
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

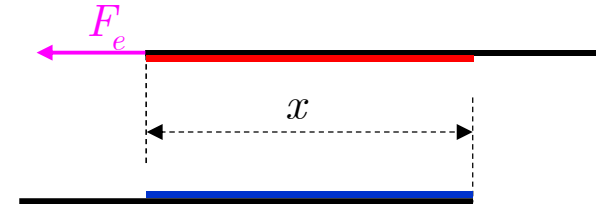
Lezione n. 12 - 10.11.2022

Forza fra le armature del condensatore
Coefficienti di capacità
Dielettrici

Anno Accademico 2022/2023

Forza sulle armature

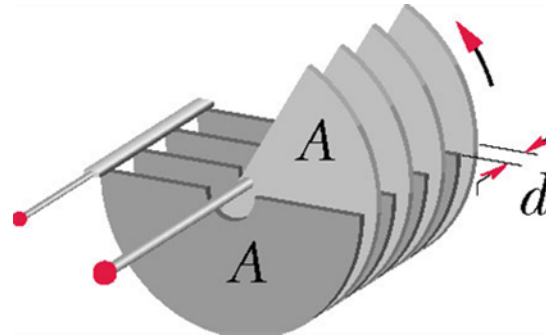
- Consideriamo un altro problema con condensatore a facce parallele
 - Supponiamo che le armature siano fissate in modo che la loro distanza non possa variare
 - Inoltre l'armatura superiore può muoversi orizzontalmente mentre quella inferiore è fissa
 - Supponiamo infine che l'armatura superiore sia spostata verso destra
- Vogliamo adesso mostrare che se sul condensatore c'è una carica Q sull'armatura superiore si esercita una forza da destra verso sinistra
 - Sia x la lunghezza della regione di sovrapposizione
- Trascurando gli effetti di bordo, le cariche Q e $-Q$ sulle due armature si dispongono solo nella parte di sovrapposizione delle due armature
 - Infatti la carica negativa a sinistra è attratta verso destra dalle cariche positive in alto
 - La carica positiva a destra, analogamente, è attratta verso sinistra
- Di fatto si tratta di un condensatore di capacità variabile



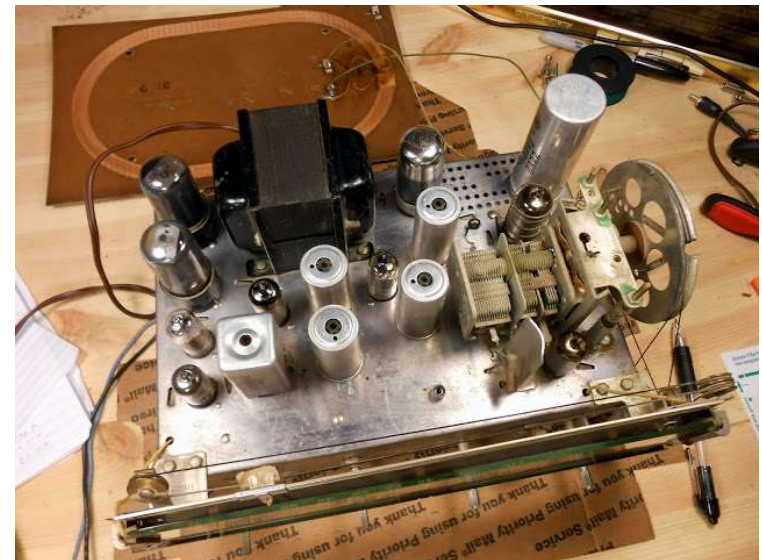
$$A = L \cdot x \quad C(x) = \frac{\varepsilon_0 L \cdot x}{d} = kx$$

Condensatori variabili

- I condensatori variabili erano utilizzati nel sistema di sintonia delle vecchie radio



- Servivano per generare un segnale sinusoidale di frequenza variabile
- Oggi si utilizzano circuiti digitali per la sintesi di onde sinusoidali
- Una radio ancora più vecchia ... a valvole



Forza sulle armature

- Scriviamo l'energia del condensatore in funzione della carica

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

- Consideriamo costante la carica
- Facciamo variare la lunghezza di dx
- L'energia varia a sua volta

$$dU = \frac{dU}{dx} dx = \frac{1}{2} Q^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{C} \right) dx$$

