
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 9 - 27.11.2022

Soluzioni dell'equazione di Laplace

Metodo separazione delle variabili

Caso coordinate cartesiane

Caso coordinate sferiche: sfera conduttrice

Anno Accademico 2022/2023

Separazione Variabili: Coordinate Cartesiane

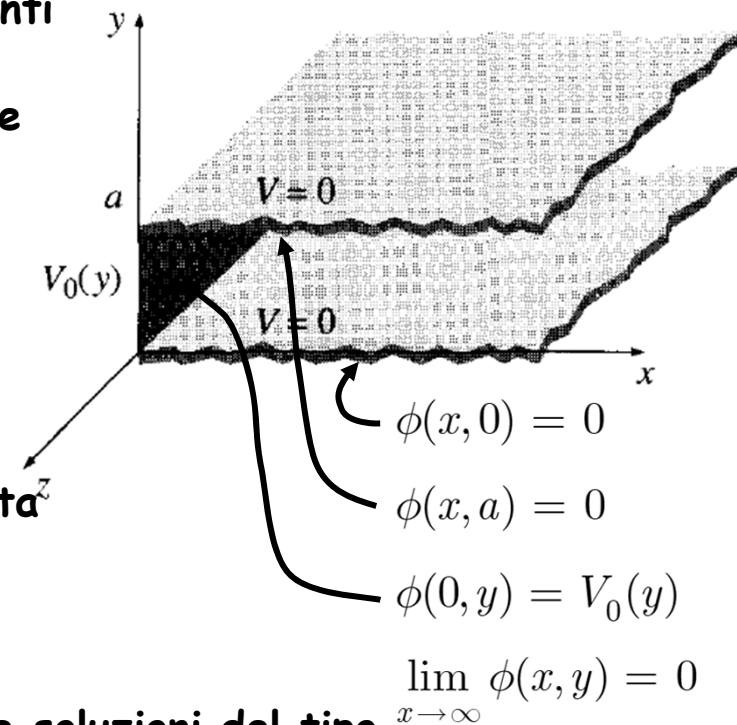
- Veniamo adesso ad uno dei metodi più importanti per la soluzione dell'equazione di Laplace
- Per semplificare l'esposizione supponiamo che il potenziale dipenda solo da due variabili
 - Ad esempio due semipiani metallici infiniti posti a potenziale nullo
 - Una striscia a potenziale $V_0(y)$
- Il potenziale non dipende dalla coordinata z
- Le condizioni al contorno sono
- In due dimensioni l'equazione di Laplace diventa

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

- Il metodo consiste, innanzitutto, nel cercare soluzioni del tipo

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y) \quad \text{prodotto di funzioni di una sola variabile}$$

- A prima vista può sembrare una soluzione poco generale
- Sembrerebbe improbabile che possa risolvere il nostro problema
- Ricordiamo tuttavia che la somma di tanti x^k ha prodotto la funzione $\sin x$



Separazione Variabili: Coordinate Cartesiane

- Sostituiamo nell'equazione di Laplace

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad Y(y) \frac{d^2 X}{dx^2} + X(x) \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

- Dividiamo per $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

Solo funzione di x
Solo funzione di y

- Notiamo che le derivate parziali sono diventate derivate totali
- L'unica possibilità per soddisfare l'equazione è che i due termini siano costanti indipendenti sia da x che da y

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X}{dx^2} = S_1 \quad \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y}{dy^2} = S_2 \quad S_1 + S_2 = 0 \quad S_1 = -S_2 = k^2 > 0$$

- Abbiamo introdotto la costante k^2 per futura convenienza

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = k^2 X(x) \quad \longrightarrow \quad X(x) = A_k e^{+kx} + B_k e^{-kx}$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 Y(y) \quad \longrightarrow \quad Y(y) = C_k \sin ky + D_k \cos ky$$

