
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 6 - 13.10.2022

Applicazioni della legge di Gauss

Pressione elettrostatica

Divergenza e teorema della divergenza

Forma differenziale della Legge di Gauss

Anno Accademico 2022/2023

Forza su uno strato di carica

- Consideriamo il guscio di carica sferico che abbiamo già analizzato
- Il raggio è R , la carica totale Q
 - La densità superficiale di carica
- Il campo elettrico all'interno è nullo
- All'esterno il campo elettrico è dato da

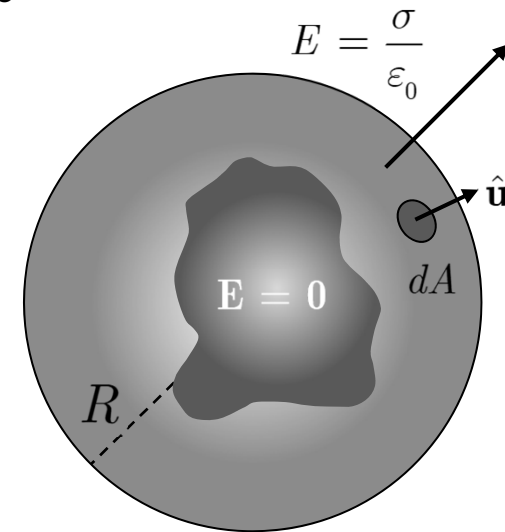
$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

- Pertanto il campo sulla superficie è

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

- Notiamo incidentalmente che sono soddisfatte le condizioni di discontinuità del campo che avevamo trovato precedentemente
- Ci chiediamo adesso quale forza si esercita su un elemento di carica della superficie
 - Un elemento di superficie infinitesimo

$$dq = \sigma dA$$



Forza su uno strato di carica

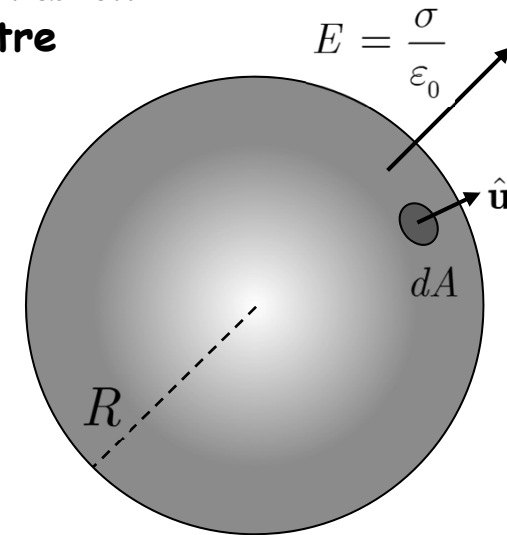
- La forza sull'elemento di carica dA deriva dall'interazione fra la carica dq e il campo generato da tutte le altre cariche
- Le cariche dell'elemento dA esercitano forze sulle cariche dell'elemento stesso ma la loro risultante è nulla
 - Conseguenza della terza legge di Newton
- Suddividiamo il campo elettrico nel punto occupato dall'elemento dA in due contributi

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_{dA} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{u}}$$

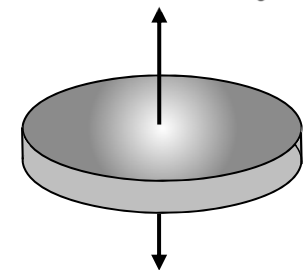
- Il campo elettrico $\mathbf{E}_s$ generato dalla sfera meno il piccolo elemento dA
- Il campo elettrico $\mathbf{E}_{dA}$ generato dall'elemento dA
- Sappiamo inoltre che un elemento circolare di carica genera sull'asse un campo perpendicolare all'elemento di carica
- Pertanto tutte le altre cariche della sfera devono generare un campo tale che la somma sia quella indicata

$$\mathbf{E}_s + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{u}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{E}_s = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{u}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{u}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{u}}$$



$$\mathbf{E}_{dA} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{u}}$$



Forza su uno strato di carica

- Pertanto la forza che viene esercitata sull'elemento dA è

$$d\mathbf{F} = dq \mathbf{E}_s = \sigma dA \mathbf{E}_s$$

- La forza per unità di superficie

$$\frac{d\mathbf{F}}{dA} = \sigma \mathbf{E}_s$$

- Sostituendo il valore trovato per $\mathbf{E}_s$

$$\frac{d\mathbf{F}}{dA} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{u}}$$

