
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 10 - 28.11.2022

Equazione di Poisson e funzione $\delta(x)$

Soluzione dell'equazione di Poisson

Metodo delle cariche immagine

Cariche immagine: forza e energia

Anno Accademico 2022/2023

Equazione di Poisson

- Tramite la legge di Gauss abbiamo formulato una relazione fra il campo elettrico e le sue sorgenti

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Inoltre sappiamo che il campo elettrostatico è conservativo

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi$$

- Sappiamo già che combinando le due equazioni otteniamo l'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Il problema generale dell'elettrostatica è
 - Determinare tramite l'equazione di Poisson il potenziale (e il campo elettrico) una volta definite le cariche elettriche (la densità ρ) e le condizioni al contorno
- D'altro canto, data la densità ρ il potenziale ϕ_p è

$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

- Riflettiamo sulla differenza fra le due formulazioni

Equazione di Poisson

- La funzione $\phi_p(\mathbf{r})$ soddisfa l'equazione di Poisson
 - Lo vedremo fra breve
 - Sarà conveniente introdurre la funzione delta di Dirac
- In generale, questa soluzione non soddisfa particolari condizioni al contorno
 - Non risolve il problema se oltre alla densità ρ sono presenti conduttori a potenziali fissati
- Da un punto di vista matematico
$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{equazione non omogenea}$$
$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{equazione omogenea}$$
 - Naturalmente se ϕ_p è soluzione dell'equazione di Poisson e ϕ_1 dell'equazione di Laplace la somma $\phi_p + \phi_1$ è ancora soluzione dell'equazione di Poisson
- Il problema è
 - Sia dato un dominio $\mathcal{D}$ delimitato da superfici $\mathcal{S}_n$
 - All'interno di $\mathcal{D}$ sia definita la densità di carica $\rho(\mathbf{r})$
 - Siano definiti i valori del potenziale sulle superfici $\mathcal{S}_n$
- La soluzione del problema è la somma di una soluzione dell'equazione di Laplace più la soluzione particolare dell'equazione di Poisson $\phi_p(\mathbf{r})$
 - La somma delle due soluzioni deve soddisfare le condizioni al contorno su $\mathcal{S}_n$
- Introduciamo adesso la funzione delta di Dirac

La funzione $\delta(x)$ di Dirac

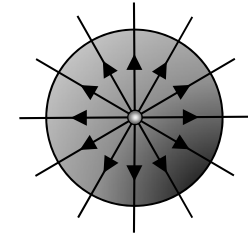
- Consideriamo il campo vettoriale $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

- Riconosciamo la funzione vettoriale che abbiamo utilizzato per il campo elettrico di una carica puntiforme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

- La divergenza di $\mathbf{F}$ ha un comportamento bizzarro vicino l'origine
- Calcoliamo la divergenza

$$\begin{aligned} F_x(\mathbf{r}) &= \frac{x}{r^3} & \frac{\partial F_x}{\partial x} &= \frac{1}{r^3} + x \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{1}{r^3} - x \frac{3}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} &= \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \end{aligned}$$



e analoghe per y e z

- Otteniamo pertanto

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{3}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} - \frac{3y^2}{r^5} - \frac{3z^2}{r^5} = \frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = \frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0$$

- Calcoliamo adesso il flusso di $\mathbf{F}$ su una sfera di raggio R centrata all'origine

$$\oint_{S_{sfera}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{R^2} \cdot \hat{\mathbf{r}} R^2 \sin\theta d\phi = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi \quad \text{non dipende da } R$$

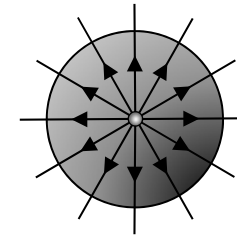
La funzione $\delta(x)$ di Dirac

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

$$\oint_{S_{\text{sfera}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi$$

- Possiamo calcolare l'integrale di superficie utilizzando il teorema della divergenza

$$\oint_{S_{\text{sfera}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_{V_{\text{sfera}}} \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$



- Ma abbiamo appena visto che $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$!!