Separazione Variabili: Coordinate Cartesiane

- Abbiamo pertanto trovato una famiglia di soluzioni $\phi_k(x,y)$ (al variare di k)

$$\phi_k(x,y) = (A_k e^{+kx} + B_k e^{-kx})(C_k \sin ky + D_k \cos ky)$$

- Ogni soluzione dipende da quattro costanti: $A_k B_k C_k D_k$
- Si verifica facilmente che è una soluzione dell'equazione di Laplace
- Imponiamo le condizioni al contorno ad ogni soluzione
 - La quarta condizione impone che la costante A_k sia nulla
 - Il termine e^{kx} diverge per $x \rightarrow \infty$
 - La soluzione diventa

$$\phi_k(x,y) = B_k e^{-kx} (C_k \sin ky + D_k \cos ky)$$

- La prima condizione al contorno richiede $D_k = 0$

$$\phi_k(x,0) = B_k e^{-kx} (C_k \sin k0 + D_k \cos k0) = B_k D_k e^{-kx} = 0 \implies D_k = 0$$

- La soluzione si è ridotta a

$$\phi_k(x,y) = B_k C_k e^{-kx} \sin ky = C'_k e^{-kx} \sin ky \quad C'_k = B_k C_k$$

- Dato che C'_k è arbitraria la chiamiamo di nuovo C_k
- La seconda condizione al contorno pone una condizione su k

$$\phi_k(x,a) = C_k e^{-kx} \sin ka = 0 \implies \sin ka = 0 \implies k_n a = n\pi \quad k_n = \frac{n\pi}{a} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\phi_k(x,0) = 0$$

$$\phi_k(x,a) = 0$$

$$\phi_k(0,y) = V_0(y)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_k(x,y) = 0$$

Separazione Variabili: Coordinate Cartesiane

- Abbiamo pertanto trovato una famiglia infinita e numerabile di soluzioni (cambiamo k in n) che soddisfano tre delle quattro condizioni al contorno

$$\phi_n(x, y) = C_n e^{-k_n x} \sin k_n y \quad k_n = \frac{n\pi}{a} \quad C_{k_n} = C_n$$

- Consideriamo adesso la terza condizione al contorno (l'ultima da soddisfare)

$$\phi(0, y) = V_0(y)$$

- Per $x = 0$ la soluzione si riduce a

$$\phi_n(0, y) = C_n \sin \frac{n\pi}{a} y$$

- Pertanto, a meno che $V_0(y)$ abbia esattamente questa forma, non abbiamo ancora trovato la nostra soluzione
- Tuttavia, l'equazione di Laplace è lineare
 - La somma di più soluzioni è ancora una soluzione
 - Si tratta di verificare se esiste un insieme di costanti C_n tali che

$$\sum_n C_n \sin \frac{n\pi}{a} y = V_0(y)$$

Separazione Variabili: Coordinate Cartesiane ***

- L'insieme di C_n esiste anche se, in generale, la somma deve essere infinita
 - Si tratta dello sviluppo di $V_0(y)$ in una serie di Fourier

$$V_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{a} y$$

- Per trovare i coefficienti C_n si utilizza una semplice e importante proprietà delle funzioni trigonometriche: l'ortogonalità

$$\int_0^a \sin \frac{n\pi}{a} y \sin \frac{m\pi}{a} y dy = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{a}{2} & n = m \end{cases} = \frac{a}{2} \delta_{nm}$$

- Per trovare i coefficienti C_n si calcolano gli integrali

$$\begin{aligned} \frac{2}{a} \int_0^a V_0(y) \sin \frac{m\pi}{a} y dy &= \frac{2}{a} \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{a} y \sin \frac{m\pi}{a} y dy \\ &= \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^a \sin \frac{n\pi}{a} y \sin \frac{m\pi}{a} y dy = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{a}{2} \delta_{nm} = C_m \end{aligned}$$

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a V_0(y) \sin \frac{n\pi}{a} y dy$$

