
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 11 - 4.11.2022

Campo di un anello di carica
Capacità, condensatori
Energia del condensatore
Forza fra le armature del condensatore

Anno Accademico 2022/2023

Cariche immagine e energia

- Un ultimo problema per chiarire un altro punto importante
 - Quanto lavoro è necessario per portare una carica q dall'infinito a distanza h da un piano conduttore?
 - Per rispondere uno studente (o un professore ...) ragiona in questo modo:
 - Abbiamo visto che la forza è quella che si esercita fra la carica e la sua immagine

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2h)^2}$$

- Analogamente il lavoro calcolato, cambiato di segno, è uguale all'energia elettrostatica immagazzinata nel sistema carica + carica immagine

$$U = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2h)}$$

- Un altro studente (o professore ...) preferisce un calcolo meno elegante, più di "forza bruta"
 - Calcola il lavoro fatto contro la forza elettrostatica
 - Ad una altezza z avremo

$$dW = Fdz = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2z)^2} dz$$

Cariche immagine

- Il lavoro totale si trova integrando

$$W = \frac{q^2}{4 \cdot 4\pi\epsilon_0} \int_h^\infty \frac{1}{z^2} dz = \frac{q^2}{4 \cdot 4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{z} \right]_h^\infty = \frac{q^2}{4 \cdot 4\pi\epsilon_0} \frac{1}{h} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2h}$$

- Il valore trovato è la metà di quello trovato con il primo calcolo
- Chi ha ragione e perché?

- Il risultato corretto è il secondo

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2h}$$

- Nel primo caso infatti manca il vincolo su come costruire il sistema
 - Occorre spostare le due cariche in modo simmetrico rispetto al piano altrimenti il campo elettrico non è più perpendicolare al piano
 - Se spostiamo entrambe le cariche il lavoro da considerare è solo metà: quello fatto per spostare solo una delle due cariche
 - Alternativamente si può ricordare che $U = \int_V \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV$
 - La formula $U = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2h)}$ Presuppone un integrale su tutto lo spazio
 - Nella nostra soluzione il campo è definito solo in metà dello spazio

Campo generato da un anello di carica

- Consideriamo nuovamente l'anello di carica Q e di raggio R

- L'anello è rappresentabile con una distribuzione lineare di carica di densità $\lambda = Q/(2\pi R)$

- Vogliamo calcolare il potenziale e il campo elettrico in un generico punto $\mathbf{r}$, non necessariamente sull'asse

- Consideriamo un elemento di carica sull'anello

- La lunghezza dell'elemento è $dl = R d\phi'$
- La carica dell'elemento è $dQ = \lambda dl$

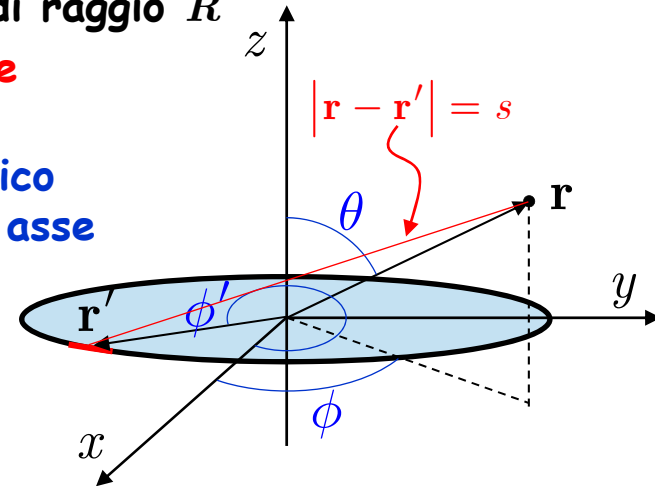
- Chiamiamo il potenziale $V(\mathbf{r})$ per evitare confusione con l'angolo azimutale ϕ

- Il contributo al potenziale dell'elemento di anello dl è

$$dV(\mathbf{r}) = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{s} = \frac{\lambda R d\phi'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\lambda R d\phi'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r}^2 + \mathbf{r}'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}}$$

$$dV(\mathbf{r}) = \frac{\lambda R d\phi'}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2r \sin \theta R \cos(\phi' - \phi)}}$$

- Nell'ultima espressione abbiamo sviluppato il prodotto scalare fra $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ tenendo conto che $\mathbf{r}'$ giace nel piano $x - y$ ($r'_z = 0$)