- Otteniamo

$$\oint_{S_{\text{sfera}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_{V_{\text{sfera}}} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = 0$$

- Per rendere i due risultati compatibili dobbiamo concludere che avere assunto $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ anche per $r = 0$ sia stato sbagliato
- Infatti il risultato corretto è

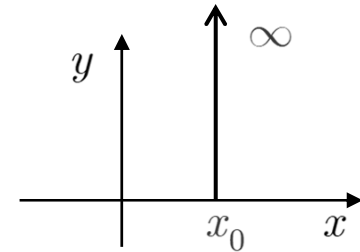
$$\int_{V_{\text{sfera}}} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = 4\pi$$

- Questo comportamento non è quello di una funzione normale
 - Il risultato vale per qualunque sfera centrata sull'origine
 - Anche per raggi piccolissimi tendenti a zero
- Questo è il comportamento di un funzionale o distribuzione

La funzione $\delta(x)$ di Dirac

- Introduciamo adesso la funzione delta di Dirac unidimensionale

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ \infty & x = x_0 \end{cases} \quad \int_a^b \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 0 & x_0 \notin (a, b) \\ 1 & x_0 \in (a, b) \end{cases}$$



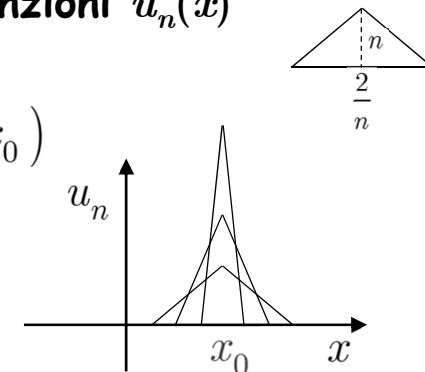
- È definita diversa da zero solo in un punto dove è infinita
 - L'integrale non è corretto (Riemann o Lebesgue). Infatti è un funzionale
- I fisici la trattano come una funzione
- Alla fine dei calcoli compare sempre in un integrale
 - È importante ricordare come si comporta in un integrale

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

- Può essere pensata come il limite di una successione di funzioni $u_n(x)$ di area unitaria: esempio triangoli isosceli

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_n(x - x_0) dx = 1 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) u_n(x - x_0) dx \rightarrow f(x_0)$$

- Il limite di u_n non appartiene allo spazio delle funzioni
- Notiamo infine che se x ha una dimensione (es.: $[x] = L$)
 - $\delta(x)$ ha le dimensioni inverse ($[\delta(x)] = L^{-1}$)
 - È una densità



Proprietà della funzione $\delta(x)$

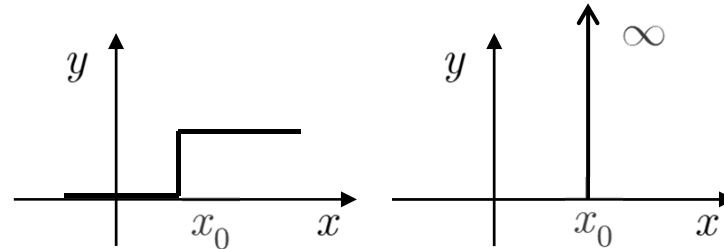
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

$$f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0) \delta(x - x_0)$$

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x) \quad \delta(-x) = \delta(x)$$

$$\delta[f(x)] = \sum_{k=1}^N \frac{\delta(x_k)}{|f'(x_k)|} \quad x_k \text{ sono gli zeri della funzione } f(x) \quad f(x_k) = 0 \quad k = 1, N$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < x_0 \\ 1 & x \geq x_0 \end{cases} \quad \frac{d}{dx} \theta(x) = \delta(x - x_0)$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left[\frac{d}{dx} \delta(x) \right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d}{dx} f(x) \right] \delta(x) dx = f'(0)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dk$$

La funzione $\delta(x)$ di Dirac

- Analogamente si definisce la funzione delta di Dirac tridimensionale

$$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \begin{cases} 0 & \mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0 \\ \infty & \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \end{cases} \quad \int \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV = \int \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dx dy dz = 1$$

- La funzione delta tridimensionale si esprime tramite tre funzioni unidimensionali

$$\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$$

- Notiamo che ha le dimensioni di una densità di volume
- Ritorniamo alla divergenza della nostra funzione vettoriale

$$\int_{V \text{ sfera}} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = 4\pi$$

- La funzione $\nabla \cdot \mathbf{F}$ è sempre nulla escluso per $r = 0$ dove è infinita
- Il suo integrale è diverso da zero
 - Si comporta come una funzione delta

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 4\pi \delta^3(\mathbf{r})$$

- Infine sappiamo che

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = -\nabla \cdot \frac{1}{r} \quad \text{Abbiamo la fondamentale relazione}$$

$$\boxed{\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta^3(\mathbf{r})}$$

Cariche puntiformi

- Possiamo esprimere le relazioni trovate in forma più generale
- Non necessariamente con i campi centrati nell'origine

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{u}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \quad \hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

- Tramite la funzione delta si possono rappresentare le cariche puntiformi come densità di carica
- Ad esempio una carica q nella posizione $\mathbf{r}_0$

$$q \rightarrow \rho(\mathbf{r}) \quad \rho(\mathbf{r}) = q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad \int \rho(\mathbf{r})dV = \int q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)dV = q$$