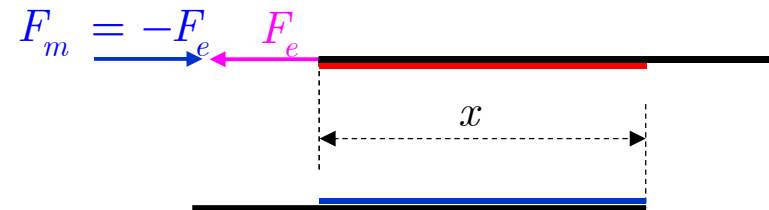
- Se dx è positivo la regione di sovrapposizione cresce
 - La capacità aumenta
 - La derivata di $1/C$ è negativa
 - L'energia diminuisce
- Se l'energia del sistema diminuisce significa che il sistema sta facendo lavoro contro la forza F_m che bilancia F_e
- Abbiamo pertanto

$$dU = F_m dx = -F_e dx = \frac{1}{2} Q^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{C} \right) dx$$



$$F_e = -\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{2} Q^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{C} \right)$$

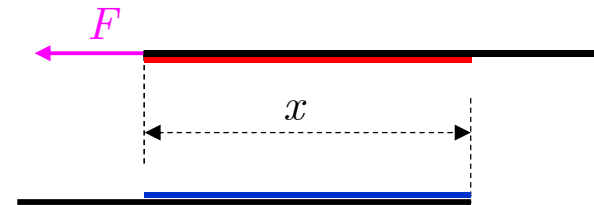
- F_e è nel verso che fa crescere x



$$C(x) = \frac{\epsilon_0 L \cdot x}{d} = kx$$

Forza sulle armature

- Cosa succede se invece di mantenere costante la carica manteniamo costante la differenza di potenziale V ?



- La manteniamo costante con una batteria
- In questo caso scriviamo l'energia come

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

$$C(x) = \frac{\epsilon_0 L \cdot x}{d} = kx$$

- Se variamo la sovrapposizione di dx $dU = \frac{dU}{dx} dx = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx} dx$ $\left(\frac{dC}{dx} > 0 \right)$
- Vediamo che questa volta, se dx è positivo, l'energia aumenta
- Vedremo fra breve che l'energia è fornita dalla batteria

- La carica deve aumentare

- Infatti se C aumenta e V rimane costante, Q aumenta ($Q = CV$)
- La batteria trasporta carica dall'armatura inferiore a quella superiore
- Nel fare questo compie un lavoro $dW = V dQ$
- La carica necessaria per un aumento di capacità dC è $dQ = V dC$
- Pertanto il lavoro fatto dalla batteria è

$$dU = VdQ = VVdC = V^2 dC = V^2 \frac{dC}{dx} dx$$

- Notiamo che è il doppio di quanto è aumentata l'energia del condensatore

Forza sulle armature

- L'energia in eccesso viene spesa in lavoro contro la forza esterna

- Come nel caso precedente il bilancio energetico corretto è

$$dW_m + dW_G = dU \quad \longrightarrow \quad -F_e dx + V^2 dC = \frac{1}{2} V^2 dC \quad \longrightarrow \quad -F_e dx = -\frac{1}{2} V^2 dC$$

$$F_e = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx} = \frac{1}{2} V^2 \frac{C^2}{C^2} \frac{dC}{dx} = -\frac{1}{2} Q^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{C}$$

- Un'ultima osservazione

- Se il campo elettrico è perpendicolare alle armature chi fornisce la forza orizzontale?

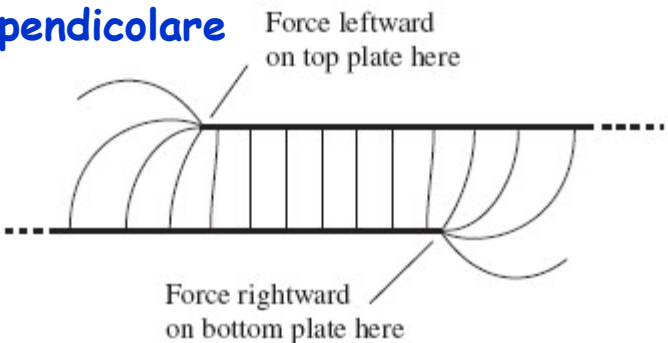
- In realtà non è vero che il campo sia sempre perpendicolare

- Per comprendere l'origine fisica della forza sono essenziali gli effetti ai bordi

- Tuttavia gli effetti ai bordi non influenzano significativamente l'energia del condensatore