- La forza per unità di superficie è chiamata anche pressione elettrostatica

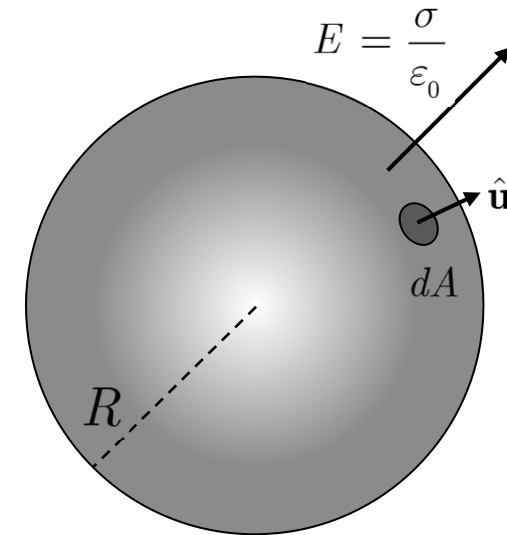
$$p = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

- Ricordiamo che il campo all'esterno è

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \longrightarrow p = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

- Sull'elemento dA c'è una forza perché all'interno la pressione è nulla mentre all'esterno è diversa da zero

$$dF = p dA = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dA$$



Divergenza di un campo vettoriale

- Introduciamo adesso un importante operatore differenziale
 - Finora abbiamo trovato delle relazioni di tipo integrale per descrivere o enunciare proprietà del campo elettrico
 - Circuitazione del campo elettrico (il campo elettrico è conservativo)
 - Legge di Gauss (il campo elettrico varia come $1/r^2$)
 - Tuttavia in fisica si usa di solito una formulazione che esprima proprietà locali dei campi
 - In un punto e nei punti infinitamente vicini
 - Proprietà delle derivate del campo
 - Equazioni differenziali per trovare i campi
- La prima legge che vogliamo esprimere in forma differenziale è la legge di Gauss
 - Ci porterà all'introduzione dell'operatore divergenza
 - Insieme alla proprietà del campo di essere esprimibile come gradiente del potenziale (campo conservativo) ci permetterà di scrivere una importantissima equazione per il potenziale

L'equazione di Laplace

- Una delle più importanti equazioni della fisica matematica

Divergenza di un campo vettoriale

- Dato che vogliamo esprimere in modo differente la legge di Gauss iniziamo esaminando il flusso del campo elettrico (o di un campo vettoriale in genere)

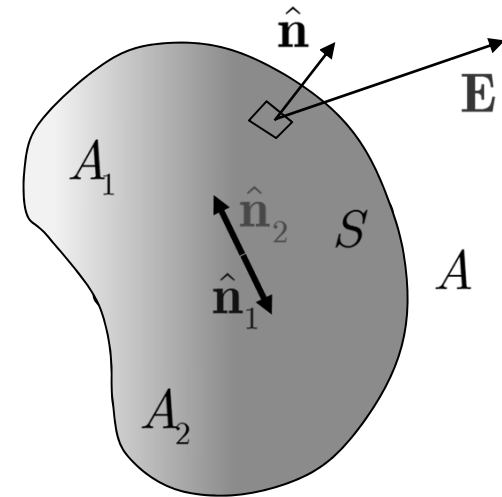
$$\Phi = \oint_A \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a}$$

- Possiamo suddividere questo integrale in due

$$\Phi = \oint_{A_1+S} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a} + \oint_{A_2+S} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a}$$

$$\Phi = \int_{A_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a} + \int_{S\downarrow} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a} + \int_{A_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a} + \int_{S\uparrow} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a}$$

