Per calcolare il campo elettrico all'esterno si usano
SOLAMENTE
i due piani di carica
FRA I PIANI C'È IL VUOTO

- La densità superficiale di carica è data dal modulo del vettore densità di polarizzazione

$$\sigma = P = |\mathbf{P}|$$

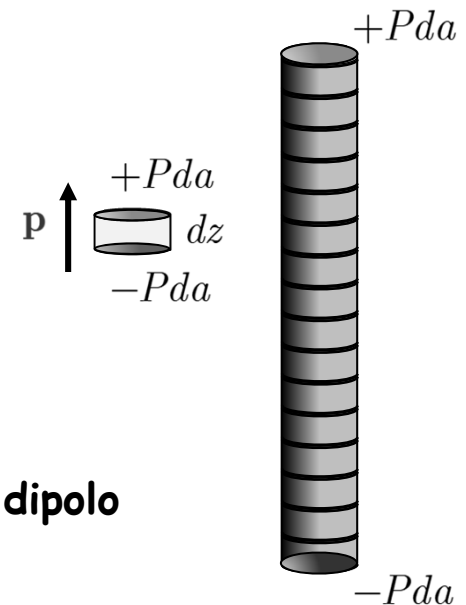
- Sottolineiamo che abbiamo fatto molte assunzioni
 - Polarizzazione uniforme
 - Diretta lungo l'asse z

Campo elettrico della materia polarizzata

- Abbiamo visto che una colonna di materiale polarizzato genera un campo equivalente a quello di due piccoli strati di carica $+Pda$ e $-Pda$ posti sulle facce superiore e inferiore del cilindro
- Possiamo convincerci del risultato precedente in un modo meno matematico e più fisico, più intuitivo
- Suddividiamo la colonna in tanti cilindretti infinitesimi
 - Il singolo cilindretto ha un volume $dv = da \, dz$
 - Il suo momento di dipolo è $p = P \, dv$
- Ai fini del campo generato all'esterno del cilindretto possiamo sostituirlo con due strati circolari di carica positiva e negativa $dq_{\pm} = \pm Pda$
- Il cilindretto e i due strati hanno lo stesso momento di dipolo

$$p = dqdz = Pdadz = Pdv$$

- Generano lo stesso campo all'esterno
- Se facciamo lo stesso con tutti i cilindretti otteniamo la condizione in figura
 - Tutti gli strati di carica intermedi si cancellano
 - Rimangono solo i due strati sulla faccia superiore e quello sulla faccia inferiore



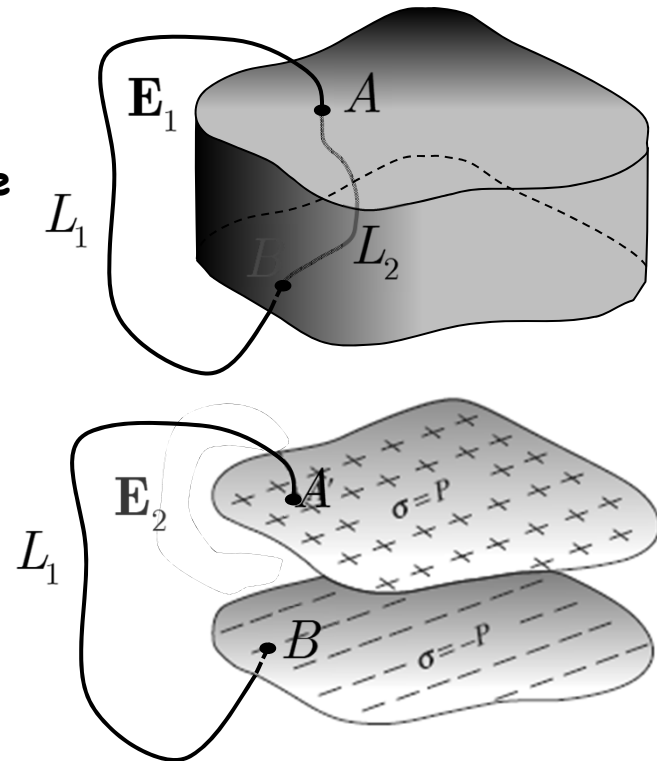
Campo elettrico della materia polarizzata