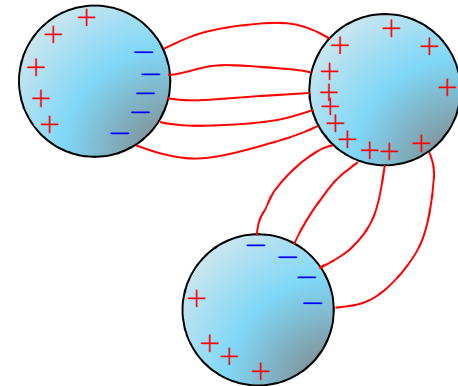
- Almeno fino a quando l'armatura superiore è lontana dalla posizione di equilibrio

- È comunque interessante notare che nel calcolo fatto trascuriamo gli effetti ai bordi



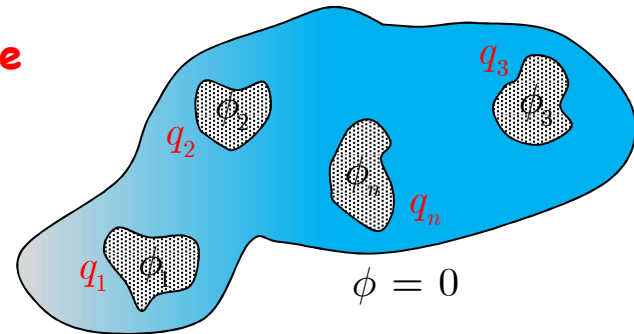
Coefficienti di capacità

- Consideriamo un conduttore
 - Supponiamo abbia una carica q distribuita sulla superficie
- Avviciniamo un altro conduttore scarico
 - La carica del primo conduttore induce cariche elettriche sul secondo
 - Alcune delle linee di campo che originano dal primo conduttore terminano sul secondo
- Intuitivamente, il fatto che alcune linee del primo conduttore finiscano sul secondo è il fenomeno alla base del concetto di capacità
 - Il condensatore è il caso speciale in cui tutte le linee del primo conduttore finiscono sul secondo
 - Induzione completa
- Si può avvicinare anche un terzo conduttore
 - Le linee di campo adesso terminano anche sul terzo
 - Ci saranno linee anche fra il secondo e il terzo ...
 - Vogliamo studiare la relazione che esiste fra le cariche sui conduttori e i loro potenziali
 - Una generalizzazione del condensatore che è formato solo da due conduttori



Coefficienti di capacità

- Consideriamo adesso un sistema di n conduttori
 - Poniamo i conduttori all'interno di un conduttore cavo posto a potenziale $\phi = 0$
 - Utilizziamo il potenziale di questo conduttore come potenziale di riferimento
 - Potremmo anche eliminare il conduttore esterno e prendere come riferimento il potenziale all'infinito
- Il teorema di unicità ci assicura che fissati i potenziali $\phi_1, \dots, \phi_n$ il potenziale elettrostatico all'interno della regione è univocamente determinato
 - Noto il campo elettrico possiamo determinare la carica su ogni conduttore
 - Pertanto, fissati i potenziali, le cariche sui conduttori sono univocamente determinate
- Vogliamo trovare una relazione che ci permetta di determinare la carica su ogni conduttore noti i potenziali sui conduttori stessi
 - A tale fine consideriamo n problemi diversi in cui, a turno, il conduttore k è posto a potenziale ϕ_k mentre tutti gli altri sono posti a potenziale nullo



Coefficienti di capacità

- Mettiamo adesso a potenziale $\phi = 0$ tutti i conduttori meno il primo, che rimane fissiamo a potenziale ϕ_1

- I conduttori a potenziale $\phi = 0$ sono collegati con un filo (conduttore) al conduttore cavo
- Per effetto del potenziale ϕ_1 sui conduttori appaiono le cariche $q_1, \dots, q_n$

- Sappiamo che le equazioni sono lineari
 - Se raddoppiamo il potenziale ϕ_1 anche le cariche $q_1, \dots, q_n$ saranno raddoppiate

- Pertanto avremo

$$q_1 = c_{11}\phi_1 \quad q_2 = c_{21}\phi_1 \quad \dots \quad q_n = c_{n1}\phi_1$$

- Possiamo ripetere ponendo a potenziale ϕ_2 il secondo conduttore

$$q'_1 = c_{12}\phi_2 \quad q'_2 = c_{22}\phi_2 \quad \dots \quad q'_n = c_{n2}\phi_2$$