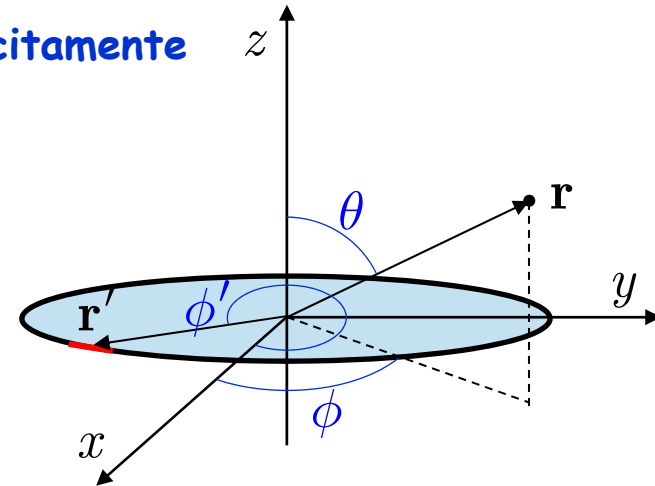
Campo generato da un anello di carica

- Verifichiamo calcolando il prodotto scalare esplicitamente

$$\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}' = R \begin{pmatrix} \cos \phi' \\ \sin \phi' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = rR \sin \theta (\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi')$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = rR \sin \theta \cos(\phi' - \phi)$$



- Il potenziale generato da tutto l'anello è

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2r \sin \theta R \cos(\phi' - \phi)}}$$

- È evidente che l'integrale non dipende da ϕ (simmetria azimutale)
- Possiamo porre $\phi = 0$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2r \sin \theta R \cos \phi'}}$$

- È un integrale che non conduce a espressioni contenenti funzioni elementari
 - Richiede l'introduzione degli integrali ellittici

Campo generato da un anello di carica

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2r \sin \theta R \cos \phi}}$$

- Trasformiamo l'integrale in una forma opportuna rispetto alle definizioni standard degli integrali ellittici

- Prima di tutto operiamo un cambio di variabile: $\phi = \pi + 2t$

- I limiti di integrazione diventano

- $\phi = 0 \rightarrow t = -\pi/2$ $\phi = 2\pi \rightarrow t = +\pi/2$. Inoltre $d\phi = 2dt$

- La funzione trigonometrica: $\cos \phi = \cos(\pi + 2t) = -\cos 2t = -1 + 2\sin^2 t$

- Chiamiamo A il radicando

$$A = r^2 + R^2 - 2r \sin \theta R \cos \phi = \boxed{r^2 + R^2 + 2r \sin \theta R} - 4r \sin \theta R \sin^2 t$$

- Definiamo

$$\xi^2 = r^2 + R^2 + 2r \sin \theta R \quad k^2 = \frac{4Rr \sin \theta}{r^2 + R^2 + 2r \sin \theta R}$$

- Otteniamo

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\lambda R}{4\pi\epsilon_0 \xi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{2dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = \frac{\lambda R}{\pi\epsilon_0 \xi} \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

- Osserviamo che per $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq r < \infty$ abbiamo $0 \leq k \leq 1$

Campo generato da un anello di carica

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\lambda R}{\pi \epsilon_0 \xi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

$$\xi^2 = r^2 + R^2 + 2r \sin \theta R$$

$$k^2 = \frac{4Rr \sin \theta}{r^2 + R^2 + 2r \sin \theta R}$$

- Si definisce integrale ellittico completo di primo tipo

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

- Per la definizione e le proprietà degli integrali ellittici si veda

- NIST – Digital Library of Mathematical Functions – capitolo 19

<https://dlmf.nist.gov/>

- Introduciamo la variabile ridotta ρ

$$\rho = \frac{r}{R}$$

- In funzione di ρ il parametro k è

$$k^2 = \frac{4\rho \sin \theta}{1 + \rho^2 + 2\rho \sin \theta}$$

- Infine

$$\frac{\xi^2}{R^2} = 1 + \rho^2 + 2\rho \sin \theta$$

Integrali ellittici

- Per il calcolo del campo elettrico è necessaria la derivata della funzione $K(k)$
 - Vedi NIST DLMF 19.4

$$\frac{dK(k)}{dk} = \frac{E(k) - (1 - k^2)K(k)}{k(1 - k^2)}$$

- La funzione $E(k)$ è l'integrale ellittico completo di secondo tipo

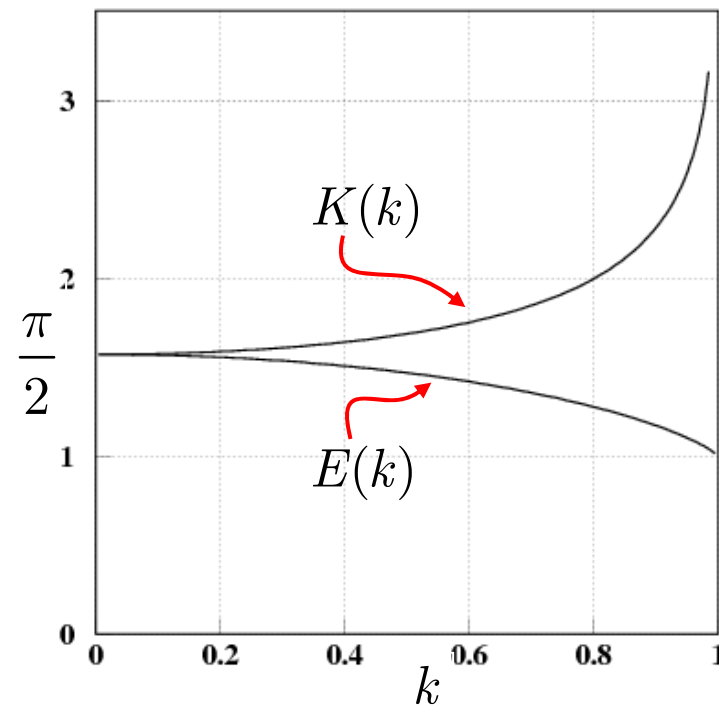
$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$$