- La sostituzione del blocco di dielettrico con due strati di carica è adeguato per il calcolo del campo all'esterno del materiale
- In particolare permette di calcolare l'integrale fra due punti qualunque purché esterni al blocco di dielettrico
- È sufficiente infatti calcolare l'integrale utilizzando il campo generato dai due strati di carica

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 \quad \int_A^B \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}$$

- Abbiamo dimostrato che i due sistemi sono equivalenti per il campo esterno
- Questa semplice e banale osservazione ci permette di farne un'altra, per nulla banale
- Anche se il campo all'interno del materiale è molto complicato sappiamo calcolare il suo integrale fra due punti sulla superficie

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 = \int_{L_1}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}$$



Campo all'interno del dielettrico

- Supponiamo adesso che lo spessore del blocco che stiamo studiando sia sottile
- Stiamo inoltre supponendo che la polarizzazione sia uniforme: P costante
- Rimанiamo comunque lontani dai bordi
- In queste condizioni il campo fra i due strati è

$$\mathbf{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{e}}_z = -\frac{P}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{e}}_z = -\frac{P}{\epsilon_0}$$

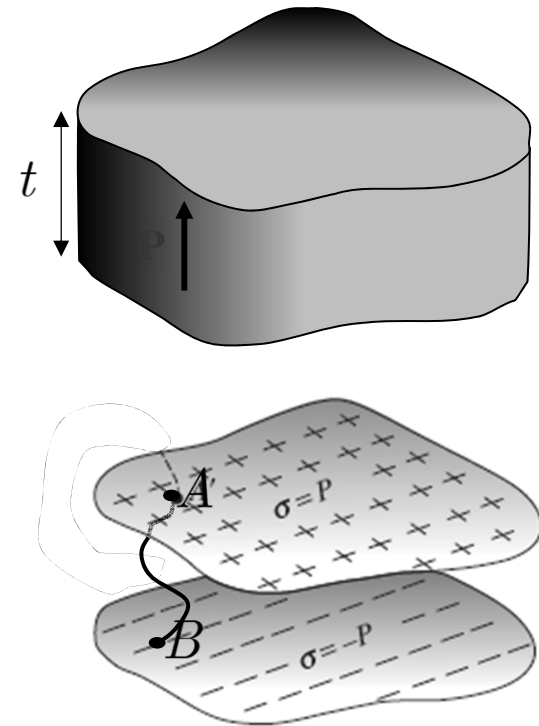
- La differenza di potenziale

$$\phi_A - \phi_B = \frac{P}{\epsilon_0} t$$

- All'interno del dielettrico il campo è estremamente complicato
- Vicino ad un atomo il campo elettrico raggiunge valori dell'ordine di $E = 10^{11}$ V/m
- Vicino ad una molecola polare (diciamo a $10 \text{ \AA}$ di distanza) il campo raggiunge valori dell'ordine di $10^7 - 10^8$ V/m

$$E \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \quad p = 6 \times 10^{-30} \text{ C-m} \quad r = 10 \times 10^{-10} = 10^{-9} \text{ m}$$

