
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 8 - 20.10.2022

Equazioni di Poisson e Laplace
Funzioni armoniche. Teorema di unicità
Coordinate curvilinee
Equazioni differenziali e serie di funzioni

Anno Accademico 2022/2023

Equazioni di Poisson e di Laplace

- Abbiamo espresso la legge di Gauss in forma differenziale

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Abbiamo inoltre visto che, dal momento che il campo elettrico è conservativo può essere espresso tramite un potenziale

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi = -\nabla \phi$$

- Combinando le due equazioni

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \nabla \phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- L'operatore $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ prende il nome di Laplaciano

- L'equazione diventa

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Equazione di Poisson

- In regioni dello spazio in cui non esistono cariche, l'equazione diventa

Notiamo che è l'equazione omogenea associata

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Equazione di Laplace

- Abbiamo già detto che si tratta di una delle equazioni differenziali più importanti della fisica matematica

Equazione di Laplace

- Le equazioni scritte sono generali e non dipendono dal sistema di coordinate scelto

- In coordinate cartesiane

$$\nabla = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad \longrightarrow \quad \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- Le equazioni diventano

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Queste equazioni hanno infinite soluzioni non banali
- Come vedremo fra poco è indispensabile definire le condizioni al contorno
 - Un aspetto delicato e spesso molto complicato
 - Reso più semplice dall'utilizzo di opportuni sistemi di coordinate
- La soluzione di queste equazioni richiede metodi matematici avanzati
 - Non affronteremo sistematicamente il problema
 - Esamineremo solamente alcuni dei casi più semplici

Condizioni al contorno

- Per trovare una soluzione dell'equazione di Laplace è indispensabile definire le condizioni al contorno (Boundary Conditions)
- Nelle equazioni differenziali ordinarie di secondo grado per avere una soluzione unica era necessario definire due condizioni iniziali
 - Ad esempio, posizione e velocità iniziali per determinare univocamente la traiettoria di una particella determinata dalla seconda legge di Newton

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}}{m} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{F}}{2m} t^2$$

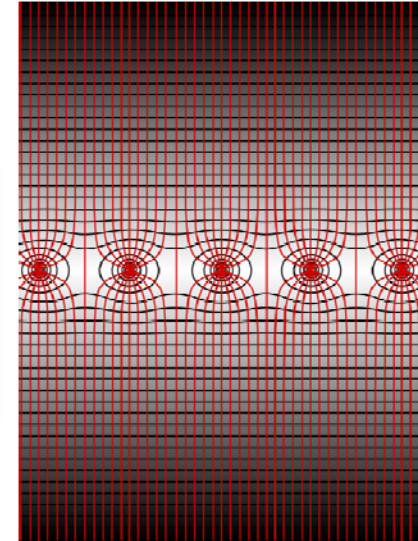
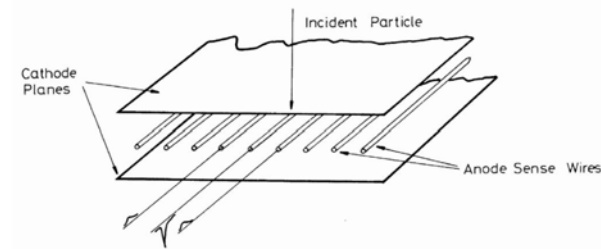
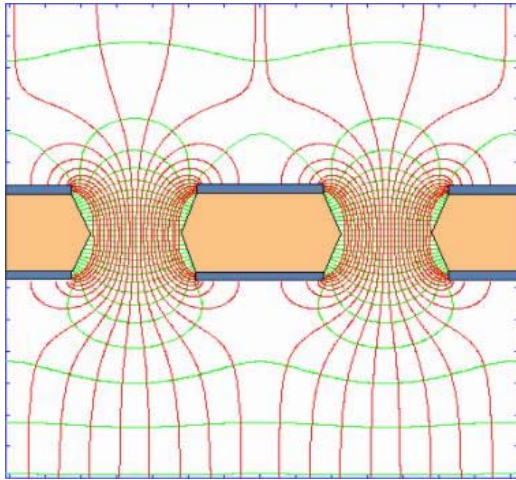
- Nel caso delle equazioni differenziali alle derivate parziali la condizione iniziale assume una forma più complessa