- Verifichiamo che la formula generale per il campo elettrico prodotto da una distribuzione di carica produce il risultato corretto (diapositiva [55](#))

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \hat{\mathbf{u}} \quad \hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

- Introduciamo $\rho(\mathbf{r}) = q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{q\delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

Equazione di Poisson

- Possiamo verificare anche un'altra cosa importante
 - Il potenziale definito con la formula generale (diapositiva **69**) soddisfa l'equazione di Poisson

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$

- Infatti

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla_{\mathbf{r}}^2 \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \nabla_{\mathbf{r}}^2 \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}}^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') [-4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d^3\mathbf{r}' \\ &= -\frac{4\pi}{4\pi\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

- Infine il potenziale di una carica puntiforme soddisfa l'equazione di Poisson

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

$\rho(\mathbf{r}) = q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$

$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} [-4\pi\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)]$

$$= -\frac{q}{\epsilon_0} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

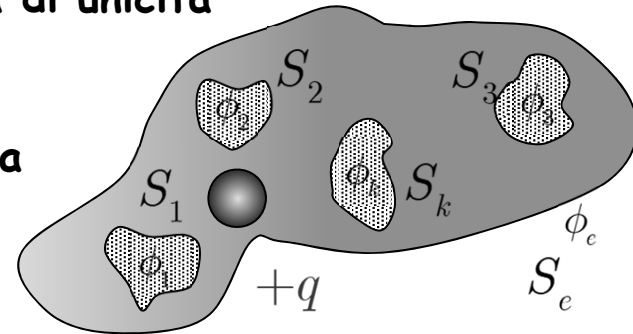
$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

Equazione di Poisson

- Anche per l'equazione di Poisson vale un teorema di unicità
 - Una volta definite le distribuzioni di carica e fissate le condizioni al contorno la soluzione dell'equazione di Poisson che le soddisfa è unica
- Consideriamo una regione delimitata dalla superficie S_e (eventualmente all'infinito) e da un certo numero di conduttori S_k
- All'interno della regione siano anche definite le distribuzioni di carica
 - I potenziali sulle superfici sono fissati dalle condizioni al contorno
 - Supponiamo che esistano due soluzioni Φ_1 e Φ_2 che assumono le stesse condizioni al contorno. Ovviamente $\nabla^2 \Phi_1 = -\rho/\epsilon_0$ e $\nabla^2 \Phi_2 = -\rho/\epsilon_0$
 - La funzione $\Phi_d = \Phi_1 - \Phi_2$ soddisfa l'equazione di Laplace (non Poisson !)
 - L'operatore laplaciano è lineare

$$\nabla^2 \Phi_d = \nabla^2 (\Phi_1 - \Phi_2) = \nabla^2 \Phi_1 - \nabla^2 \Phi_2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \left(-\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) = 0$$
 - Inoltre sulle superfici S_k e S_e

$$\Phi_d(S_k) = \Phi_1(S_k) - \Phi_2(S_k) = \phi_k - \phi_k = 0$$
 - Ma una funzione armonica non può avere massimi o minimi locali
 - Pertanto concludiamo che $\Phi_d = 0$ che implica a sua volta che $\Phi_1 = \Phi_2$
- La soluzione è unica

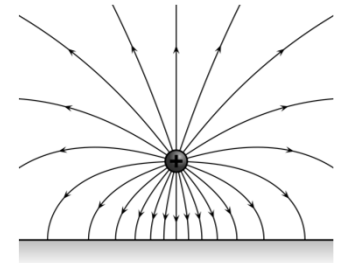


Equazione di Poisson

- A questo punto possiamo discutere la soluzione dell'equazione di Poisson
 - È un problema elettrostatico in cui vengono date le distribuzioni di carica
 - Date le distribuzioni di carica una soluzione particolare per il potenziale è data da

$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

- Tuttavia questa soluzione non rispetta particolari condizioni al contorno
 - Ad esempio per la presenza di conduttori
 - Eventuali cariche indotte distorcono il campo
 - Ad esempio una carica e un piano conduttore
- Ricordiamo una importante osservazione già fatta
 - Sappiamo che $\phi_p(\mathbf{r})$ soddisfa l'equazione di Poisson
 - Consideriamo una funzione $\phi_1(\mathbf{r})$ che soddisfi l'equazione di Laplace



$$\nabla^2 \phi_p(\mathbf{r}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \nabla^2 \phi_1(\mathbf{r}) = 0$$

- Allora $\Phi(\mathbf{r}) = \phi_p(\mathbf{r}) + \phi_1(\mathbf{r})$ soddisfa ancora l'equazione di Poisson con la stessa $\rho(\mathbf{r})$ data precedentemente