- Nel primo integrale la normale $\hat{\mathbf{n}}_1$ alla superficie S è verso "il basso"
- Nel secondo integrale la normale $\hat{\mathbf{n}}_2$ alla superficie S è verso "l'alto"
- L'integrale sulla superficie S ha segno opposto nei due integrali
 - I due contributi si elidono
 - Rimangono i due integrali sulle superfici A_1 e A_2 la cui somma dà l'integrale di partenza
- Entrambi gli integrali $A+S$ calcolano il flusso attraverso una superficie chiusa

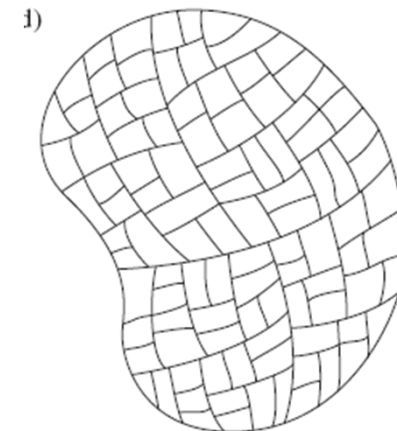
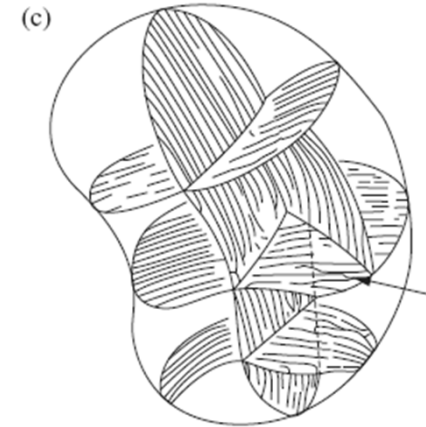


Divergenza di un campo vettoriale

- Il procedimento appena descritto può essere ripetuto
 - E ripetuto
- Nel corso della suddivisione si definiscono anche delle superfici che non hanno una parte in comune con la superficie esterna di partenza A
 - Queste superfici si elidono con quelle degli elementi confinanti
 - Anche in questo caso rimane solo il contributo della superficie "esterna" A
- Pertanto possiamo scrivere

$$\Phi = \sum_{k=1}^N \Phi_k = \sum_{k=1}^N \oint_{A_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

- Man mano che N diventa sempre più grande le superfici A_k diventano sempre più piccole (e anche il volume che esse racchiudono)
 - L'integrale sulla superficie A è una proprietà globale
 - Gli integrali su A_k , superfici sempre più piccole, diventano sempre più una proprietà locale



Divergenza di un campo vettoriale

- Tuttavia c'è un problema. Al crescere di N l'integrale del flusso esteso ad una superficie sempre più piccola tende a zero

$$\Phi_k = \oint_{A_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \sim E_k A_k$$

- Il campo E_k è un qualche valor medio del campo sulla superficie A_k
- La superficie A_k tende a zero
- Se vogliamo definire una proprietà locale occorre trovare un modo per rendere finita (e non infinitesima) questa informazione
- Un modo è definire un rapporto fra Φ_k e una quantità che tende anch'essa a zero nei limiti di grandi N
 - Risulta molto utile dividere per V_k , il volume delimitato da A_k
 - Osserviamo che la somma di tutti i volumi V_k dà il volume V delimitato dalla superficie iniziale A
- Se il limite di Φ_k / V_k esiste esso può dare informazioni locali sul campo
 - Il limite esiste e prende il nome di divergenza di un campo vettoriale

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \lim_{V_k \rightarrow 0} \frac{\Phi_k}{V_k} = \lim_{V_k \rightarrow 0} \frac{1}{V_k} \oint_{A_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

Divergenza di un campo vettoriale

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \lim_{V_k \rightarrow 0} \frac{1}{V_k} \oint_{A_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