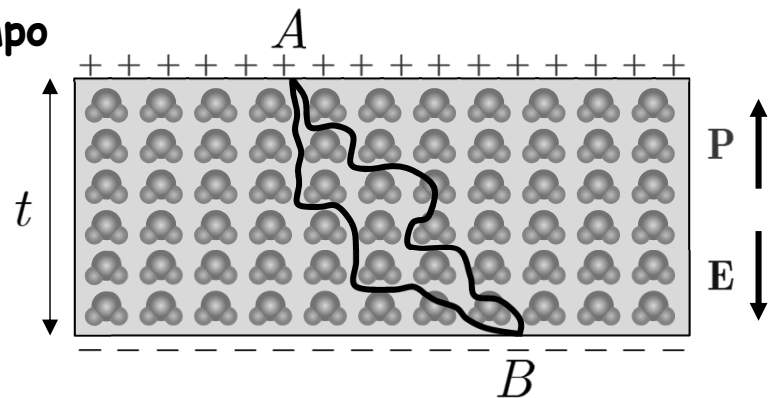
$$E \sim 9 \times 10^9 \times 6 \times 10^{-30} \approx 5 \times 10^7 \text{ V/m}$$



Campo all'interno del dielettrico

- Tuttavia, nonostante la complessità del campo elettrico all'interno del materiale abbiamo visto una sua proprietà sorprendente
- L'integrale di linea fra due punti A e B è uguale a quello del campo prodotto da due strati di carica $\sigma = \pm P$

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} t = \frac{P}{\epsilon_0} t$$



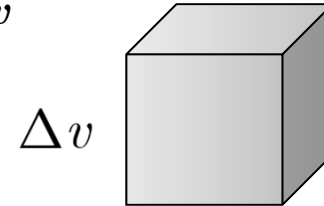
- Ovviamente è anche indipendente dal particolare cammino
- Infatti, per quanto si tratti di un campo molto complesso si tratta comunque di un campo elettrostatico che obbedisce alle leggi dell'elettrostatica
- In particolare la circuitazione di $\mathbf{E}$ è nulla

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

- Lungo una linea si incontrano campi di enorme intensità con grandi variazioni
 - In un millesimo di millimetro ($1\mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$) si incontrano circa 10^4 dipoli
 - Gran parte dei contributi all'integrale si elidono
 - Se il materiale non fosse polarizzato il risultato sarebbe nullo
 - È naturale supporre che queste cancellazioni avvengano anche se si sommano i campi presenti in moltissimi punti adiacenti

Campo all'interno del dielettrico

- Significa che se consideriamo un volumetto infinitesimo Δv
 - Grande a livello microscopico
 - Che contiene tanti atomi o dipoli
 - Se sommiamo il campo misurato in punti diversi all'interno del volumetto molti contributi si elidono
- Questo risultato induce a pensare che si possa definire un valor medio di $\mathbf{E}$



$$\langle \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{E} dv$$

- La media è calcolata in volumi infinitesimi su scala macroscopica ma grandi abbastanza da contenere un grande numero di dipoli
 - In questo modo si eliminano le variazioni dovute a possibili fluttuazioni nelle cancellazioni dei campi microscopici
- Nel sistema che stiamo analizzando (il blocco di dielettrico polarizzato) il valore di questa media è molto semplice

$$\langle \mathbf{E} \rangle = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

- È un sistema molto semplice
 - La polarizzazione è uniforme

Campo all'interno del dielettrico

- Allo stesso modo si possono calcolare le medie di altre grandezze finora definite solo a livello microscopico

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \rho dv \quad \langle \phi \rangle = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \phi dv$$

- Queste definizioni risulteranno utili solo se le leggi dell'elettrostatica valgono anche per le quantità mediate
 - Si verifica che valgono !

$$\oint \langle \mathbf{E} \rangle \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \langle \mathbf{E} \rangle = -\nabla \langle \phi \rangle$$

$$\oint \langle \mathbf{E} \rangle \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \nabla \cdot \langle \mathbf{E} \rangle = \frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0} \quad \nabla^2 \langle \phi \rangle = -\frac{\langle \rho \rangle}{\epsilon_0}$$

- A questo punto possiamo anche osservare che una volta verificato che le cose funzionano possiamo abbandonare questa notazione "pesante"
 - In presenza di dielettrici si lavora sempre ad una scala macroscopica
 - Le grandezze fisiche sono sempre medie di grandezze microscopiche
 - Si elimina il simbolo di media $\langle X \rangle$ che viene sottinteso