- Notiamo infine che

$$K(0) = E(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$E(1) = 1$$

$$\lim_{k \rightarrow 1} K(k) = \infty$$



Campo generato da un anello di carica

- Calcoliamo il valore del potenziale al centro dell'anello

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\lambda R}{\pi \varepsilon_0 \xi} K(k)$$

- Al centro dell'anello

$$\rho = 0 \quad k = 0 \quad \frac{\xi}{R} = 1$$

- Abbiamo pertanto

$$V(0) = \frac{\lambda R}{\pi \varepsilon_0 \xi} K(0) = \frac{\lambda}{\pi \varepsilon_0} \frac{\pi}{2} = \frac{\lambda}{2 \varepsilon_0}$$

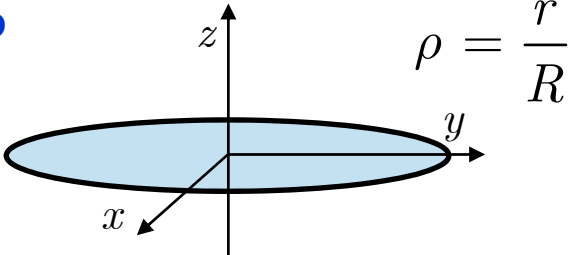
- A grandi distanze dal centro dell'anello

$$\rho \rightarrow \infty \quad k \rightarrow 0 \quad \frac{\xi^2}{R^2} \rightarrow \rho^2 \quad \frac{\xi}{R} \rightarrow \frac{r}{R} \quad \xi \rightarrow r$$

- Abbiamo pertanto

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{\lambda R}{\pi \varepsilon_0 r} K(0) = \frac{\lambda R}{\pi \varepsilon_0 r} \frac{\pi}{2} = \frac{\lambda R}{\pi \varepsilon_0 r} \frac{2\pi}{2 \cdot 2} = \frac{2\pi R \lambda}{4\pi \varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r}$$

- A grandi distanze è il potenziale della carica dell'anello posta nell'origine



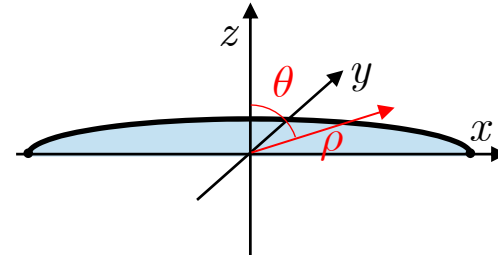
$$\rho = \frac{r}{R}$$

$$k^2 = \frac{4\rho \sin \theta}{1 + \rho^2 + 2\rho \sin \theta}$$

$$\frac{\xi^2}{R^2} = 1 + \rho^2 + 2\rho \sin \theta$$

Campo generato da un anello di carica

- Visualizziamo il potenziale con alcuni grafici
 - Consideriamo il potenziale nel piano $y = 0$
 - Una sezione $x-z$
 - Normalizziamo il potenziale al suo valore nel centro dell'anello



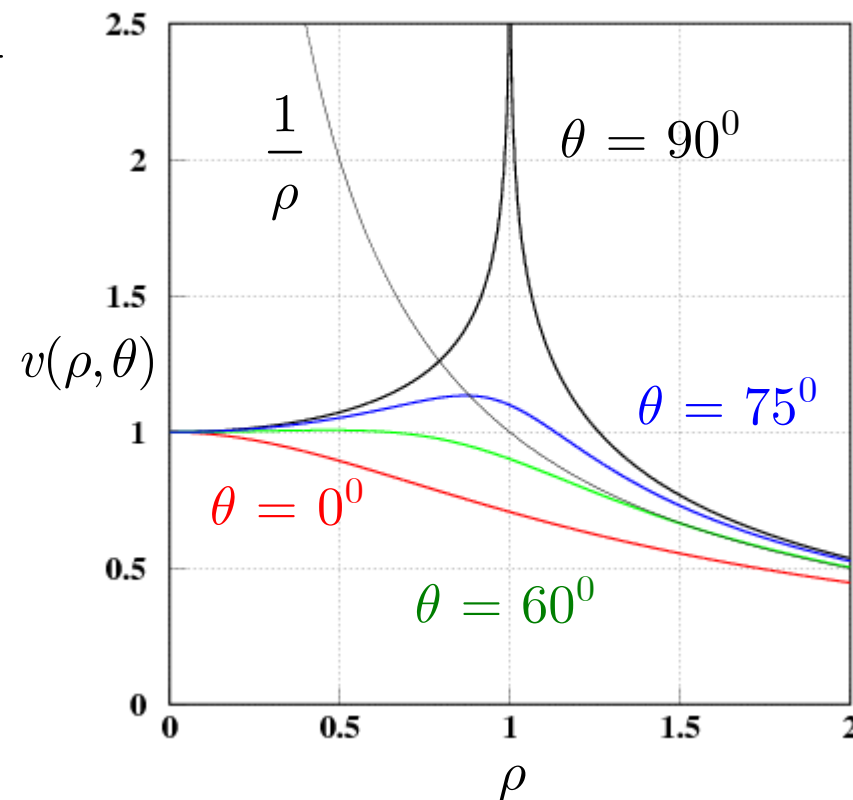
$$V(\mathbf{r}) = \frac{\lambda R}{\pi \epsilon_0 \xi} K(k) \quad V(0) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0}$$