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

- Occorre definire il dominio: la regione dello spazio in cui si cerca la soluzione
 - Supponendo che lo spazio di interesse sia delimitato da superfici, per trovare una soluzione occorre definire il valore di ϕ sulle superfici stesse
 - Una delle superfici può essere all'infinito
- Le soluzioni dell'equazione di Laplace prendono il nome di funzioni armoniche
 - Ne vedremo fra breve un'importante proprietà

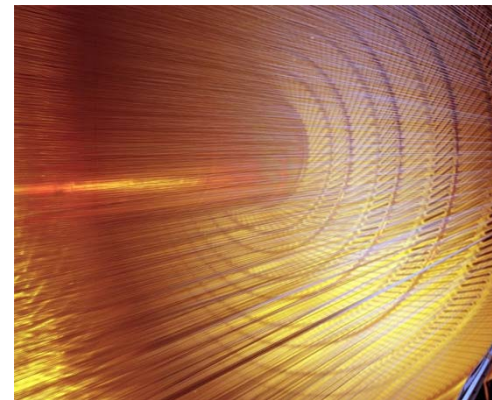
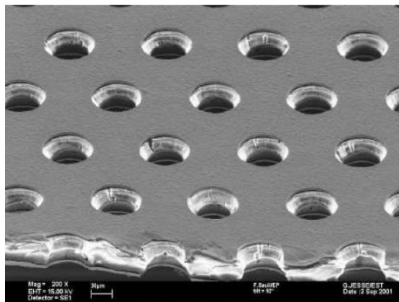
Funzioni armoniche

- In pratica i campi elettrici si generano utilizzando elettrodi metallici posti a un definito potenziale
 - Esempi di campi elettrici



MWPC: Multiwire Proportional Chamber

GEM: Gas Electron Multiplier

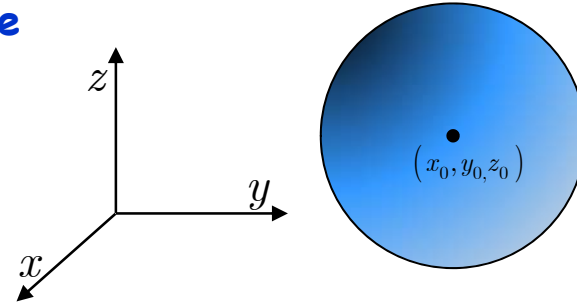


Funzioni armoniche

- Una importante proprietà delle funzioni armoniche

- Data una funzione armonica $\phi(x,y,z)$ e una sfera di superficie A centrata in x_0, y_0, z_0

$$\frac{1}{A} \oint_A \phi(x,y,z) da = \phi(x_0, y_0, z_0)$$



Il valore medio di una funzione armonica su una sfera arbitraria è uguale al valore della funzione nel centro della sfera

- Questa proprietà significa anche che una funzione armonica non può avere massimi o minimi locali
- Infatti, supponiamo, per assurdo, che abbia un minimo locale in $\mathbf{r}$
 - Significa che in tutti i punti $\mathbf{r}'$ di un intorno di $\mathbf{r}$ tali che $\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\| < \varepsilon$ deve essere $\phi(\mathbf{r}) < \phi(\mathbf{r}')$
 - Pertanto su tutti i punti $\mathbf{r}'$ sulla superficie della sfera $\|\mathbf{r}' - \mathbf{r}\| = \varepsilon$ (avente centro in $\mathbf{r}$) sarà $\phi(\mathbf{r}') > \phi(\mathbf{r})$
 - Il valor medio di $\phi(\mathbf{r}')$ sulla superficie della sfera sarà maggiore di $\phi(\mathbf{r})$
 - Incompatibile con la proprietà enunciata delle funzioni armoniche
- Ricordiamo la proprietà che in un campo elettrostatico non ci possono essere posizioni di equilibrio stabile

Equazione di Laplace

- Torniamo al problema della definizione delle condizioni al contorno
- Ci sono due modi per definire le condizioni al contorno per l'equazione di Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0$$