- La divergenza di un vettore è una funzione scalare
 - Dipende dalla posizione: una funzione di x, y, z
- Il suo significato è una sorta di densità di flusso definita in un punto
- La definizione che abbiamo dato è del tutto generale
 - Non dipende da proprietà specifiche del campo elettrico
 - Può essere definita per un generico campo vettoriale

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{V_k \rightarrow 0} \frac{1}{V_k} \oint_{A_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}$$

- Così come l'abbiamo definita richiede una procedura complicata per essere calcolata
 - Fra poco definiremo un modo più semplice per definirla attraverso un operatore differenziale

Teorema della divergenza

- Utilizzando la derivazione che abbiamo fatto per introdurre la divergenza di un campo vettoriale possiamo dimostrare anche l'importante teorema della divergenza
- La parte centrale della derivazione è stata l'osservazione che il flusso può essere scritto come somma di tanti contributi elementari

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{k=1}^N \oint_{A_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

- Moltiplichiamo e dividiamo ogni termine della somma per V_k/V_k

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{k=1}^N \frac{V_k}{V_k} \oint_{A_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\sum_{k=1}^N V_k \rightarrow \int dV$$

- Nel limite di grandi N abbiamo definito

$$\text{div } \mathbf{E} = \lim_{V_k \rightarrow 0} \frac{1}{V_k} \oint_{A_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \quad \longrightarrow \quad \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \sum_{k=1}^N V_k \text{div } \mathbf{E}$$

- La somma tende ad un integrale di volume

Vale per un campo
vettoriale generico

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \text{div } \mathbf{E} dV$$

V è il volume delimitato
dalla superficie A

Legge di Gauss in forma differenziale

- Nella derivazione abbiamo fatto riferimento al flusso attraverso superfici A_k sempre più piccole

$$\Phi_k = \oint_{A_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a}$$

- Anche per queste superfici vale la legge di Gauss

$$\oint_{A_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{V_k} \rho(\mathbf{r}) dV$$

- Nel limite di grandi N , superfici e volumi sempre più piccoli, possiamo assumere che si raggiunga una situazione in cui la funzione $\rho(\mathbf{r})$ all'interno del volume V_k varia pochissimo (o addirittura non varia)
- In tal caso (con $\bar{\mathbf{r}}$ un punto interno a V_k) abbiamo

$$\int_{V_k} \rho(\mathbf{r}) dV \approx \rho(\bar{\mathbf{r}}) V_k$$
$$\oint_{A_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\bar{\mathbf{r}}) V_k \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{V_k} \oint_{A_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\bar{\mathbf{r}})$$

- E passando al limite

$$\lim_{V_k \rightarrow 0} \frac{1}{V_k} \oint_{A_k} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \lim_{V_k \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\bar{\mathbf{r}})$$

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}}$$

Forma differenziale
della legge di Gauss

Legge di Gauss in forma differenziale

- Saremmo potuti arrivare a questo risultato utilizzando il teorema della divergenza

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV$$

- Ricordiamo la legge di Gauss in forma integrale

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

- Pertanto

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

- L'uguaglianza vale per volumi V arbitrari
 - Uguagliando gli integrandi otteniamo ancora una volta la legge di Gauss in forma differenziale

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$$

La divergenza in coordinate cartesiane

- Vogliamo adesso trovare un'espressione matematica più semplice per calcolare la divergenza di un campo
- La relazione che abbiamo trovato

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \lim_{V_k \rightarrow 0} \frac{1}{V_k} \oint_{A_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}$$

- È la definizione della divergenza di un campo vettoriale
- È indipendente dal sistema di coordinate
- Calcoliamo il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie semplice: un cubo infinitesimo