$$v(\mathbf{r}) = \frac{V(\mathbf{r})}{V(0)} = \frac{2}{\pi} \frac{R}{\xi} K(k)$$

$$\rho = \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{x^2 + z^2}}{R}$$

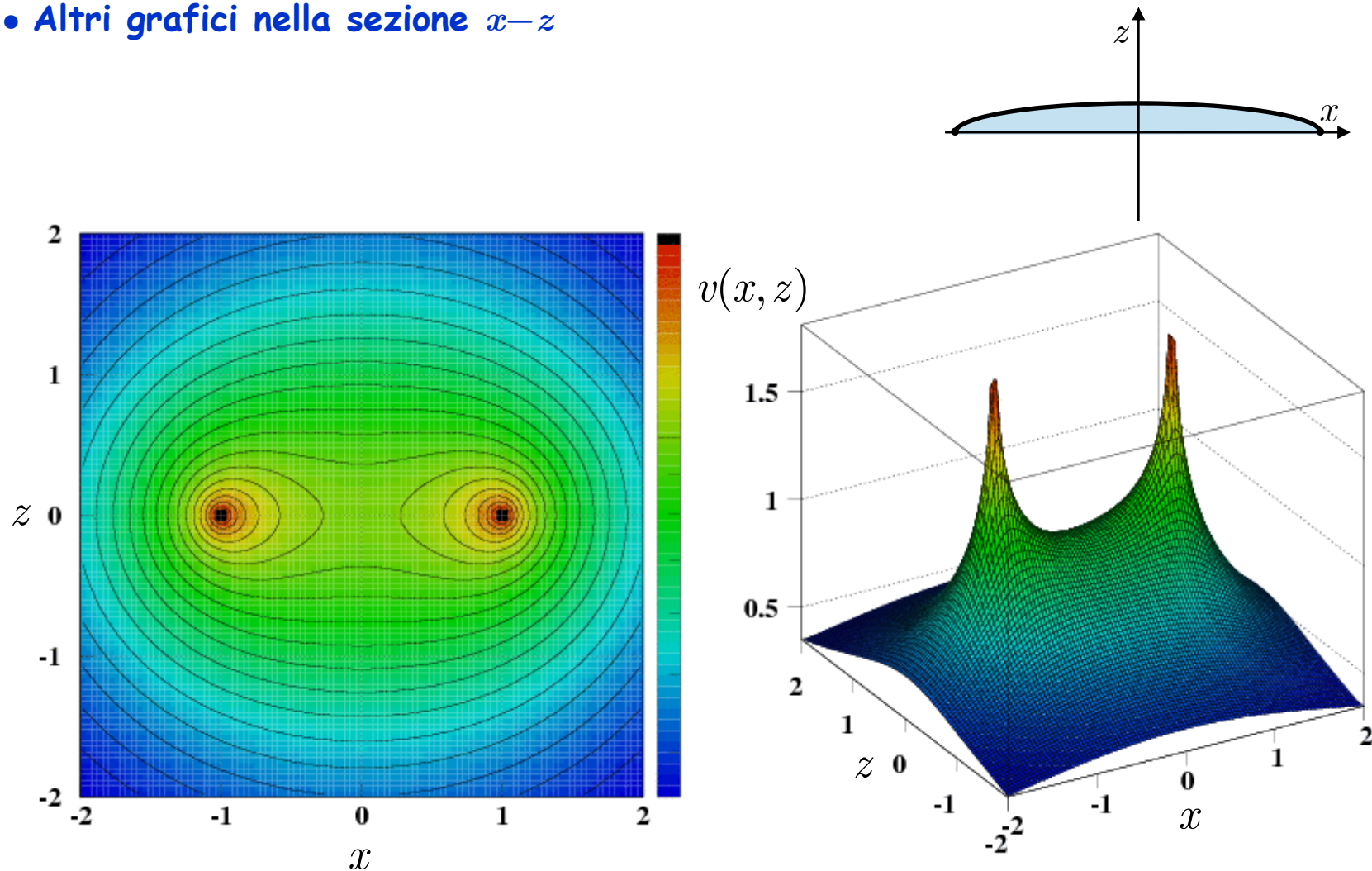
$$k^2 = \frac{4\rho \sin \theta}{1 + \rho^2 + 2\rho \sin \theta}$$