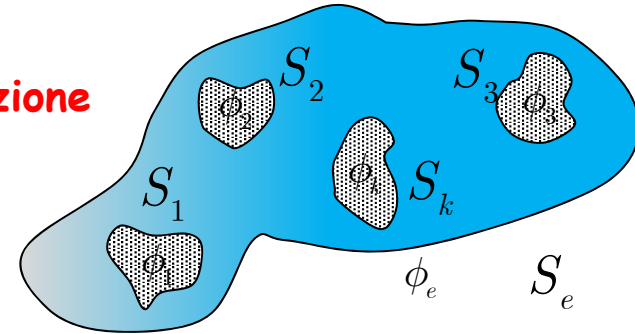
- Condizioni di Dirichelet
 - Si fissa il valore di ϕ su tutte le superfici (conduttori) che delimitano lo spazio di interesse (dominio in cui si cerca la soluzione)
 - Se lo spazio non è chiuso si introduce una superficie all'infinito sulla quale si fissa il valore del potenziale ϕ (di solito un valore nullo)
- Condizione di Neumann
 - Si definisce il valore della derivata normale $\partial\phi/\partial n$ su tutte le superfici (conduttori) che delimitano lo spazio di interesse
 - Nel caso di superfici conduttrici, specificare la derivata normale del potenziale equivale a definire il campo elettrico sul conduttore
 - In ultima analisi, la densità di carica sul conduttore
 - Ancora una volta se lo spazio non è chiuso si introduce una superficie all'infinito sulla quale la derivata normale ha valore definito

Equazione di Laplace

- Teorema di unicità delle soluzioni

- Una volta fissate le condizioni al contorno la soluzione dell'equazione di Laplace che le soddisfa è unica

- Consideriamo una regione delimitata dalla superficie "esterna" S_e (eventualmente all'infinito) e da un certo numero di conduttori S_k



- I potenziali sulle superfici sono fissati dalle condizioni al contorno
- Supponiamo, per assurdo, che esistano due soluzioni distinte Φ_1 e Φ_2 dell'equazione di Laplace che assumono le stesse condizioni al contorno

$$\nabla^2 \Phi_1 = 0 \quad \nabla^2 \Phi_2 = 0$$

- Anche la funzione $\Phi_d = \Phi_1 - \Phi_2$ soddisfa l'equazione di Laplace

- L'operatore laplaciano è lineare

$$\nabla^2 \Phi_d = \nabla^2 (\Phi_1 - \Phi_2) = \nabla^2 \Phi_1 - \nabla^2 \Phi_2 = 0 - 0 = 0$$

- Inoltre sulle superfici S_k e S_e

$$\Phi_d(S_k) = \Phi_1(S_k) - \Phi_2(S_k) = \phi_k - \phi_k = 0$$

- Se Φ_d fosse non nulla avrebbe un massimo o un minimo locale: ma è armonica
 - Pertanto concludiamo che $\Phi_d = 0$ che implica a sua volta che $\Phi_1 = \Phi_2$
- La soluzione è unica

Schermo elettrostatico

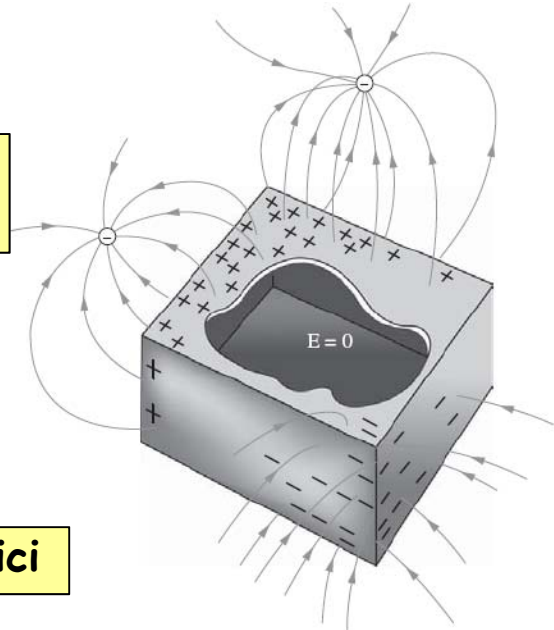
- Il teorema di unicità ci permette di trovare un'altra proprietà dei conduttori

Il potenziale all'interno di un conduttore cavo senza cariche all'interno è costante; il campo elettrico è nullo

- Abbiamo infatti già osservato che la superficie di un conduttore è una superficie equipotenziale
- Il problema elettrostatico all'interno della cavità è pertanto