Separazione Variabili: Coordinate Cartesiane ***

- Per finire specializziamo $V_0(y)$ a un caso molto semplice

$$V_0(y) = U_0 \quad 0 \leq y \leq a$$

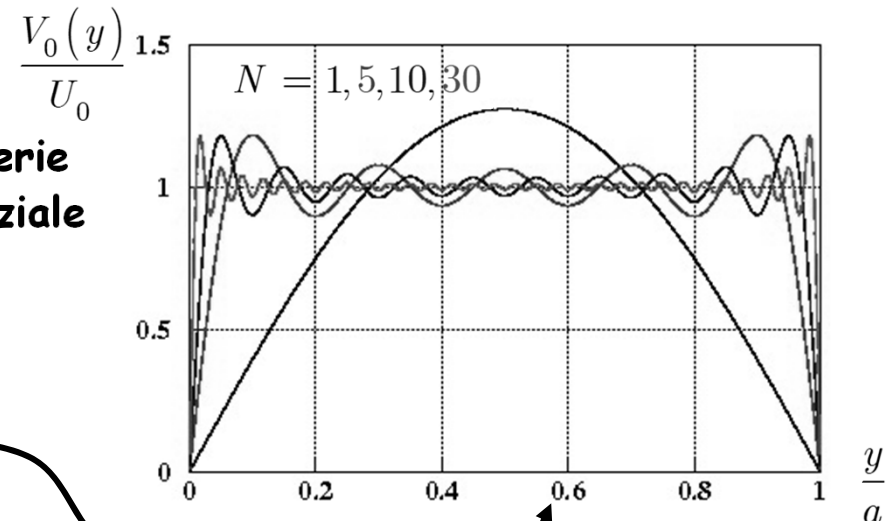
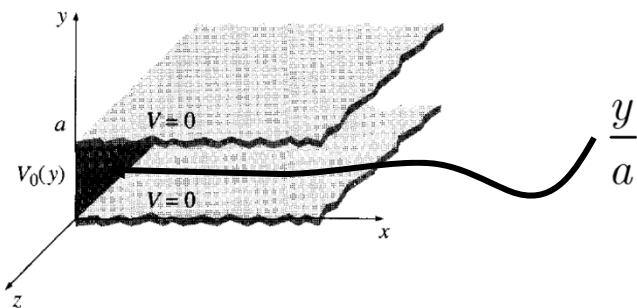
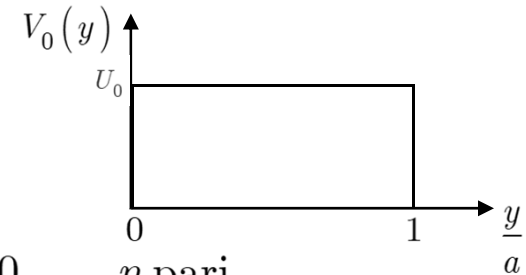
- Gli integrali possono essere calcolati semplicemente

$$C_n = \frac{2U_0}{a} \int_0^a \sin \frac{n\pi}{a} y dy = \frac{2U_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \quad C_n = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{4U_0}{n\pi} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

- Il grafico mostra la somma dei primi termini della serie

$$V_0(y) = \sum_{n=1}^N C_n \sin \frac{n\pi}{a} y$$

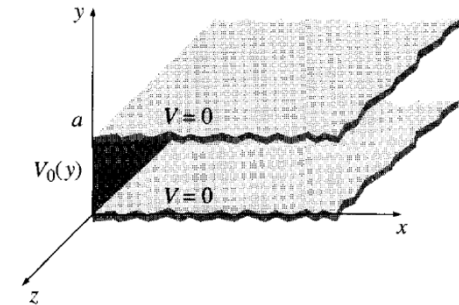
- Si vede che al crescere di N la serie approssima sempre meglio il potenziale costante U_0



Separazione Variabili: Coordinate Cartesiane ***

- Pertanto la soluzione al problema è

$$\phi(x, y) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-k_{2n+1}x} \sin k_{2n+1}y \quad k_n = \frac{n\pi}{a}$$



- La soluzione sotto forma di serie infinita potrebbe lasciare insoddisfatto qualcuno
- Tuttavia si tratta di una funzione come tante altre
 - Una funzione trascendente
 - Può essere manipolata
 - Derivate, integrali
 - Anche le funzioni trigonometriche sono serie infinite
 - Per calcolarne il valore per valori specifici di x e y occorre sommare numericamente la serie
 - Si fa così anche per le funzioni trigonometriche
- Il caso vuole che questa serie abbia una somma esprimibile con funzioni trascendenti
- Vedi

$$\phi(x, y) = \frac{2U_0}{\pi} \arctan \frac{\sin \frac{\pi y}{a}}{\sinh \frac{\pi x}{a}}$$

Table of Integrals, Series and Products 7th ed.