$$\frac{\xi^2}{R^2} = 1 + \rho^2 + 2\rho \sin \theta$$



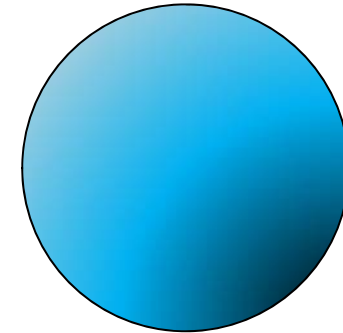
Campo generato da un anello di carica

- Altri grafici nella sezione $x-z$



Capacità di un conduttore

- Consideriamo un conduttore isolato
 - Ad esempio una sfera
- Supponiamo che sul conduttore sia depositata una certa quantità di carica q



- La carica si distribuisce sulla superficie del conduttore con una densità superficiale σ
 - Abbiamo utilizzato una sfera solo per convenienza
 - Non è detto che la densità sia uniforme

- Ovviamente avremo (S è la superficie del conduttore)

$$q = \oint_S \sigma(x', y', z') da' \quad \phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma(x', y', z')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' \quad \begin{matrix} \mathbf{r}' = (x', y', z') \\ \mathbf{r} = (x, y, z) \end{matrix}$$

- Se il punto $\mathbf{r}$ si muove sulla superficie del conduttore il potenziale assumerà sempre lo stesso valore $V = \phi(\mathbf{r})$

- La superficie del conduttore è equipotenziale

- Supponiamo adesso di variare la densità di carica sul conduttore $\sigma \rightarrow k \sigma$

- Anche la quantità di carica sarà moltiplicata per k : $q \rightarrow k q$

- Anche il potenziale sul conduttore sarà moltiplicato per k : $V \rightarrow k V$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{k\sigma(x', y', z')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' = \frac{k}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma(x', y', z')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' = k\phi(x, y, z)$$

Capacità di un conduttore

- Ne consegue che il rapporto fra la carica sul conduttore e il potenziale della superficie è indipendente dal valore della carica
- Questo rapporto dipende dalla geometria del conduttore e prende il nome di capacità del conduttore

$$C = \frac{q}{V}$$

- Dipende anche dal mezzo che circonda il conduttore
- Per adesso supponiamo che sia il vuoto
- L'unità di misura della capacità (Coulomb/Volt) è il Farad
- Vedremo che un Farad è una capacità enorme e quindi normalmente si usano dei sottomultipli
 - milliFarad 10^{-3} F mF
 - microFarad 10^{-6} F μ F
 - nanoFarad 10^{-9} F nF
 - picoFarad 10^{-12} F pF
 - femtoFarad 10^{-15} F fF
- Calcoliamo la capacità di una sfera di raggio R
 - Mettiamo una carica q sulla superficie della sfera e calcoliamo il potenziale sulla sua superficie

Capacità di un conduttore

- Sappiamo che il potenziale sul conduttore è uguale a quello di una carica q posta al centro della sfera
- Pertanto il potenziale sulla superficie sarà

$$V = \phi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$$

- E la capacità

$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}} = 4\pi\epsilon_0 R$$

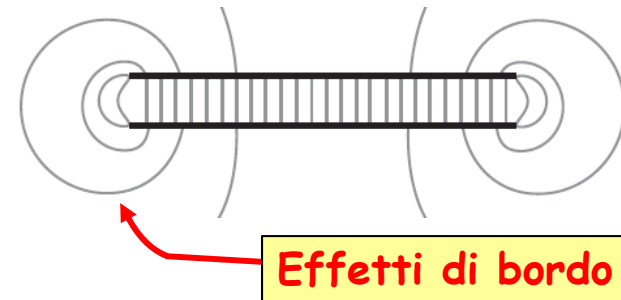
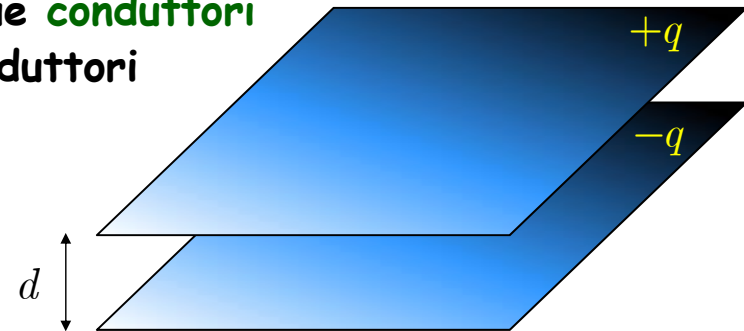
$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$$