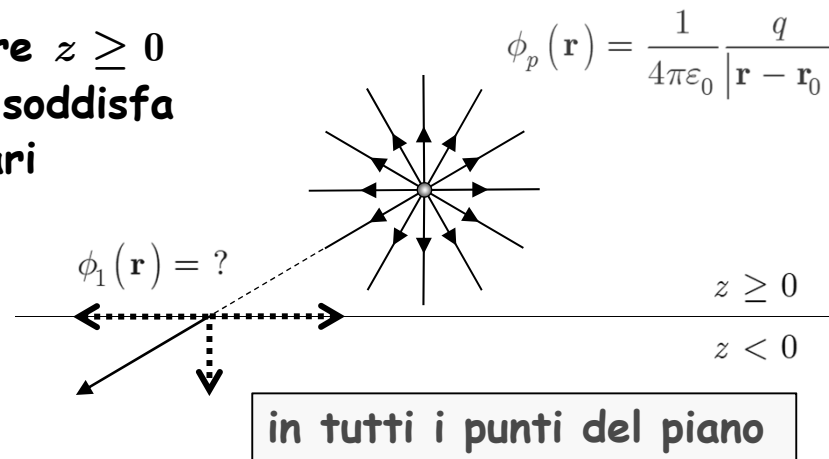
$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = \nabla^2 [\phi_1(\mathbf{r}) + \phi_2(\mathbf{r})] = \nabla^2 \phi_1(\mathbf{r}) + \nabla^2 \phi_2(\mathbf{r}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} + 0$$

- La stessa $\rho(\mathbf{r})$ può generare campi diversi per le condizioni al contorno

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

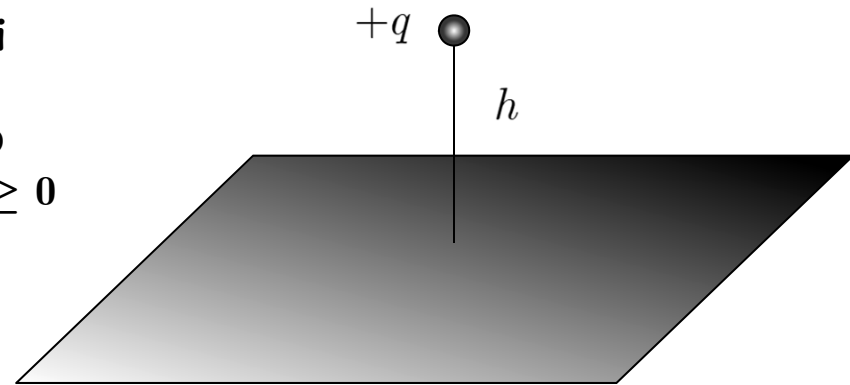
Equazione di Poisson

- Si può allora usare la funzione $\phi_1(\mathbf{r})$ perché $\Phi(\mathbf{r}) = \phi_p(\mathbf{r}) + \phi_1(\mathbf{r})$ soddisfi le condizioni al contorno
- Ad esempio, per il problema della carica puntiforme e un piano conduttore infinito
 - Da risolvere nel semispazio superiore $z \geq 0$
- Allora $\phi_p(\mathbf{r})$ sarebbe la funzione che soddisfa l'equazione di Poisson senza particolari condizioni al contorno
 - Ovviamente il campo elettrico che corrisponde al potenziale $\phi_p(\mathbf{r})$ non è perpendicolare al piano
 - Il piano non è equipotenziale
- Si cerca quindi una soluzione $\phi_1(\mathbf{r})$ dell'equazione di Laplace
 - Tale che il campo elettrico derivato dal potenziale $\phi_1(\mathbf{r})$ annulli le componenti tangenziali del campo
 - Che pertanto renda il piano equipotenziale
 - Come abbiamo visto $\phi_p(\mathbf{r}) + \phi_1(\mathbf{r})$ soddisferà l'equazione di Poisson nel semispazio superiore per la distribuzione di carica data