I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik – Academic Press 2007

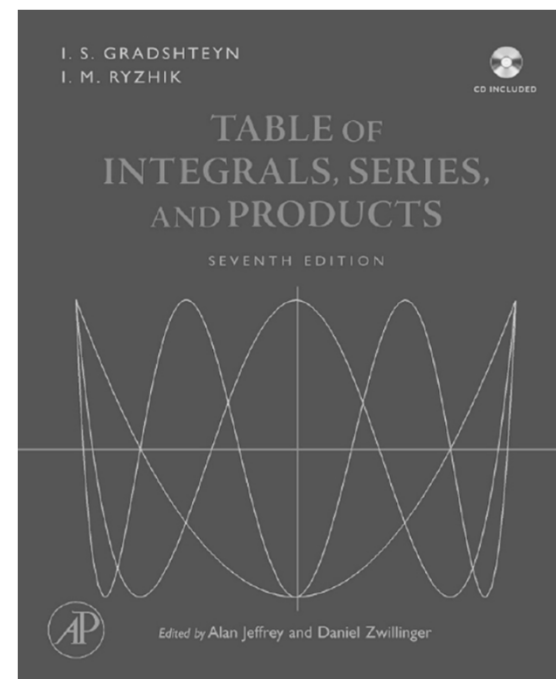
Separazione Variabili: Coordinate Cartesiane ***

- Dalla tabella si trova (1.448.3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{2n-1} \sin(2n-1)x}{2n-1} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2p \sin x}{1-p^2}$$

- Elaborando l'espressione si ritrova il risultato che ci interessa $p = e^{-\frac{\pi y}{a}}$

- Table of Integrals, Series and Products 7° ed.
I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik
Academic Press 2007



Separazione Variabili: Coordinate Cartesianhe

- La figura mostra un grafico del potenziale

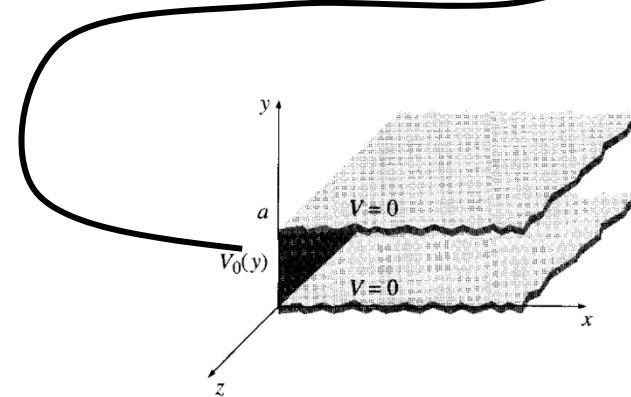
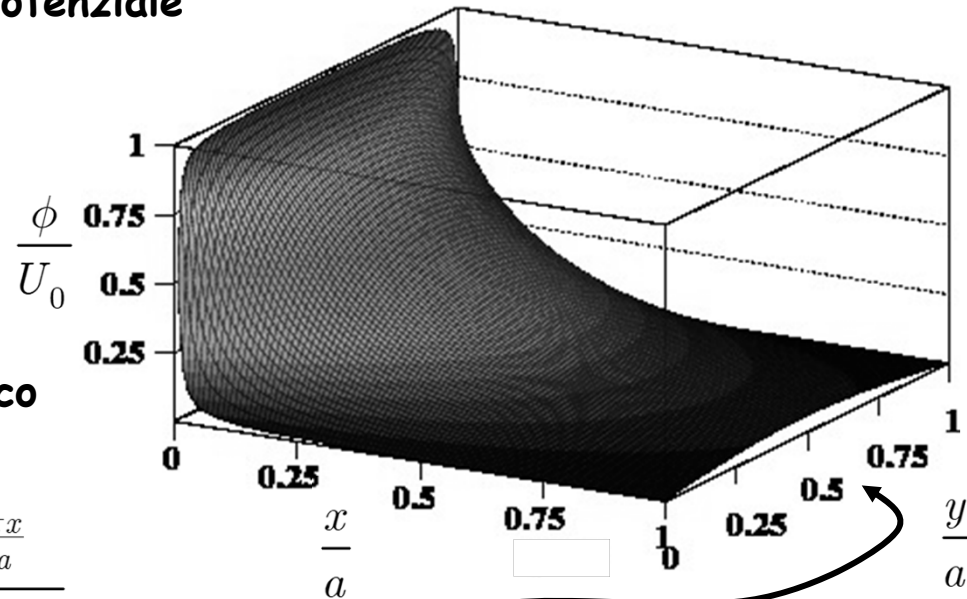
$$\phi(x, y) = \frac{2U_0}{\pi} \arctan \frac{\sin \frac{\pi y}{a}}{\sinh \frac{\pi x}{a}}$$