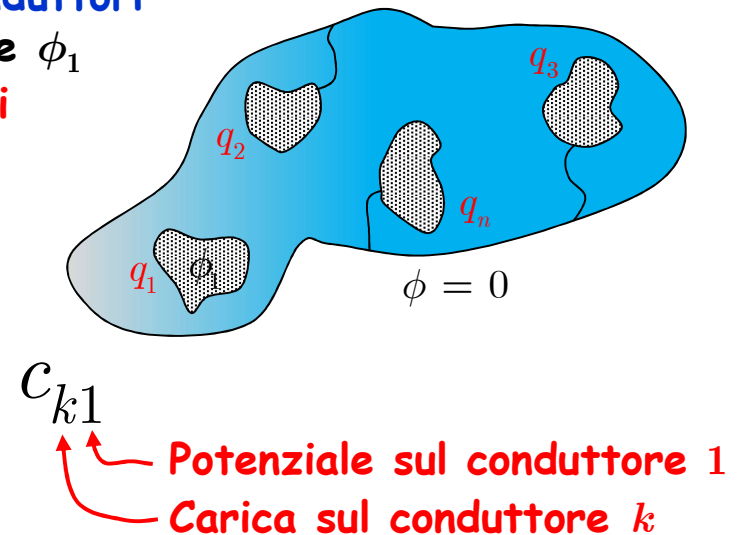
- Ovviamente le cariche q' sono diverse dalle cariche q

- E così via ...

$$q''_1 = c_{1k}\phi_k \quad q''_2 = c_{2k}\phi_k \quad \dots \quad q''_n = c_{nk}\phi_k$$

- Ancora una volta utilizziamo la linearità delle equazioni dell'elettrostatica

- Se tutti i potenziali sono diversi da zero contemporaneamente la carica su ogni conduttore sarà la somma di tutte le cariche trovate con la procedura precedente



Coefficienti di capacità

- Mettendo insieme le equazioni scritte

$$\begin{aligned}q_1 &= c_{11}\phi_1 + c_{12}\phi_2 + \dots + c_{1k}\phi_k + \dots + c_{1n}\phi_n \\q_2 &= c_{21}\phi_1 + c_{22}\phi_2 + \dots + c_{2k}\phi_k + \dots + c_{2n}\phi_n \\&\dots = \\q_k &= c_{k1}\phi_1 + c_{k2}\phi_2 + \dots + c_{kk}\phi_k + \dots + c_{kn}\phi_n \\&\dots = \\q_n &= c_{n1}\phi_1 + c_{n2}\phi_2 + \dots + c_{nk}\phi_k + \dots + c_{nn}\phi_n\end{aligned}$$

- Si può dimostrare che i coefficienti c_{jk} sono simmetrici: $c_{jk} = c_{kj}$
- I coefficienti che abbiamo definito prendono il nome di coefficienti di capacità

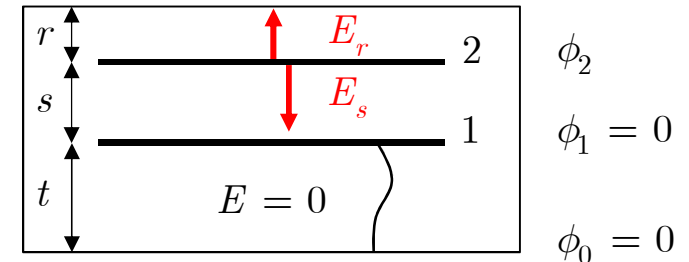
- Le relazioni trovate possono essere invertite

$$\begin{aligned}\phi_1 &= a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1k}q_k + \dots + a_{1n}q_n \\ \phi_2 &= a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2k}q_k + \dots + a_{2n}q_n \\ &\dots = \\ \phi_k &= a_{k1}q_1 + a_{k2}q_2 + \dots + a_{kk}q_k + \dots + a_{kn}q_n \\ &\dots = \\ \phi_n &= a_{n1}q_1 + a_{n2}q_2 + \dots + a_{nk}q_k + \dots + a_{nn}q_n\end{aligned}$$

- I nuovi coefficienti a_{jk} prendono il nome di coefficienti di potenziale

Coefficienti di capacità

- Per meglio comprendere il significato e l'utilizzo dei coefficienti di capacità consideriamo l'esempio seguente
 - Due elettrodi piani di area A a distanza s posti all'interno di una scatola metallica
 - La scatola è posta a potenziale $\phi = 0$
 - I piani distano r e t dalle pareti della scatola
- Calcoliamo i coefficienti di capacità supponendo che le distanze siano tali da poter assumere che i campi elettrici siano uniformi (distanze piccole $\rightarrow$ piani infiniti)
 - Poniamo l'elettrodo 1 a potenziale nullo ($\phi_1=0$) e l'elettrodo 2 a potenziale ϕ_2
 - Nelle regioni r e s i campi elettrici sono uniformi
 - Nella regione t il campo è nullo
 - Sulla superficie superiore del conduttore 2 ci sarà una densità superficiale σ_r
 - Sulla superficie inferiore del conduttore 2 la densità sarà σ_s
 - Sulla superficie superiore del conduttore 1 la densità di carica è $-\sigma_s$
 - Sulla superficie inferiore del conduttore 1 la densità di carica è nulla
- Avremo