- Come preannunciato dipende solo dalla geometria ($4\pi R$)
- Notiamo che il prodotto $\epsilon_0 R$ ha le dimensioni del Farad
- È abitudine (ed è anche comodo) utilizzare per le unità di ϵ_0 il F/m (Farad per metro)
- Qualche esempio numerico
 - $R = 0.1 \text{ m} \rightarrow C = 1.11 \times 10^{-11} \text{ F} = 11 \text{ pF}$
 - $R = 6700 \text{ Km} \rightarrow C = 0.74 \times 10^{-3} \text{ F} = 0.74 \text{ mF}$ (raggio della terra)
 - $R = 9 \times 10^6 \text{ Km} \rightarrow C = 1 \text{ F}$ (il sole dista $150 \times 10^6 \text{ Km}$, la luna $0.4 \times 10^6 \text{ Km}$)

$$\epsilon_0 = 8.854 \text{ pF/m}$$

Condensatore

- Il concetto di capacità è utile e importante anche per sistemi di più conduttori
 - Uno dei sistemi a più conduttori più diffusi e utilizzati è quello costituito da due conduttori: il condensatore
 - Studieremo in seguito i sistemi a più di due conduttori
- Consideriamo un sistema composto da due conduttori piani di area A posti a distanza ravvicinata
 - I due conduttori prendono il nome di elettrodi o armature
 - Supponiamo di depositare una carica $+q$ sull'elettrodo superiore e una carica $-q$ sull'elettrodo inferiore
- Se la distanza d fra gli elettrodi è molto piccola le cariche si distribuiscono uniformemente sulle superfici interne degli elettrodi
 - In queste condizioni possiamo approssimare il campo fra gli elettrodi come il campo fra due distribuzioni superficiali di carica uniforme e infinite
 - Una soluzione esatta del problema mostrerebbe una configurazione del campo elettrico come indicata in figura



Condensatore

- Trascuriamo gli effetti di bordo: il campo elettrico fra due piani di carica è uniforme e perpendicolare agli elettrodi (è nullo fuori)

- Il suo modulo è

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \sigma = \frac{q}{A}$$



Tutte le linee di campo che partono da un piano finiscono sull'altro.
Induzione completa

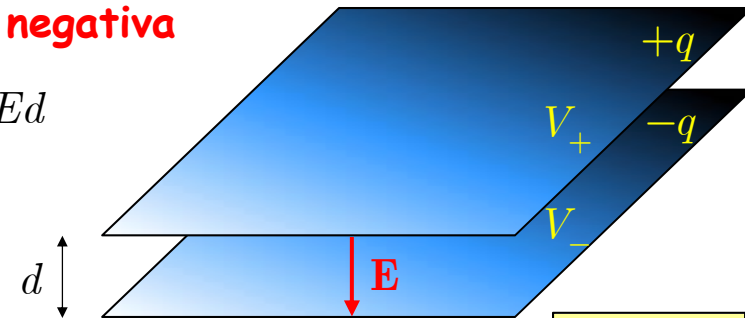
- La densità di carica è
- A questo punto è immediato calcolare la differenza di potenziale fra gli elettrodi
- V_+ il potenziale dell'elettrodo con la carica positiva
- V_- il potenziale dell'elettrodo con la carica negativa

$$V = V_+ - V_- = - \int_0^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -(-Ed) = Ed$$

- Introducendo i valori di E e di σ

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{q}{A\varepsilon_0} d$$

- Analogamente a quanto fatto per il conduttore singolo definiamo capacità del condensatore il rapporto fra la carica e il potenziale
- Notiamo che ancora una volta dipende solo dalla geometria



$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

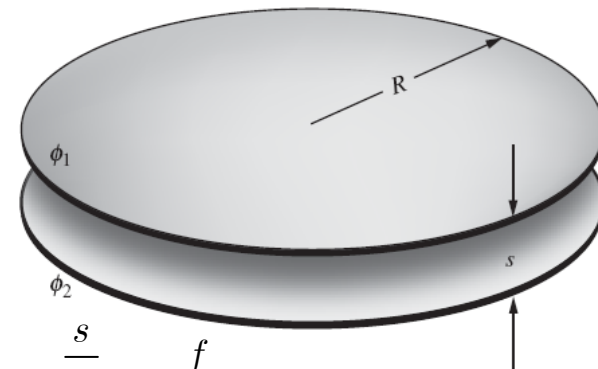
$$C = \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{q}{A\varepsilon_0} d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Condensatore

- Ci aspettiamo che il calcolo fatto sia tanto più accurato quanto più vicini sono i due piani
 - Nel caso in cui l'approssimazione non sia buona allora occorre calcolare esattamente la differenza di potenziale in funzione della carica
 - Troveremmo qualcosa di "leggermente" differente dalla formula trovata
- Sul libro di Purcell è riportato il risultato di un calcolo della capacità di un condensatore con armature circolari
 - La capacità calcolata esattamente viene confrontata con la formula approssimata

$$C = \frac{\varepsilon_0 \pi R^2}{s}$$

- La tabella mostra il rapporto f fra la capacità esatta e quella approssimata in funzione di s/R
- Ribadiamo che due conduttori formano comunque un condensatore
 - Mantenere sotto controllo la geometria permette di costruire dispositivi utilizzati in circuiti elettronici
- Se la capacità è indesiderata si parla di effetto parassita