- Per finire, si possono calcolare le componenti del campo elettrico

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{2U_0}{a} \frac{\sin \frac{\pi y}{a} \cosh \frac{\pi x}{a}}{\sinh^2 \frac{\pi x}{a} + \sin^2 \frac{\pi y}{a}}$$

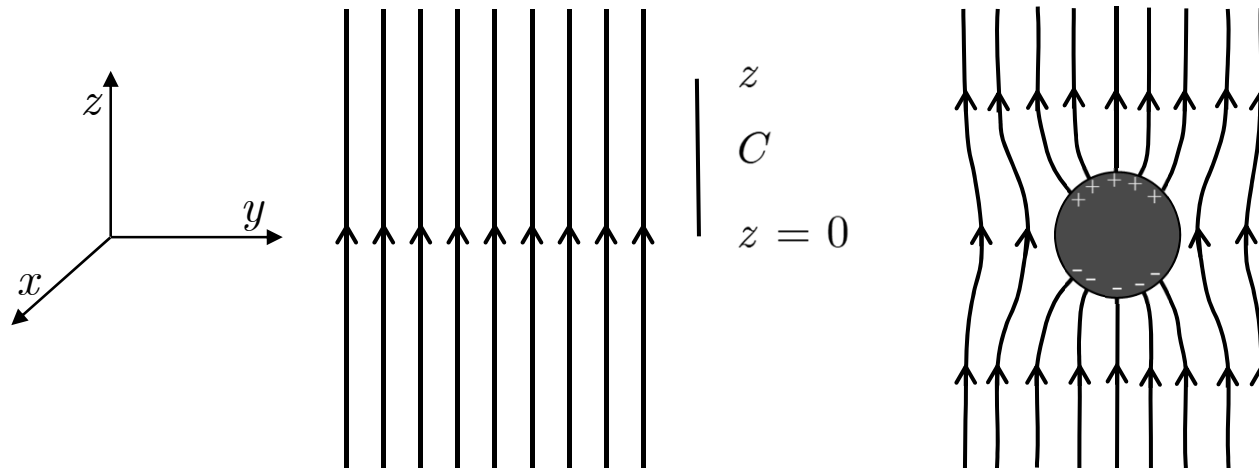
$$E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{2U_0}{a} \frac{\sinh \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a}}{\sinh^2 \frac{\pi x}{a} + \sin^2 \frac{\pi y}{a}}$$

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$



Separazione Variabili: Coordinate Sferiche

- La geometria del problema appena studiato è stata trattata in modo semplice utilizzando le coordinate cartesiane
- Risolveremo adesso il problema del campo elettrico di una sfera conduttrice posta in un campo elettrico uniforme



- Dirighiamo l'asse z nella direzione parallela al campo elettrico

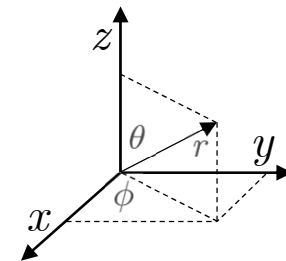
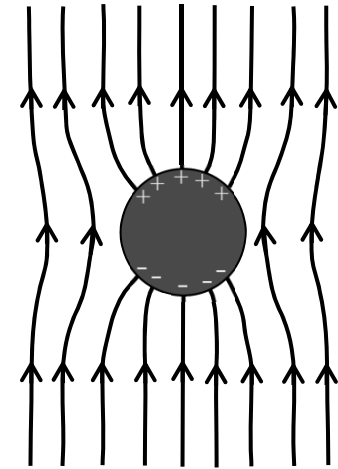
$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{e}}_z \quad V(z) = -\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + V(0) = -\int_0^z E_0 dz + V_0 = -E_0 z + V_0$$

- Converrà porre il potenziale uguale a zero per $z = 0 \rightarrow V(z) = -E_0 z$
- Non è nullo all'infinito
- L'introduzione della sfera metallica di raggio r_0 modifica il campo elettrico
- Compaiono cariche indotte positive e negative