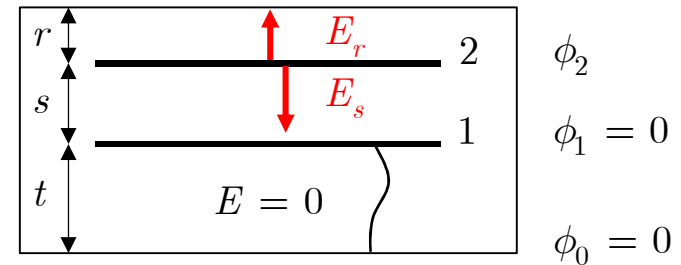
$$E_r = \frac{\sigma_r}{\epsilon_0} \quad E_s = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0} \quad q_2 = (\sigma_r + \sigma_s)A \quad q_1 = -\sigma_s A$$

Coefficienti di capacità

- Troviamo la relazione fra i campi elettrici e i potenziali

- I campi sono uniformi

$$E_r = \frac{\phi_2 - \phi_0}{r} = \frac{\phi_2}{r} \quad E_s = \frac{\phi_2 - \phi_1}{s} = \frac{\phi_2}{s}$$



- Ricordando le relazioni fra campi e densità superficiali σ_r e σ_s

$$E_r = \frac{\sigma_r}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \frac{\phi_2}{r} = \frac{\sigma_r}{\epsilon_0} \quad E_s = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad \frac{\phi_2}{s} = \frac{\sigma_s}{\epsilon_0}$$

- E infine la relazione cercata fra carica e potenziale

$$q_2 = (\sigma_r + \sigma_s)A = \left(\epsilon_0 \frac{\phi_2}{r} + \epsilon_0 \frac{\phi_2}{s} \right) A \quad q_2 = \epsilon_0 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) A \phi_2$$

$$c_{22} = \epsilon_0 \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \right) A$$

- Sull'elettrodo 1

$$q_1 = -\sigma_s A = -\epsilon_0 \frac{\phi_2}{s} A$$

$$q_1 = -\epsilon_0 \frac{1}{s} A \phi_2$$

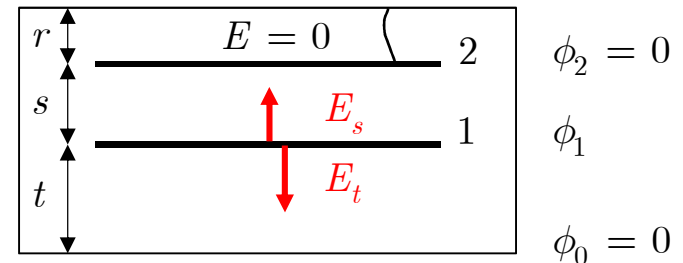
$$c_{12} = -\epsilon_0 \frac{1}{s} A$$

Coefficienti di capacità

- Adesso poniamo a zero il potenziale dello elettrodo 2 e l'elettrodo 1 a potenziale ϕ_1

- Adesso i campi saranno uniformi nelle regioni s e t

- Il campo sarà nullo nella regione r



- Sulla superficie superiore del conduttore 1 la densità è σ'_s
- Sulla superficie inferiore del conduttore 1 la densità è σ'_t
- Sulla superficie inferiore del conduttore 2 la densità di carica è $-\sigma'_s$
- Sulla superficie superiore del conduttore 2 la densità di carica è nulla

- Come nel caso precedente avremo per i campi

$$E_s = \frac{\phi_1 - \phi_2}{s} = \frac{\phi_1}{s} \quad E_t = \frac{\phi_1 - \phi_0}{t} = \frac{\phi_1}{t} \quad E_s = \frac{\sigma'_s}{\epsilon_0} \quad E_t = \frac{\sigma'_t}{\epsilon_0}$$