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$$\phi(S) = V_0 \rightarrow \text{costante sulle superfici}$$



- Pertanto una possibile soluzione è $\phi(x,y,z) = V_0$ in tutto lo spazio della cavità
 - Infatti se $\phi(x,y,z)$ è costante $\nabla^2 \phi = 0$: soddisfa l'equazione di Laplace
 - Soddisfa le condizioni al contorno
- Il teorema di unicità mi assicura che la soluzione trovata è anche l'unica
- Lo spazio interno è schermato dai campi elettrostatici esterni
- Formulare le condizioni al contorno è normalmente molto complicato
 - La scelta di un opportuno sistema di coordinate può semplificare il problema
 - Trattiamo in maggiore dettaglio i sistemi di coordinate curvilinee

Sistemi di coordinate curvilinee

- Coordinate cartesiane (per semplicità solo due dimensioni)

- Il vettore posizione $\mathbf{r}$ è individuato da due componenti

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Le componenti cartesiane x, y

- Quali sono le componenti di un vettore applicato $\mathbf{v}$?

- Possiamo tracciare due famiglie di curve (linee)

- Fissato x facciamo variare y in $(-\infty, +\infty)$

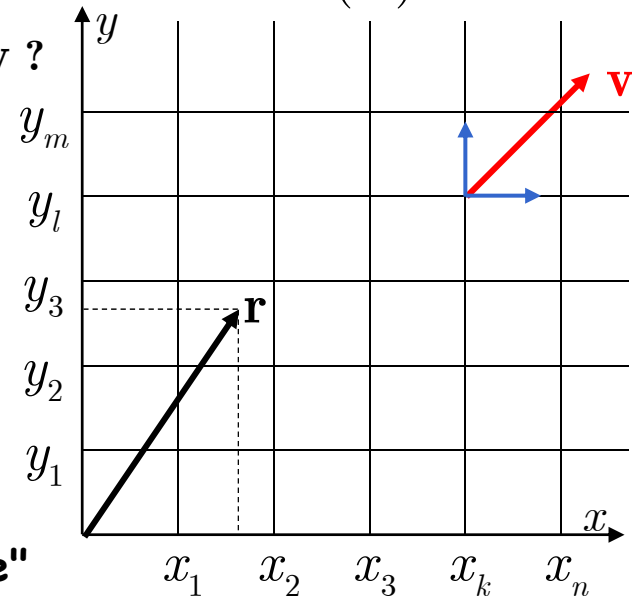
- In forma parametrica

$$\mathbf{r}_y = \begin{pmatrix} x_n \\ y \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_x = \begin{pmatrix} x \\ y_m \end{pmatrix}$$

- Analogamente fissiamo y e facciamo variare x in $(-\infty, +\infty)$

- Abbiamo ricoperto il piano con un grigliato di "curve"

- Troviamo adesso le "tangenti alle curve" nel punto di applicazione del vettore (x_k, y_l)



$$\mathbf{t}_x = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \right|_{x_k y_l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{e}}_x \quad \mathbf{t}_y = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right|_{x_k y_l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{e}}_y$$

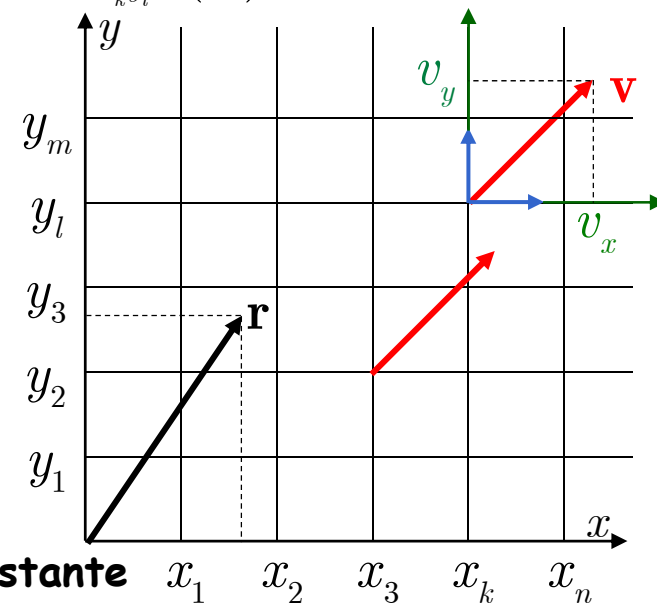
Sistemi di coordinate curvilinee

$$\mathbf{t}_x = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \right|_{x_k y_l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{e}}_x \quad \mathbf{t}_y = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right|_{x_k y_l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{e}}_y$$