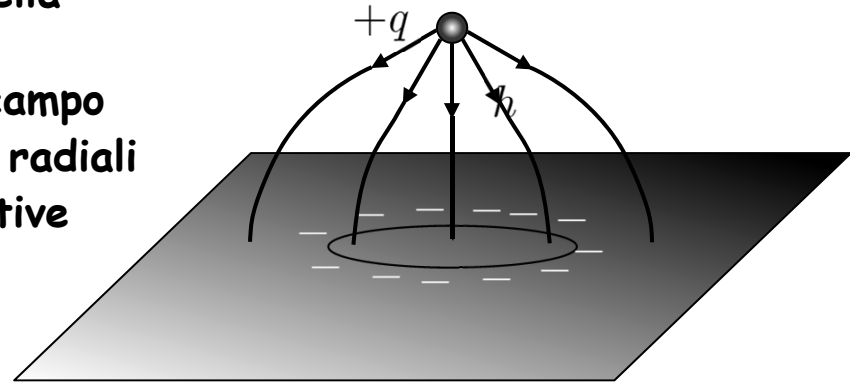
Cariche immagine

- Definiamo esattamente il problema della carica e di un piano infinito
 - Un piano conduttore infinito
 - Una carica positiva $+q$ posta ad una distanza h dal piano
- Matematicamente il problema è quello di trovare una soluzione dell'equazione di Poisson nello spazio al di sopra del piano
 - Il dominio è la regione dello spazio $z \geq 0$
 - Le condizioni al contorno sono
 - Potenziale costante sul piano
 - Assumiamo $V = 0$
 - Potenziale che si annulla all'infinito
- Osserviamo che abbiamo dimostrato il teorema di unicità delle soluzioni dell'equazione di Laplace con le condizioni di Dirichelet
 - Abbiamo appena dimostrato che il teorema di unicità vale anche per le soluzioni dell'equazione di Poisson
- Vedremo fra poco che si può trovare in modo molto semplice una soluzione dell'equazione di Poisson che nello spazio al di sopra del piano soddisfi le condizioni al contorno
 - Per il teorema di unicità questa sarà l'unica soluzione



Cariche immagine

- Cerchiamo di farci un'idea qualitativa della soluzione
 - Dalla carica positiva partono linee di campo
 - Molto vicino alla carica le linee sono radiali
 - La carica positiva induce cariche negative sul piano metallico
 - Le cariche fanno comparire una densità superficiale di carica
 - La densità è maggiore nelle posizioni più vicine alla carica positive
 - La densità di carica è simmetrica per rotazioni intorno alla normale al piano passante per la posizione della carica q
 - Le cariche positive invece sono respinte all'infinito e non contribuiscono
 - La densità di carica negativa:
 - Genera un campo elettrico che modifica il campo radiale della carica q
 - La carica $+q$ e la densità di carica superficiale complessivamente generano un campo elettrico perpendicolare al piano
 - Il piano diventa equipotenziale



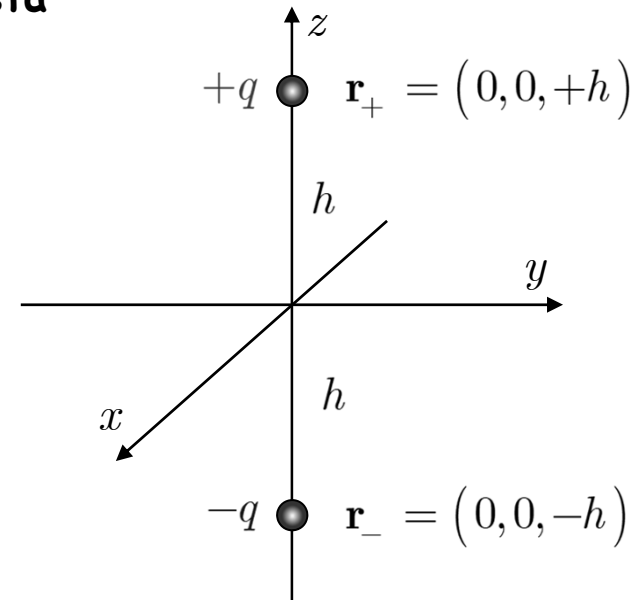
Cariche immagine

- Il campo elettrico che cerchiamo deve avere le seguenti proprietà
 - Essere soluzione dell'equazione di Poisson (carica puntiforme): $\nabla^2\Phi = -\rho/\varepsilon_0$
 - Inoltre deve essere costante (in particolare $\Phi = 0$) sul piano $z = 0$
 - Il piano $z = 0$ è una superficie equipotenziale
- Cerchiamo una soluzione sotto la forma $\Phi = \phi_p + \phi_1$
- La funzione ϕ_p è il potenziale della carica $+q$ posta nella posizione $\mathbf{r}_+$ (altezza h sul piano)