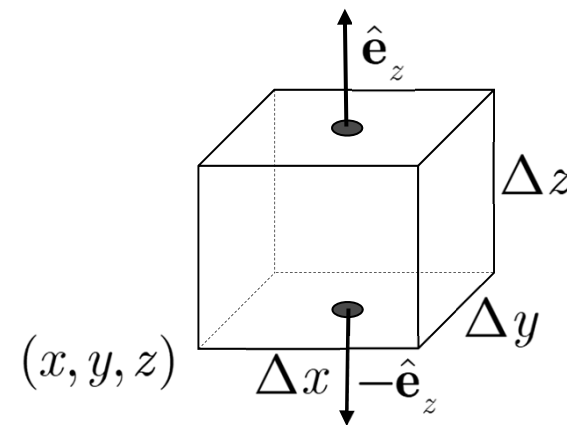
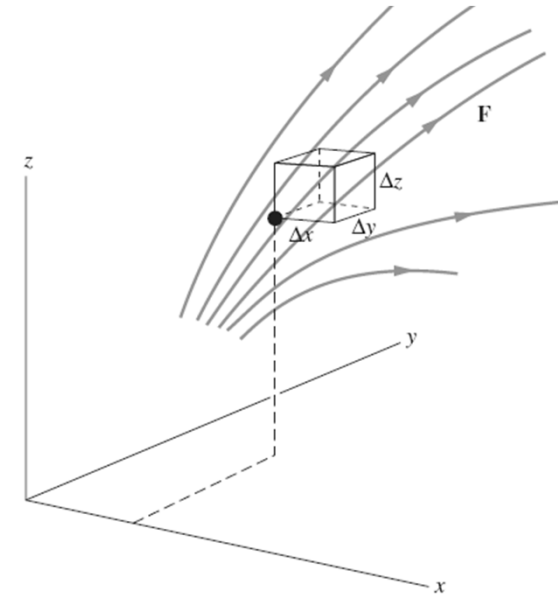
$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{e}}_x F_x + \hat{\mathbf{e}}_y F_y + \hat{\mathbf{e}}_z F_z$$

- Calcoliamo il flusso attraverso la faccia inferiore e quella superiore
- Per la superficie superiore

$$d\mathbf{a}_{\text{sup}} = \hat{\mathbf{e}}_z \Delta x \Delta y$$

- Per la superficie inferiore

$$d\mathbf{a}_{\text{inf}} = -\hat{\mathbf{e}}_z \Delta x \Delta y$$

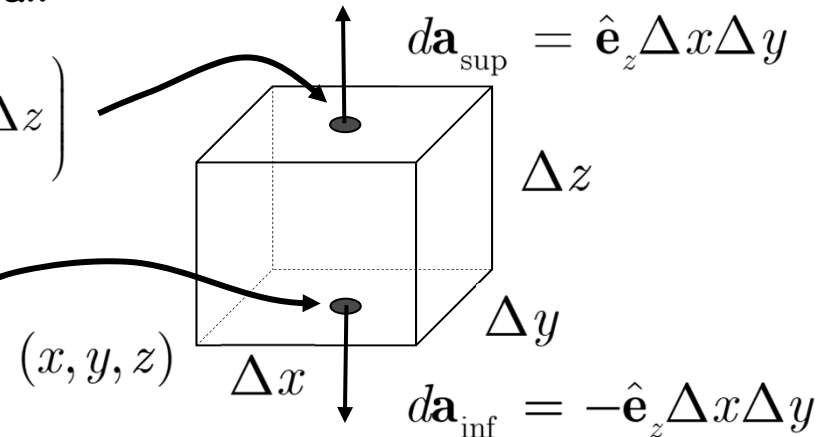


La divergenza in coordinate cartesiane

- Scriviamo le coordinate dei due punti centrali delle due facce

$$\mathbf{P}_2 = \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \Delta z \right)$$

$$\mathbf{P}_1 = \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z \right)$$



- Ricordiamo le espressioni per le aree
- I flussi attraverso le due facce sono

$$\Phi_{\text{inf}} = \mathbf{F}(\mathbf{P}_1) \cdot d\mathbf{a}_{\text{inf}} = -\mathbf{F}(\mathbf{P}_1) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \Delta x \Delta y = -F_z(\mathbf{P}_1) \Delta x \Delta y$$

$$\Phi_{\text{sup}} = \mathbf{F}(\mathbf{P}_2) \cdot d\mathbf{a}_{\text{sup}} = \mathbf{F}(\mathbf{P}_2) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \Delta x \Delta y = F_z(\mathbf{P}_2) \Delta x \Delta y$$