Separazione Variabili: Coordinate Sferiche

- Il dominio è tutto lo spazio meno l'interno della sfera
 - All'interno della sfera il potenziale è costante e uguale al valore che il potenziale che assume sulla superficie
- Per questo problema sono più adatte le coordinate sferiche
 - Il vettore posizione è individuato da (r, θ, ϕ)
 - Il potenziale dipende da queste variabili: $V(r, \theta, \phi)$
 - Notiamo che il sistema è simmetrico per rotazioni intorno all'asse parallelo al campo elettrico e passante per il centro della sfera (asse z)
 - Il potenziale non dipende dall'angolo azimutale ϕ
- Le condizioni al contorno sono
 - La superficie della sfera è equipotenziale
 - Dato che il potenziale è definito a meno di una costante poniamo a zero il potenziale della sfera
- Per $z \rightarrow \infty$ il campo elettrico non risentirà della presenza della sfera nell'origine
 - Il campo sarà di nuovo uniforme

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{z} \quad \longrightarrow \quad \lim_{r \rightarrow \infty} V(r, \theta) = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$$



$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

Separazione Variabili: Coordinate Sferiche

- Nelle esercitazioni ricaveremo la forma dell'equazione di Laplace in coordinate sferiche

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

- Se scegliamo l'asse z parallelo al campo elettrico uniforme il problema è simmetrico per rotazioni intorno all'asse z e il potenziale non dipende da ϕ

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0 \quad \text{Abbiamo eliminato il fattore } 1/r^2$$

- Come nel caso delle coordinate cartesiane ipotizziamo una soluzione del tipo

$$V(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

- Le funzioni R e Θ dipendono solo da r e θ rispettivamente
- Sostituendo nell'equazione di Laplace in coordinate sferiche

$$\Theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + R \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) = 0$$

- Dividendo per $V(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) = 0$$

Separazione Variabili: Coordinate Sferiche

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) = 0$$

- La situazione è identica al caso delle coordinate cartesiane
 - Il primo termine dipende solo da r
 - Il secondo termine dipende solo da θ
 - Devono essere due costanti

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = S_1$$

$$\frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = S_2$$

$$S_1 + S_2 = 0$$

$$S_1 = -S_2 = l(l+1)$$

- La prima equazione diventa

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = l(l+1)R$$

- Si verifica facilmente che la soluzione è

$$R_l(r) = A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}$$

Separazione Variabili: Coordinate Sferiche ***

- La seconda equazione è

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -l(l+1) \Theta \sin \theta$$

- Questa equazione non è semplice
- Per l intero non negativo le soluzioni sono i Polinomi di Legendre

$$\Theta(\theta) = P_l(\cos \theta)$$

- I polinomi di Legendre di ordine l arbitrario possono essere trovati con la formula di Rodriguez

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx} \right)^l (x^2 - 1)^l$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1) / 2$$

...

- I Polinomi di Legendre sono funzioni molto importanti
 - Si incontrano nella trattazione delle rotazioni e del momento angolare
- Semplici proprietà
 - P_l contiene solo potenze pari o dispari di x secondo che l sia pari o dispari
 - $P_l(1) = 1$

$$u = \frac{r'}{r}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2ux + u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) u^n \quad \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 - 2ux}}$$

Separazione Variabili: Coordinate Sferiche ***

- L'equazione di Legendre è del secondo ordine e quindi deve esserci un'altra soluzione
 - Ci sono altre soluzioni ma divergono per $\theta = 0$ e/o $\theta = \pi$
 - Ad esempio

$$\Theta(\theta) = \ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

- Possiamo scartare queste soluzioni perché non rappresentano sistemi fisici
- La soluzione separabile generale che abbiamo trovato è pertanto

$$V_l(r, \theta) = \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

- La somma di soluzioni con l differente è ancora una volta una soluzione
- Bisogna sommare un numero sufficiente di soluzioni (al limite infinite) e trovare opportuni A_l e B_l per soddisfare le condizioni al contorno
- Pertanto, la soluzione generale è

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

Separazione Variabili: Coordinate Sferiche

- Torniamo al problema della sfera
 - Ricordiamo le due condizioni al contorno

$$V(r_0, \theta) = 0 \qquad \lim_{r \rightarrow \infty} V(r, \theta) = -E_0 r \cos \theta$$

- Ricordiamo che in coordinate polari $z = r \cos \theta$
- Imponiamo la prima condizione al contorno
 - Ricordiamo la soluzione generale