- E infine per le cariche

$$q_1 = (\sigma'_s + \sigma'_t)A = \left(\epsilon_0 \frac{\phi_1}{s} + \epsilon_0 \frac{\phi_1}{t} \right) A \quad q_1 = \epsilon_0 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} \right) A \phi_1 \quad c_{11} = \epsilon_0 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} \right) A$$

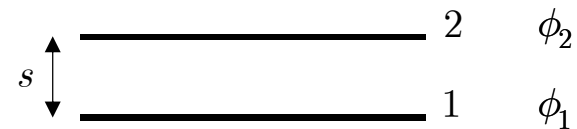
- E sull'elettrodo 2

$$q_2 = -\sigma'_s A = -\epsilon_0 \frac{\phi_1}{s} A \quad q_2 = -\epsilon_0 \frac{1}{s} A \phi_1 \quad c_{21} = -\epsilon_0 \frac{1}{s} A$$

Coefficienti di capacità

- In definitiva abbiamo trovato per c_{ij}

$i \backslash j$	1	2
1	$\varepsilon_0 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{t} \right) A$	$-\varepsilon_0 \frac{A}{s}$
2	$-\varepsilon_0 \frac{A}{s}$	$\varepsilon_0 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{r} \right) A$



$i \backslash j$	1	2
1	$\varepsilon_0 \frac{A}{s}$	$-\varepsilon_0 \frac{A}{s}$
2	$-\varepsilon_0 \frac{A}{s}$	$\varepsilon_0 \frac{A}{s}$

- È interessante a questo punto studiare il caso limite in cui la scatola metallica va all'infinito
- In questo caso $r \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow \infty$
- Diventa un condensatore piano

$$q_1 = +\frac{\varepsilon_0 A}{s} \phi_1 - \frac{\varepsilon_0 A}{s} \phi_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{s} (\phi_1 - \phi_2)$$

$$q_2 = -\frac{\varepsilon_0 A}{s} \phi_1 + \frac{\varepsilon_0 A}{s} \phi_2 = \frac{\varepsilon_0 A}{s} (\phi_2 - \phi_1) = -\frac{\varepsilon_0 A}{s} (\phi_1 - \phi_2)$$

$$q_1 = -q_2$$

- Se assumiamo $\phi_2 > \phi_1$ allora

$$q_2 = Q > 0 \quad q_1 = -Q < 0 \quad V = \phi_2 - \phi_1 \quad C = \frac{\varepsilon_0 A}{s}$$

$$Q = CV$$

Dielettrici

- Consideriamo un condensatore piano nel vuoto
 - Abbiamo definito la capacità come il rapporto fra la carica sulle armature e la differenza di potenziale fra le stesse

$$C = \frac{Q}{V}$$

- Supponiamo adesso di inserire un materiale isolante: un dielettrico

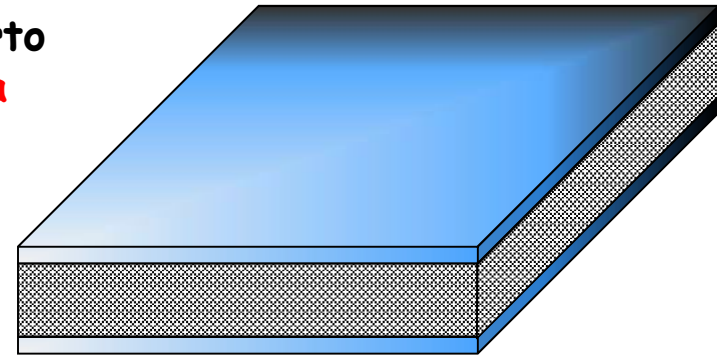
- Si scopre che la carica Q' necessaria per raggiungere la stessa differenza di potenziale aumenta