- I vettori $\mathbf{t}_x$ e $\mathbf{t}_y$ sono anche dei versori
 - Come vedremo non è vero in generale
 - Definiscono localmente due assi ortogonali
 - Ricaviamo le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a questi assi
- Pertanto, in coordinate cartesiane

$$\mathbf{v}(x_k, y_l) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

- Supponiamo che $\mathbf{v}$ sia un campo vettoriale costante
 - Non cambia se ci spostiamo in un altro punto
 - Ad esempio nel punto (x_3, y_2)
- Naturalmente per un vettore costante vogliamo



$$\mathbf{v}(x_3, y_2) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

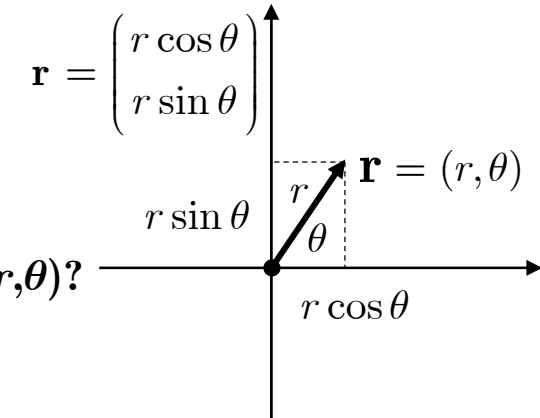
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = 0 \quad \text{in coordinate cartesiane} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0 \quad \text{e analoghe in } y$$

Sistemi di coordinate curvilinee

- Consideriamo adesso un sistema di coordinate polari

- Ripetiamo gli stessi ragionamenti
- Il vettore posizione $\mathbf{r}$ è individuato da due parametri
 - Le coordinate polari r, θ

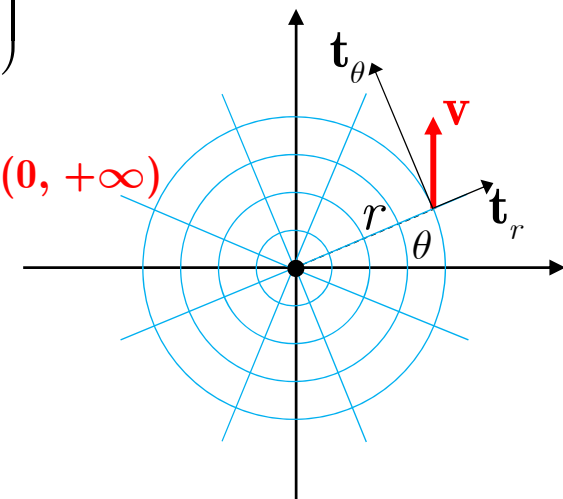
Le componenti cartesiane sono



- Se utilizziamo le coordinate polari, come sono definite le componenti?
- Quali sono le componenti di un vettore $\mathbf{v}$ applicato in (r, θ) ?
- Possiamo tracciare due famiglie di curve
 - In coordinate cartesiane le curve in rappresentazione parametrica sono

$$\mathbf{r}_\theta = r_k \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_r = r \begin{pmatrix} \cos \theta_l \\ \sin \theta_l \end{pmatrix}$$

- Fissato $r=r_k$ facciamo variare θ in $(0, 2\pi)$
- Analogamente fissiamo $\theta = \theta_l$ e facciamo variare r in $(0, +\infty)$
- Abbiamo ricoperto il piano con un grigliato di curve
 - Troviamo adesso le tangenti alle curve



$$\mathbf{t}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{t}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

Sistemi di coordinate curvilinee

$$\mathbf{t}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \mathbf{t}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

- **Calcoliamo i versori dividendo per i moduli**

- $|\mathbf{t}_r| = 1$

- $|\mathbf{t}_\theta| = r$

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\mathbf{t}_r}{|\mathbf{t}_r|} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\mathbf{t}_\theta}{|\mathbf{t}_\theta|} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