$\frac{s}{R}$	f
0.2	1.286
0.1	1.167
0.05	1.094
0.02	1.042
0.01	1.023

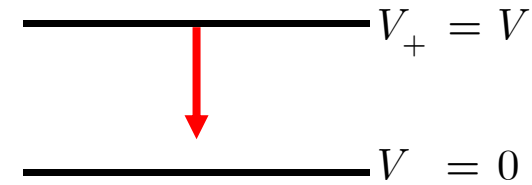
$$f = \frac{C_{\text{esatta}}}{C_{\text{appr.}}}$$

Energia immagazzinata nel condensatore

- I condensatori sono dispositivi utili perché possono immagazzinare (e conservare) **energia**

- Consideriamo un condensatore di capacità C

- Consideriamo per semplicità l'elettrodo inferiore a potenziale nullo e quello superiore a potenziale V



- La carica sulle armature è (per definizione)

$$Q = C(V_+ - V_-) = CV$$

- Supponiamo adesso di volere aumentare la carica sull'armatura superiore da q a $q + dq$ trasportandola dall'elettrodo inferiore che passa da $-q$ a $-q - dq$

- Naturalmente è necessaria una forza non elettrostatica

- Questa forza compie lavoro contro il campo elettrico per spostare una carica positiva dall'elettrodo inferiore a quello superiore

- Il lavoro fatto per trasportare dq è dato semplicemente da

$$dW = Vdq \quad q = CV \quad \longrightarrow \quad V = \frac{q}{C} \quad dW = \frac{q}{C} dq$$

- Il lavoro totale per "caricare" un condensatore da 0 a Q è pertanto

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Energia immagazzinata nel condensatore

- Il lavoro W è naturalmente uguale all'energia immagazzinata $U = W$
- Possiamo inoltre esprimere il risultato ottenuto in funzione della differenza di potenziale fra le armature de condensatore

- Abbiamo infatti

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad Q = CV \quad \longrightarrow \quad U = \frac{1}{2} \frac{(CV)^2}{C} \quad \boxed{U = \frac{1}{2} CV^2}$$

- L'energia trovata è naturalmente l'energia elettrostatica delle cariche sulle armature del condensatore

- Tuttavia può essere interpretata come l'energia immagazzinata nel campo elettrostatico presente fra le armature del condensatore

- In un condensatore piano, assumendo che possano essere trascurati gli effetti di bordo, il campo elettrico è uniforme

- Il suo modulo è

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{La densità di energia} \quad \rho_E = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}$$

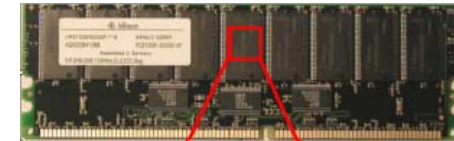
- Moltiplicando per il volume Ad del condensatore

$$U = \rho_E Ad = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} Ad = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\varepsilon_0} \frac{A^2}{A} d = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_0 A} \frac{1}{A} d = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

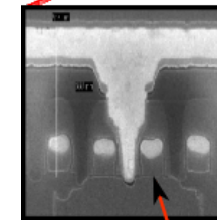
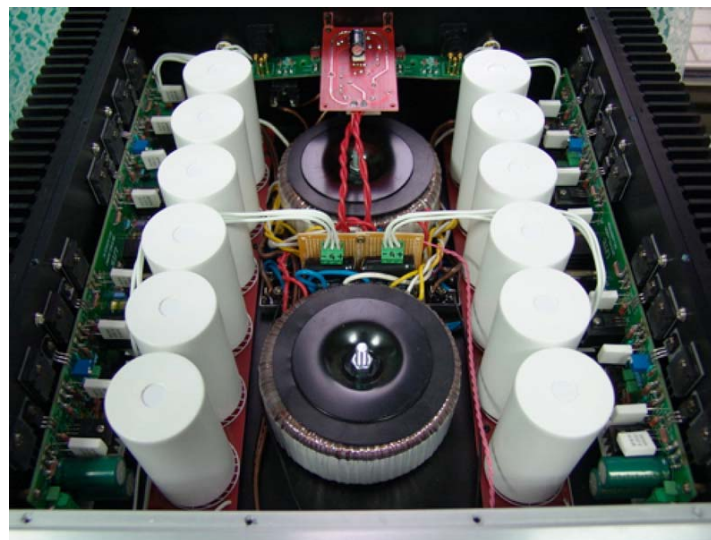
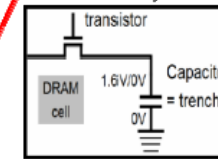
Esempi di condensatori