$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|}$$

- La funzione ϕ_p soddisfa l'equazione di Poisson
- La funzione ϕ_1 deve essere soluzione dell'equazione di Laplace nel semispazio $z \geq 0$ e rendere nullo il potenziale a $z = 0$
- Consideriamo il potenziale generato da una carica puntiforme $-q$ posta sull'asse z a distanza $-h$ dall'origine (posizione $\mathbf{r}_-$)

$$\phi_1(\mathbf{r}) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|}$$



Cariche immagine

- Sottolineiamo che ai fini del problema entrambe le funzioni ϕ_p e ϕ_1 sono definite SOLO nel semispazio $z \geq 0$
- Il potenziale nel punto $\mathbf{r}$ è la somma dei due potenziali

$$\Phi(\mathbf{r}) = \phi_p(\mathbf{r}) + \phi_1(\mathbf{r})$$

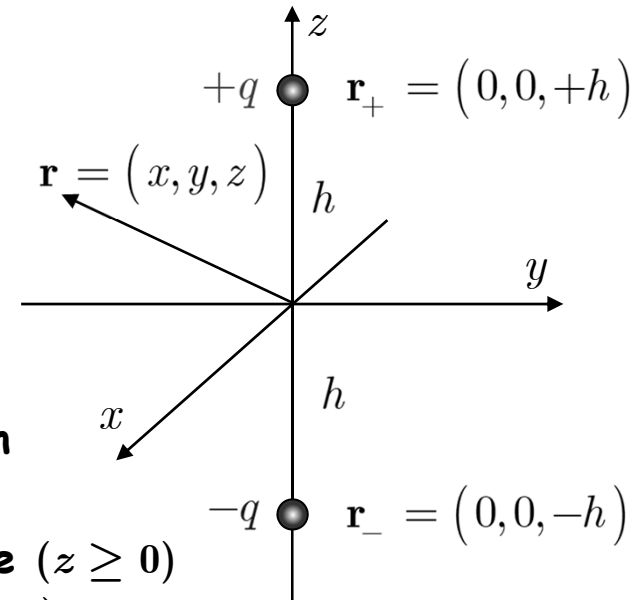
$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|}$$

- Nel semispazio $z \geq 0$
 - La funzione $\phi_p(\mathbf{r})$ soddisfa l'equazione di Poisson
 - La carica è in $\mathbf{r}_+$
 - La funzione $\phi_1(\mathbf{r})$ soddisfa l'equazione di Laplace ($z \geq 0$)
 - La sorgente è in $z < 0$ (la regione in cui $\rho(\mathbf{r}) \neq 0$)
- La somma Φ delle due funzioni soddisfa l'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

- Scriviamo esplicitamente la dipendenza da x, y, z

$$\Phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + h)^2}}$$



Cariche immagine

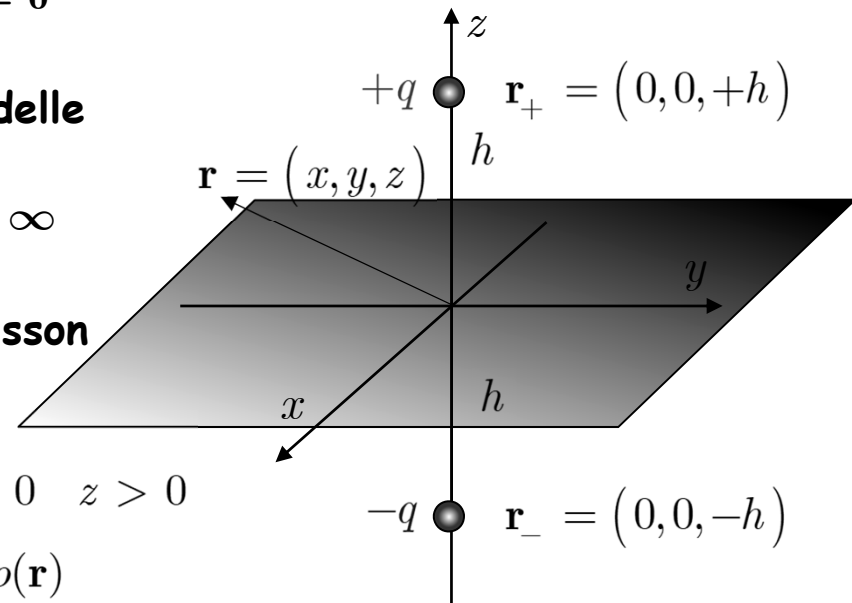
$$\Phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + h)^2}}$$

- Si verifica immediatamente che $\Phi(x, y, 0) = 0$
 - Il piano $z = 0$ è equipotenziale
 - Pertanto il potenziale Φ soddisfa una delle due condizioni al contorno
- Inoltre il potenziale Φ si annulla per $r \rightarrow \infty$
 - La seconda condizione al contorno
- Il potenziale Φ soddisfa l'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \phi_p(\mathbf{r}) = -\frac{q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_+)}{\epsilon_0} = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad \nabla^2 \phi_1(\mathbf{r}) = 0 \quad z > 0$$

$$\nabla^2 \Phi = \nabla^2 [\phi_p(\mathbf{r}) + \phi_1(\mathbf{r})] = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