- **I versori definiscono localmente due assi ortogonali**

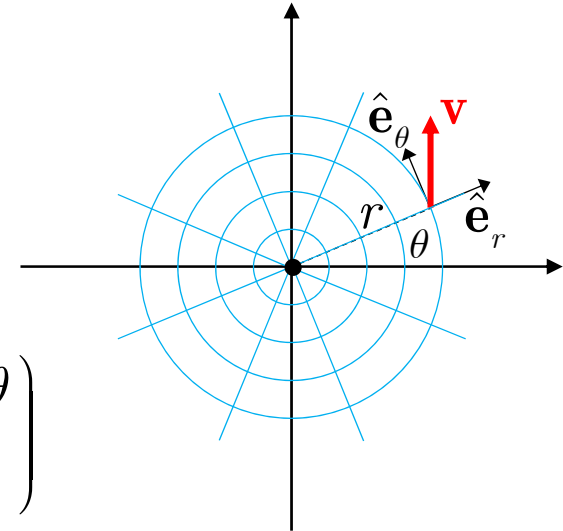
- **Le proiezioni (locali) di $\mathbf{v}$ sui due assi definiscono le componenti del vettore in coordinate polari**

- **Le componenti di $\mathbf{v}$ sono ($v = |\mathbf{v}|$)**

$$v_r = v \sin \theta$$

$$v_\theta = v \cos \theta$$

- **Attenzione: il vettore $\mathbf{v}$ è sempre lo stesso (è un vettore costante)**
- **Le sue componenti cambiano in funzione dell'angolo polare del punto di applicazione**
 - **Le componenti dipendono dal punto di applicazione!**
 - **Il caso delle coordinate cartesiane è molto particolare**



Sistemi di coordinate curvilinee

- Sottolineiamo le conseguenze del fatto che le componenti del vettore dipendono dal punto di applicazione

- Consideriamo il vettore costante in coordinate cartesiane

$$\mathbf{v}(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}(x, y) = v_x \hat{\mathbf{e}}_x + v_y \hat{\mathbf{e}}_y$$

- Si ha

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_x + v_x \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_y + v_y \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_y}{\partial x} = 0$$

- Le componenti sono costanti

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad \text{inoltre} \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_x}{\partial x} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_y}{\partial x} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_x}{\partial y} = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_y}{\partial y} = 0$$

- Nel caso del vettore costante in coordinate polari

$$v_r = v \sin \theta \quad v_\theta = v \cos \theta$$

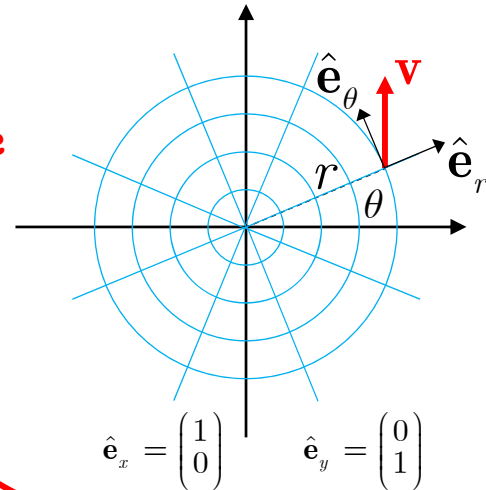
$$\mathbf{v}(r, \theta) = \hat{\mathbf{e}}_r v \sin \theta + \hat{\mathbf{e}}_\theta v \cos \theta$$

- Si ha

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} = \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_r + v_r \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + v_\theta \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = v \cos \theta \neq 0 \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = -v \sin \theta \neq 0$$

- Dobbiamo inoltre calcolare le derivate dei versori



Sistemi di coordinate curvilinee

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} = \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_r + v_r \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + v_\theta \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = v \cos \theta \neq 0 \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = -v \sin \theta \neq 0$$

- Ricordiamo i versori

- Abbiamo

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix} = -\hat{\mathbf{e}}_r$$

- Introducendo nella derivata di $\mathbf{v}$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} = v \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r + v \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta - v \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + v \cos \theta (-\hat{\mathbf{e}}_r) = 0$$