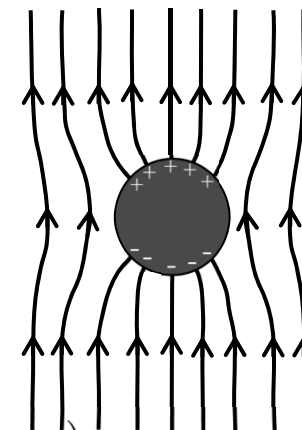
$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad \longrightarrow \quad V(r_0, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r_0^l + \frac{B_l}{r_0^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) = 0$$

- Deve essere nullo ogni termine

$$A_l r_0^l + \frac{B_l}{r_0^{l+1}} = 0 \qquad B_l = -A_l r_0^{2l+1} \qquad V(r_0, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(r_0^l - \frac{r_0^{2l+1}}{r_0^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) = 0$$

- Veniamo alla seconda condizione al contorno
 - Per $r \rightarrow \infty$ il termine $1/r^{l+1}$ diventa trascurabile
 - Perché V si comporti asintoticamente come $\sim r$ la serie in r^l deve contenere solo il termine $l = 1$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r, \theta) = A_1 r P_1(\cos \theta) = A_1 r \cos \theta \quad \longrightarrow \quad A_1 = -E_0 \qquad A_{l \neq 1} = 0$$



Separazione Variabili: Coordinate Sferiche

- Pertanto la soluzione al nostro problema è

$$V(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{r_0^3}{r^2} \right) \cos \theta$$

- Il campo elettrico è il gradiente del potenziale
 - Nelle esercitazioni ricaverete l'espressione del gradiente in coordinate sferiche

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{e}_\phi$$

- Calcoliamo il campo elettrico

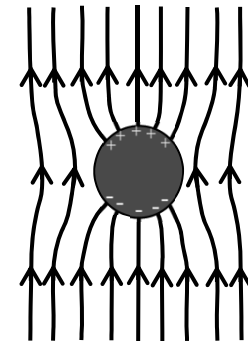
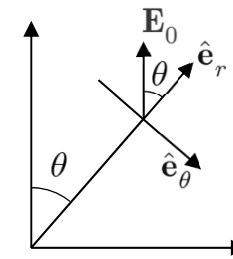
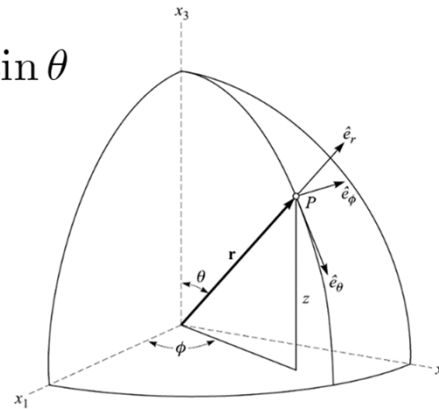
$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = E_0 \cos \theta + E_0 \frac{2r_0^3}{r^3} \cos \theta \qquad E_\phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -E_0 \sin \theta + E_0 \frac{r_0^3}{r^3} \sin \theta$$

- Notiamo che per $r \rightarrow \infty$

$$E_r \rightarrow E_0 \cos \theta$$

$$E_\theta \rightarrow -E_0 \sin \theta$$



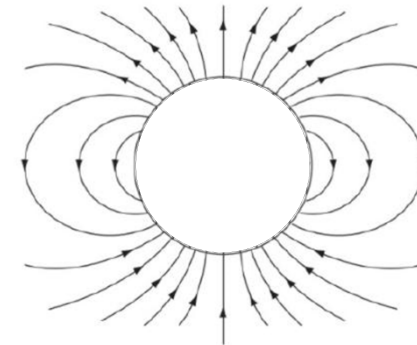
Separazione Variabili: Coordinate Sferiche

$$\mathbf{E} = (E_0 \cos \theta + E_0 \frac{2r_0^3}{r^3} \cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_r + (-E_0 \sin \theta + E_0 \frac{r_0^3}{r^3} \sin \theta) \hat{\mathbf{e}}_\theta$$

- Il campo elettrico è pertanto composto da due termini

$$\mathbf{E}_0 = E_0 \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r - E_0 \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta = E_0 (\cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta) = E_0 \hat{\mathbf{e}}_z \quad \text{Campo uniforme}$$

$$\mathbf{E}_d = E_0 \frac{2r_0^3}{r^3} \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r + E_0 \frac{r_0^3}{r^3} \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad \text{Campo dipolare}$$