- Pertanto il potenziale Φ è la soluzione del nostro problema
 - Inoltre, per il teorema di unicità, Φ è l'unica soluzione



Cariche immagine

- Sottolineiamo che la soluzione trovata vale solo nel semispazio superiore
 - La carica negativa non esiste
 - Prende il nome di carica immagine
- Calcoliamo il campo elettrico sul piano

$$\Phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + h)^2}}$$

- Semplifichiamo la notazione introducendo due variabili r_1 e r_2

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2} \quad r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + h)^2} \quad \Phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

- La componente z del campo elettrico

$$E_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2} \right) \left[\frac{2(z - h)}{r_1^3} - \frac{2(z + h)}{r_2^3} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{z - h}{r_1^3} - \frac{z + h}{r_2^3} \right]$$

- Specializzando sul piano ($z = 0$) si ha

$$r_1 = r_2 \equiv w = \sqrt{x^2 + y^2 + h^2}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad w = \sqrt{r^2 + h^2} \quad E_z(x, y, 0) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2h}{w^3}$$

Cariche immagine

- Inoltre si può facilmente verificare che sul piano

$$E_x(x, y, 0) = E_y(x, y, 0) = 0$$

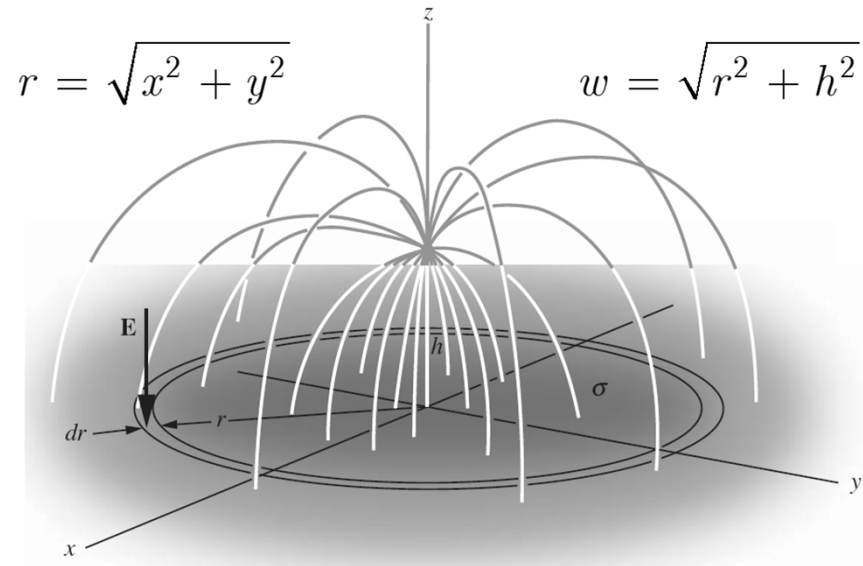
$$E_z(x, y, 0) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2h}{w^3}$$

- Possiamo trovare il valore della densità superficiale di carica

$$\sigma = \epsilon_0 E_z(x, y, 0) = -\frac{q}{4\pi} \frac{2h}{(r^2 + h^2)^{3/2}}$$

- La densità di carica dipende dalla distanza r dal punto sul piano di minima distanza dalla carica
- Calcoliamo la carica totale (negativa) sul piano

$$\begin{aligned} q_- &= -\frac{2hq}{4\pi} \int_0^\infty \frac{1}{(r^2 + h^2)^{3/2}} 2\pi r dr = -\frac{hq}{2} \int_0^\infty \frac{1}{(r^2 + h^2)^{3/2}} dr^2 \\ &= hq \frac{1}{(r^2 + h^2)^{1/2}} \bigg|_0^\infty = -q \end{aligned}$$