- L'altra derivata è più semplice perché non ci sono dipendenze da r $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} = 0$

- Concludiamo dicendo che in coordinate polari la variazione delle componenti di un vettore contiene anche le variazioni dovute al sistema di coordinate
 - In una legge fisica le derivate devono esprimere variazioni legate a fenomeni fisici non a effetti geometrici del sistema di coordinate
 - Per questo le leggi fisiche si enunciano utilizzando i vettori

Sistemi di coordinate curvilinee

- Generalizziamo quanto fin qui detto a un generico sistema di coordinate curvilinee

- Il passaggio da un sistema cartesiano (x_1, x_2, x_3) ad un sistema di coordinate curvilinee (u_1, u_2, u_3) è definito dalle leggi di trasformazione

$$x_1 = f_1(u_1, u_2, u_3) \quad x_2 = f_2(u_1, u_2, u_3) \quad x_3 = f_3(u_1, u_2, u_3) \quad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- Facendo variare u_k tenendo costanti le altre due coordinate u_l e u_m il punto $\mathbf{r}$ descrive una griglia di assi di coordinate curvilinee

- Lo spostamento infinitesimo è

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3$$

- Le tre derivate $\mathbf{t}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_k}$ sono i vettori tangenti alle curve degli assi coordinati

- Non sono necessariamente vettori di norma 1

- Si definiscono i tre versori $\hat{\mathbf{e}}_k = \frac{1}{h_k} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_k} \quad h_k = |\mathbf{t}_k| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_k} \right|$

- Se i tre versori sono ortogonali il sistema di coordinate è ortogonale

Sistemi di coordinate curvilinee

- L'elemento di lunghezza diventa

$$d\mathbf{r} = h_1 \hat{\mathbf{e}}_1 du_1 + h_2 \hat{\mathbf{e}}_2 du_2 + h_3 \hat{\mathbf{e}}_3 du_3$$

- Il quadrato del modulo

$$dr^2 = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} du_i du_j \quad g_{ij} = h_i h_j \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$$

- Se il sistema di coordinate curvilinee è ortogonale i versori sono ortogonali

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} \quad dr^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2$$

- L'elemento di volume si ottiene con un prodotto triplo (coordinate ortogonali)

$$dV = \mathbf{t}_1 du_1 \cdot (\mathbf{t}_2 du_2 \times \mathbf{t}_3 du_3) \quad dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$$

- Infine abbiamo visto (diapositiva [92](#)) come calcolare l'elemento di superficie vettoriale (coordinate ortogonali)

$$\begin{aligned} d\mathbf{a}_1 &= \mathbf{t}_2 \times \mathbf{t}_3 du_2 du_3 & d\mathbf{a}_2 &= \mathbf{t}_3 \times \mathbf{t}_1 du_3 du_1 & d\mathbf{a}_3 &= \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 du_1 du_2 \\ da_1 &= h_2 h_3 du_2 du_3 & da_2 &= h_3 h_1 du_3 du_1 & da_3 &= h_1 h_2 du_1 du_2 \end{aligned}$$

Sistemi di coordinate curvilinee

- Per concludere definiamo due dei più importanti sistemi di coordinate curvilinee

- Coordinate cilindriche** ($u_1 = \rho$, $u_2 = \phi$, $u_3 = z$) $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$x_1 = \rho \cos \phi \quad x_2 = \rho \sin \phi \quad x_3 = z$$

$$\mathbf{t}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \quad h_i = \|\mathbf{t}_i\| \quad \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \mathbf{t}_i$$

$$h_1 = h_\rho = 1 \quad h_2 = h_\phi = \rho \quad h_3 = h_z = 1$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{e}}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{e}}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$dr^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2$$