$$Q' = \kappa Q \quad \kappa > 1$$

- La capacità è

$$C' = \frac{Q'}{V} = \frac{\kappa Q}{V} = \kappa C$$

- L'effetto del dielettrico è stato di aumentare la capacità

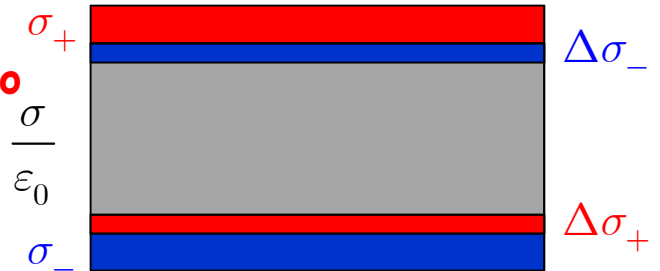


Dielectric constants of various substances

Substance	Conditions	Dielectric constant (κ)
Air	gas, 0 °C, 1 atm	1.00059
Methane, CH ₄	gas, 0 °C, 1 atm	1.00088
Hydrogen chloride, HCl	gas, 0 °C, 1 atm	1.0046
Water, H ₂ O	gas, 110 °C, 1 atm	1.0126
	liquid, 20 °C	80.4
Benzene, C ₆ H ₆	liquid, 20 °C	2.28
Methanol, CH ₃ OH	liquid, 20 °C	33.6
Ammonia, NH ₃	liquid, -34 °C	22.6
Mineral oil	liquid, 20 °C	2.24
Sodium chloride, NaCl	solid, 20 °C	6.12
Sulfur, S	solid, 20 °C	4.0
Silicon, Si	solid, 20 °C	11.7
Polyethylene	solid, 20 °C	2.25–2.3
Porcelain	solid, 20 °C	6.0–8.0
Paraffin wax	solid, 20 °C	2.1–2.5
Pyrex glass 7070	solid, 20 °C	4.00

Dielettrici

- Il fenomeno ha una spiegazione qualitativa semplice
 - Se il condensatore viene caricato senza dielettrico
 - Le densità di carica σ_+ e σ_- sulle armature generano un campo elettrico nel condensatore
- Inseriamo il materiale dielettrico
 - Il materiale è composto da cariche elettriche
 - Cariche positive: i nuclei
 - Cariche negative: gli elettroni
 - Le cariche non si possono muovere, a differenza di quanto avviene per i conduttori
 - Complessivamente il materiale rimane neutro
 - Tuttavia, piccoli movimenti sono possibili
 - La carica positiva è attratta verso l'armatura inferiore: $\Delta\sigma_+$
 - La carica negativa è attratta verso l'armatura superiore: $\Delta\sigma_-$
 - Questa carica compensa parte della carica sulle armature
 - Il campo elettrico diminuisce
 - La differenza di potenziale si calcola con un integrale di linea del campo
 - Dato che il campo elettrico si abbassa, anche il potenziale diminuisce
 - Per raggiungere il potenziale precedente ci vuole più carica sulle armature



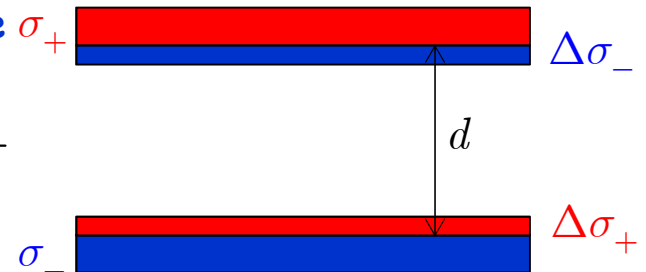
Dielettrici

- Infatti il modulo del campo elettrico fra le armature era, prima dell'inserimento del dielettrico

- La differenza di potenziale

$$V = E \cdot d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



- L'introduzione del dielettrico fa comparire altra carica elettrica: $\Delta\sigma$

- Il campo elettrico si riduce
- La differenza di potenziale è inferiore

$$E' = \frac{\sigma - \Delta\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$V' = \frac{\sigma - \Delta\sigma}{\varepsilon_0} d$$

- Per raggiungere la stessa differenza di potenziale che si aveva prima dell'introduzione del dielettrico occorre che la carica elettrica sulle armature sia più grande di quella precedente

- La carica in più neutralizza quella del dielettrico
- La differenza di potenziale diventa uguale a quella che si aveva prima dell'introduzione del dielettrico
- La capacità è aumentata

$$\sigma \rightarrow \sigma' = \sigma + \Delta\sigma$$

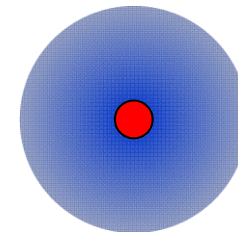
$$Q' = Q + \Delta Q$$

$$C' = \frac{Q'}{V} = \frac{\kappa Q}{V} = \kappa C$$

- Il fatto che sperimentalmente si noti che $Q' = \kappa Q$ significa che la quantità di carica del dielettrico è proporzionale al campo elettrico esterno