- Il flusso attraverso le due facce perpendicolari all'asse z è pertanto

$$\Phi_z = \Phi_{\text{sup}} + \Phi_{\text{inf}} = F_z(\mathbf{P}_2) \Delta x \Delta y - F_z(\mathbf{P}_1) \Delta x \Delta y$$

$$\Phi_z = [F_z(\mathbf{P}_2) - F_z(\mathbf{P}_1)] \Delta x \Delta y$$

La divergenza in coordinate cartesiane

- Calcoliamo F_z nei punti P_1 e P_2

$$F_z(P_1) = F_z\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z\right) \approx F_z(x, y, z) + \frac{\partial F_z}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial F_z}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}$$

$$F_z(P_2) = F_z\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}, z + \Delta z\right) \approx F_z(x, y, z) + \frac{\partial F_z}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial F_z}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta z$$

- E finalmente

$$\left[F_z(P_2) - F_z(P_1) \right] = \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta z \quad \boxed{\Phi_z = \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z}$$

- Analogamente si trova per le altre due coppie di facce

$$\Phi_x = \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \quad \Phi_y = \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

- Il flusso attraverso e sei facce del cubetto

$$\Phi = \Phi_x + \Phi_y + \Phi_z = \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

La divergenza in coordinate cartesiane

$$\Phi = \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z$$

- Notiamo che il flusso è proporzionale al volume del cubetto $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$
- Possiamo finalmente calcolare la divergenza

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \lim_{V_k \rightarrow 0} \frac{1}{V_k} \oint_{A_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Phi}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] \frac{\Delta V}{\Delta V} \\ &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}}$$

La divergenza con l'operatore ∇

- Ricordiamo l'operatore "Nabla"

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

- Ricordiamo anche l'espressione appena trovata

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

- Si può pertanto esprimere la divergenza come prodotto scalare fra l'operatore "Nabla" e il vettore $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{e}}_x F_x + \hat{\mathbf{e}}_y F_y + \hat{\mathbf{e}}_z F_z$$

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$$

- La legge di Gauss in questa notazione

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

Esempio

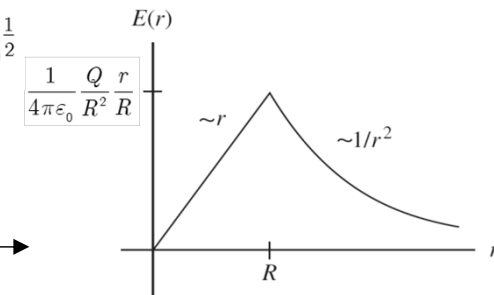
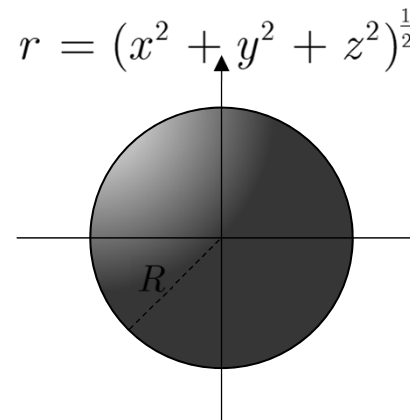
- Verifichiamo la legge di Gauss in forma differenziale per un problema che abbiamo risolto
- Iniziamo con il caso $r > R$

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left[x (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \right]$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} - \frac{3}{2} x (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} 2x \right]$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \left[1 - 3x^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-1} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[1 - \frac{3x^2}{r^2} \right]$$



$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \frac{\mathbf{r}}{R} \quad r < R$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad r \geq R$$

- Analogamente per le altre derivate

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[1 - \frac{3y^2}{r^2} \right] \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[1 - \frac{3z^2}{r^2} \right]$$

Esempio

- Otteniamo pertanto

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[1 - \frac{3x^2}{r^2} + 1 - \frac{3y^2}{r^2} + 1 - \frac{3z^2}{r^2} \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[3 - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^2} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3 - 3] = 0\end{aligned}$$