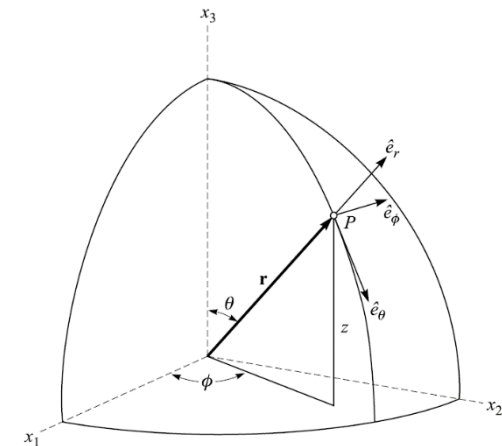
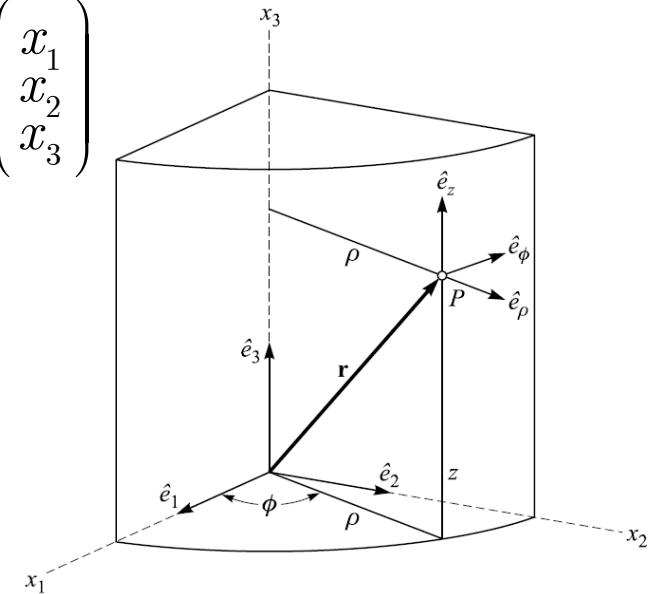
- Coordinate sferiche** ($u_1 = r$, $u_2 = \theta$, $u_3 = \phi$)

$$x_1 = r \sin \theta \cos \phi \quad x_2 = r \sin \theta \sin \phi \quad x_3 = r \cos \theta$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{e}}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_1 = h_r = 1 \quad h_2 = h_\theta = r \quad h_3 = h_\phi = r \sin \theta$$

$$dr^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$



Soluzione di equazioni differenziali

- Consideriamo una equazione molto semplice e nota

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -f(x) \quad \text{con le condizioni iniziali} \quad f(0) = 0 \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 1$$

- La soluzione a questa equazione si trova utilizzando una serie infinita

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \quad \text{per la condizione iniziale} \quad f(0) = a_0 = 0$$

- La derivata prima è

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{per la condizione iniziale} \quad f'(0) = a_1 = 1$$

- Calcoliamo infine la derivata seconda

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

- Modifichiamo la serie per rendere più esplicita la potenza di x

$$n-2 = k \quad n = k+2 \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

Soluzione di equazioni differenziali

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n$$

$$a_0 = 0 \quad a_1 = 1$$

- Scriviamo l'equazione differenziale utilizzando le due serie

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -f(x) \quad \longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- Raccogliendo i coefficienti della stessa potenza x^n

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n] x^n = 0 \quad (n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n = 0$$

$$a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}$$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2} = 0$$

vale per tutti gli indici pari

$$a_3 = -\frac{a_1}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{3!}$$

$$a_5 = -\frac{a_3}{5 \cdot 4} = \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{5!}$$

$$f(x) = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Questa serie ha un nome

$$f(x) = \sin(x)$$

Soluzione di equazioni differenziali

- Osservazioni

- Conosciamo la funzione $\sin x$ e le sue proprietà dalla trigonometria
- Si tratta di una funzione trascendente
 - Non è esprimibile tramite un numero finito di funzioni elementari
- È definita dall'equazione differenziale
 - Le sue proprietà possono essere ricavate indipendentemente dalla trigonometria
- Con una interpretazione astratta la soluzione trovata può essere vista come
 - Generalizzazione a dimensione infinita dello sviluppo di un vettore rispetto ai vettori di una base
$$\mathbf{v} = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + \dots \qquad f(x) = a_1 \mathbf{u}_1(x) + a_2 \mathbf{u}_2(x) + \dots$$
 - Le funzioni $f(x)$ sono i "vettori"
 - I monomi $u_k(x) = x^k$ sono i vettori della "base"
- Molto più che una semplice analogia
- I monomi x^k non hanno particolari proprietà
 - Si possono usare altre funzioni come base
 - Ad esempio $u_k(x) = \sin kx$ insieme a $w_k(x) = \cos kx$
 - Conducono alla serie di Fourier