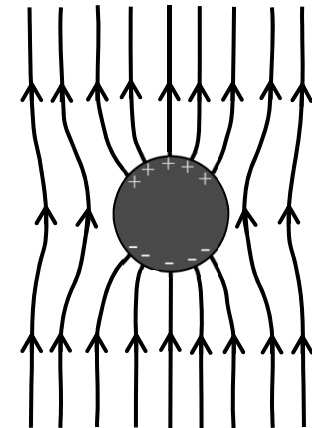
- La soluzione è la somma dei due campi

- Studiamo il campo sulla superficie della sfera

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r_0, \theta) &= (E_0 \cos \theta + E_0 \frac{2r_0^3}{r_0^3} \cos \theta) \hat{\mathbf{e}}_r + (-E_0 \sin \theta + E_0 \frac{r_0^3}{r_0^3} \sin \theta) \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &= 3E_0 \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r + (-E_0 \sin \theta + E_0 \sin \theta) \hat{\mathbf{e}}_\theta = 3E_0 \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r \end{aligned}$$

- Il campo è perpendicolare alla superficie della sfera
- Il modulo del campo è

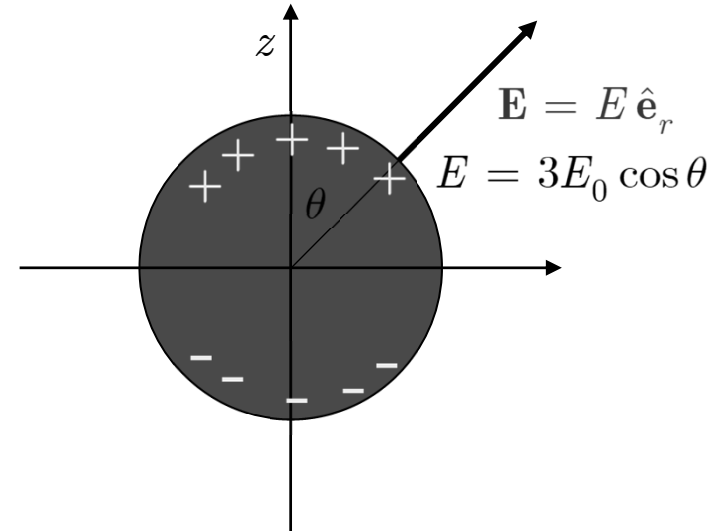
$$E = |\mathbf{E}| = 3E_0 \cos \theta$$



Separazione Variabili: Coordinate Sferiche

- La densità di carica sulla sfera è proporzionale alla componente normale del campo elettrico
- Il campo elettrico è perpendicolare

$$\sigma(\theta) = \varepsilon_0 E = 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta \quad \sigma(\theta) > 0 \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$
$$\sigma(\theta) < 0 \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$$



- Infine la carica totale sulla sfera è nulla
- L'elemento di superficie

$$da = 2\pi r_0^2 \sin \theta d\theta \quad dq = \sigma(\theta) da$$

$$q = \int_0^\pi 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta 2\pi r_0^2 \sin \theta d\theta = 6\pi \varepsilon_0 E_0 r_0^2 \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta = -\frac{3}{2} \pi \varepsilon_0 E_0 r_0^2 \cos 2\theta \Big|_0^\pi = 0$$

$$q^+ = \int_0^{\pi/2} 3\varepsilon_0 E_0 \cos \theta 2\pi r_0^2 \sin \theta d\theta = -\frac{3}{2} \pi \varepsilon_0 E_0 r_0^2 \cos 2\theta \Big|_0^{\pi/2} = 3\pi \varepsilon_0 E_0 r_0^2$$

Separazione Variabili: Coordinate Sferiche

- Per finire anticipiamo un risultato
 - Il campo elettrico all'interno di un guscio sferico con densità superficiale proporzionale a $\cos\theta$ è uniforme
- Nel problema appena svolto
 - Il campo all'interno della sfera conduttrice è la somma
 - Del campo elettrico esterno, uniforme
 - Del campo elettrico prodotto dal guscio, uniforme, diretto in verso opposto e di modulo uguale