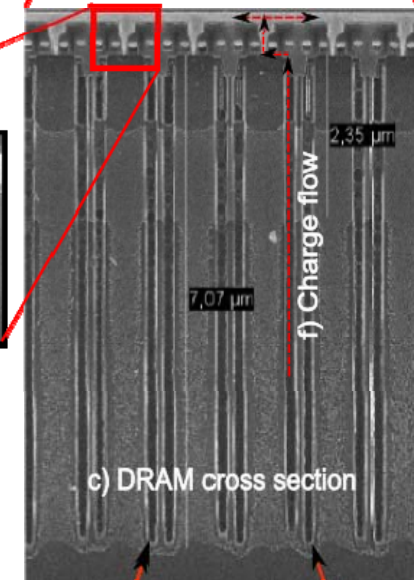
a) DRAM DIMM



b) DRAM elementary cell



d) Tranzistor

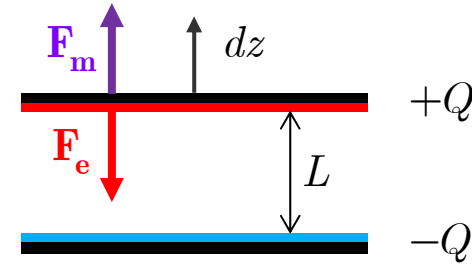


c) DRAM cross section

e) Trench = Capacitor

Forza fra le armature

- Consideriamo un condensatore carico sulle cui armature è presente una carica $\pm Q$
 - Le armature pertanto si attraggono
 - Naturalmente è presente una forza non elettrica che mantiene fissa la distanza L fra le armature
- Calcoliamo la forza con cui si attraggono
 - Iniziamo facendo il calcolo considerando il condensatore carico ma isolato da un eventuale generatore
 - La carica sulle armature è costante
- Supponiamo di innalzare di un tratto dz l'armatura superiore
 - Per farlo applichiamo una forza meccanica F_m che bilancia esattamente la forza elettrica F_e
 - Il lavoro fatto dalla forza meccanica è $dW = \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{r} = F_m dz = -F_e dz$
- Se la distanza fra le armature aumenta l'energia immagazzinata aumenta



$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad \Rightarrow \quad dU = \frac{1}{2} Q^2 d \frac{1}{C}$$

- Infatti la capacità diminuisce

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C} = \frac{L}{\epsilon_0 A} \quad \Rightarrow \quad d \frac{1}{C} = \frac{dz}{\epsilon_0 A} = \frac{L}{\epsilon_0 A} \frac{dz}{L} = \frac{1}{C} \frac{dz}{L}$$

$$dU = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \frac{dz}{L}$$

Forza fra le armature

$$dW = -F_e dz \quad dU = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \frac{dz}{L}$$

- Naturalmente l'aumento di energia è uguale al lavoro fatto dalla forza meccanica

- Uguagliando

$$-F_e dz = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \frac{dz}{L}$$

$$F_e = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \frac{1}{L}$$

diretta verso il basso
le armature si attraggono

- Calcoliamo adesso la forza nel caso in cui la differenza di potenziale fra le armature sia costante

- Un approccio superficiale porterebbe a un risultato errato

- Utilizzando l'approccio precedente l'energia del condensatore sarebbe

$$U = \frac{1}{2} C V^2 \quad \Rightarrow \quad dU = \frac{1}{2} V^2 dC \quad C = \frac{\varepsilon_0 A}{L} \quad \Rightarrow \quad dC = -\frac{\varepsilon_0 A}{L} \frac{dz}{L} = -C \frac{dz}{L}$$

- Uguagliando

$$-F_e dz = -\frac{1}{2} V^2 C \frac{dz}{L} \quad F_e = \frac{1}{2} V^2 C \frac{1}{L} = \frac{1}{2} V^2 C^2 \frac{1}{C} \frac{1}{L} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \frac{1}{L}$$

- Ha il segno opposto !! SBAGLIATO

Forza fra le armature

- Naturalmente non è possibile che scollegando (o collegando) il condensatore a un generatore la forza cambi segno
- L'errore sta nel non aver considerato tutto il lavoro fatto per allontanare l'armatura di dz
- Infatti se vogliamo mantenere costante la tensione dobbiamo far variare la carica sulle armature
 - Se la capacità cambia di dC (positivo o negativo) la carica sulle armature deve cambiare di conseguenza: $dQ = VdC$
 - Per trasportare una carica dQ sulle armature il generatore G compie un lavoro

$$dW_G = VdQ = V^2dC$$

- Il bilancio energetico corretto è pertanto

$$dW_m + dW_G = dU \quad \Rightarrow \quad -F_e dz + V^2dC = \frac{1}{2}V^2dC$$

$$-F_e dz = -\frac{1}{2}V^2dC$$

- Ricordiamo che

$$dC = -C \frac{dz}{L} \quad \Rightarrow \quad -F_e dz = \frac{1}{2}CV^2 \frac{dz}{L} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \frac{dz}{L}$$

$$F_e = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \frac{1}{L}$$

- In accordo con il primo calcolo