Dielettrici

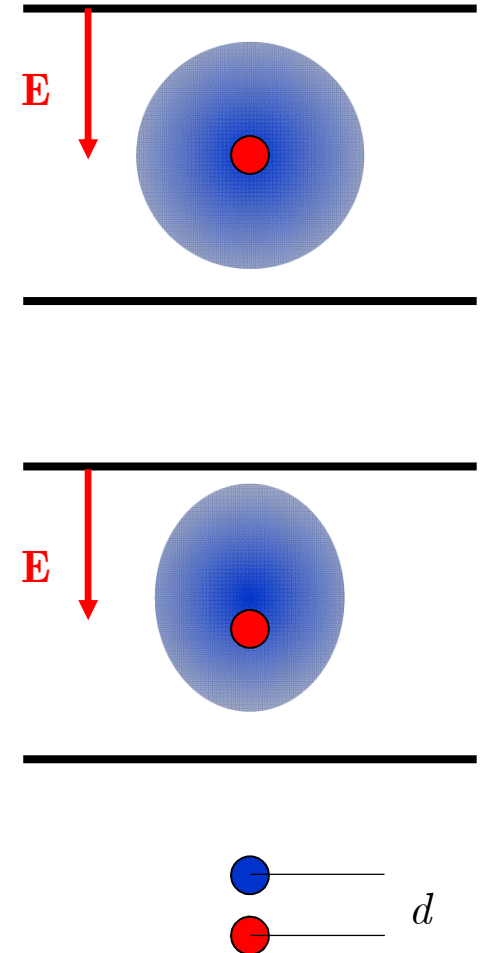
- Per avere una comprensione più profonda del fenomeno ci serve un modello più accurato della struttura atomica della materia
- La teoria del campo elettrico nei dielettrici è stata sviluppata nel XIX secolo
 - In assenza di una conoscenza adeguata della struttura della materia la formulazione del problema è fatta utilizzando quantità macroscopiche
 - La descrizione è adeguata per risolvere i problemi
 - Tuttavia vogliamo avere anche una comprensione a livello microscopico
- Preliminarmente dobbiamo formulare un modo efficiente per descrivere il campo elettrico di un atomo (e di una molecola)
 - Abbiamo spesso rappresentato un atomo come
 - Un nucleo positivo puntiforme di carica $+q$
 - Una distribuzione di carica negativa a simmetria sferica di valore totale $-q$
- All'esterno dell'atomo calcoliamo il campo elettrico usando la proprietà che abbiamo verificato più volte
 - Il campo della distribuzione sferica negativa è uguale a quello di una carica puntiforme $-q$ posta al centro della distribuzione sferica
 - Il campo totale è nullo



Dielettrici

- Abbiamo visto che in presenza di un campo elettrico esterno la distribuzione delle cariche del materiale si modifica
 - Sono comparse delle densità superficiali di carica
- Possiamo supporre che la presenza del campo elettrico esterno sposti in modo indipendente le due cariche
 - Può anche succedere che la forma della distribuzione della carica negativa risulti deformata
- A grandi distanze dall'atomo possiamo sempre calcolare il campo elettrico come se tutta la carica negativa fosse concentrata in un punto al centro della distribuzione
 - Vale la pena sottolineare che la distanza d fra le due cariche è dell'ordine delle dimensioni dell'atomo
 - Dell'ordine di $1\text{\AA}$ (angstrom $1\text{\AA} = 10^{-10}\text{ m}$)
 - Non siamo interessati ai valori del campo in posizioni vicine all'atomo ma a distanze r molto grandi

$$r \gg d$$



Approssimazioni importanti

- Sviluppo in serie di Taylor

$$f(x - x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x_0} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(x_0) (x - x_0)^n$$

- Sviluppo di $f(x) = \frac{1}{1+x}$ intorno a $x_0 = 0$

$$f(0) = 1 \quad f^1(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \rightarrow -1 \quad f^2(x) = 2\frac{1}{(1+x)^3} \rightarrow 2$$

$$f^3(x) = -2 \cdot 3 \frac{1}{(1+x)^4} \rightarrow -2 \cdot 3 \quad f^n(x) = (-)^n n! \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \rightarrow (-)^n n!$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 \dots \quad |x| < 1$$

- Pertanto, per $0 \leq x < 1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots$$

Approssimazioni importanti

- Altre serie importanti da ricordare, almeno al primo ordine

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \prod_{k=1}^n \frac{\alpha-k+1}{k}$$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} (-4)^n (1-4^n)}{(2n)!} x^{2n-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

Numeri di Bernoulli

$$B_2 = \frac{1}{6} \quad B_4 = -\frac{1}{30} \quad B_6 = \frac{1}{42} \quad \dots$$

$$\tanh x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n} 4^n (4^n - 1)}{(2n)!} x^{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$