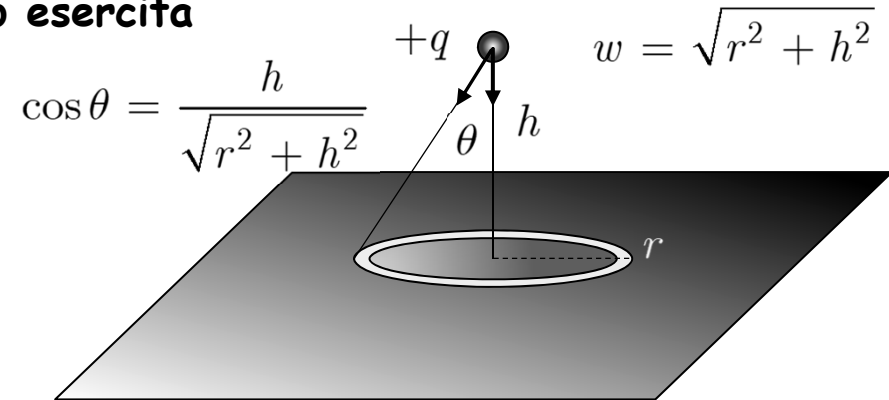
Cariche immagine

- Calcoliamo adesso la forza che il piano esercita sulla carica q

- Consideriamo un anello di raggio r

- La sua area è $da = 2\pi r dr$
- La sua carica $dq = \sigma da$

$$\sigma = \varepsilon_0 E_z(x, y, 0) = -\frac{q}{4\pi} \frac{2h}{w^3}$$



- La carica dell'anello esercita una forza sulla carica pari a

$$dF_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qdq}{h^2 + r^2} \cos \theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{hq\sigma 2\pi r dr}{(h^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{hq}{4\varepsilon_0} \frac{\sigma dr^2}{(h^2 + r^2)^{3/2}}$$

- Introducendo il valore di σ

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi} \frac{2h}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \quad dF_z = -\frac{2h^2 q^2}{16\pi\varepsilon_0} \frac{dr^2}{(h^2 + r^2)^3}$$

$$F_z = -\frac{h^2 q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{dr^2}{(h^2 + r^2)^3} = -\frac{h^2 q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{(h^2 + r^2)^2} \Bigg|_0^\infty = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 h^2}$$

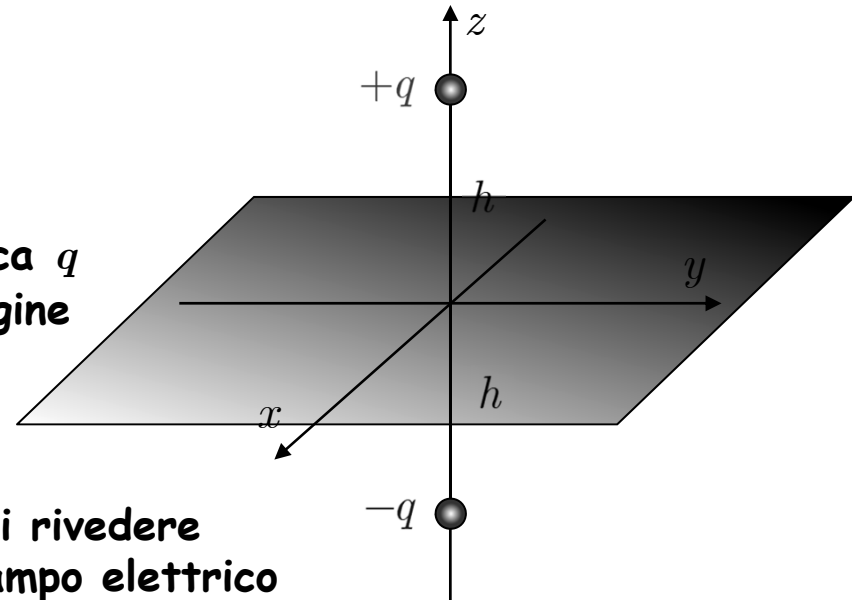
$$F_z = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 (2h)^2}$$

Cariche immagine e forza

- Esaminiamo il risultato appena trovato

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2h)^2}$$

- La forza che il piano esercita sulla carica q è la stessa di quella che la carica immagine eserciterebbe sulla carica q
 - Due cariche uguali in modulo poste a distanza $2h$ l'una dall'altra
- Il problema appena studiato ci consente di rivedere criticamente la definizione operativa di campo elettrico
 - La forza per unità di carica che si esercita su una carica esploratrice
 - Pertanto se avviciniamo una carica ad un piano conduttore scarico la forza esercitata sulla carica è



$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2h)^2} \longrightarrow E = \frac{F}{q} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (2h)^2}$$

SBAGLIATO !!

- La definizione corretta è

$$E = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{F}{q} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (2h)^2} = 0$$

Definizione operativa di E

- Come faccio sperimentalmente a fare il limite?
 - Detto diversamente, come faccio a sapere se la carica è piccola a sufficienza?
- Sperimentalmente faccio più misure, con cariche sempre più piccole e osservo se il campo che misuro dipende dal valore della carica esploratrice
 - Nell'esempio studiato
 - Si utilizza una carica q e si misura E_1
 - Si utilizza una carica $q/2$ e si misura E_2
 - Si utilizza una carica $q/4$ e si misura E_3
 - Si estrapola all'origine
 - Se il campo non raggiunge un valore stabile significa che la carica esploratrice è la causa del campo che misuriamo