- Veniamo al caso $r < R$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \frac{\mathbf{r}}{R}$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \frac{x}{R} \quad E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \frac{y}{R} \quad E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \frac{z}{R}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3 \epsilon_0} \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 V} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Altro esempio

- Illustrazione del teorema della divergenza applicato al campo $\mathbf{F} = \mathbf{r}$

- Una relazione "inutile" ma divertente e istruttiva

$$\oint_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV \longrightarrow \oint_A \mathbf{r} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{r} dV$$

- Scegliamo come volume e superficie quelli di una sfera di raggio R con centro nell'origine degli assi
- Calcoliamo l'integrale di superficie

- Sappiamo che l'elemento di superficie sulla sfera è (v. diapositiva 96)

$$da = R^2 d\phi \sin \theta d\theta \hat{\mathbf{r}} \quad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\oint_A \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \left[\mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right]_{r=R} R^2 \sin \theta d\theta = R^3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi R^3$$

- Calcoliamo la divergenza di $\mathbf{r}$ $\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$
- L'integrale di volume è

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{r} dV = 3 \int_V dV = 3V \quad \text{Naturalmente } V \text{ è il volume della sfera}$$

- In conclusione $4\pi R^3 = 3V \longrightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Energia del campo elettrostatico

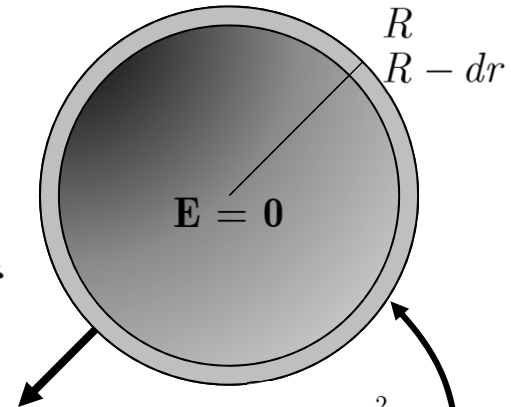
- Consideriamo ancora una volta un guscio sferico di carica Q e raggio R

- Ricordiamo i risultati trovati

- La densità di carica è σ
- Il campo all'interno è nullo
- All'esterno ($r > R$) il campo è quello di una carica puntiforme nell'origine
- Sulla carica del guscio si esercita una pressione p verso l'esterno

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}$$



$$p = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

- Supponiamo adesso di comprimere uniformemente il guscio portando il suo raggio da R a $R - dr$
- Se dr è infinitesimo la densità cambia di poco

$$\sigma' = \frac{Q}{4\pi(R - dr)^2} \approx \frac{Q}{4\pi(R^2 - 2Rdr + \dots)} = \frac{Q}{4\pi R^2 \left(1 - 2\frac{dr}{R}\right)} = \sigma \left(1 + 2\frac{dr}{R}\right)$$

- Per comprimere bisogna fare un lavoro contro la forza, diretta verso l'esterno, dovuta alla pressione

$$F = p \cdot S = p4\pi R^2 \quad dW = Fdr \quad dW = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} 4\pi R^2 dr \quad dW = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dV$$

- Osserviamo che la variazione di σ modificherebbe

dW di un termine proporzionale a dr^2 che può essere trascurato

Energia del campo elettrostatico

- Osserviamo che le uniche variazioni nel sistema sono

- Una variazione della densità di carica σ che consideriamo trascurabile

- L'apparizione di un campo elettrico nella regione $R-dr \leftrightarrow R$ che a causa della compressione è diventata esterna

- All'interno $E = 0$

- All'esterno, per $r > R$ il campo è invariato

- È sempre il campo di una carica Q nell'origine

- Una variazione dell'energia del sistema

$$dU = dW \quad dU = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dV$$

- L'energia dU può essere pensata come

- Aumento dell'energia del sistema di cariche

- Oppure energia del campo elettrico creato nella regione $R-dr \leftrightarrow R$

$$dU = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dV \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

$$dU = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV$$

- Al campo elettrico è associata una densità di energia

- Analisi dimensionale

$$\rho_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

$$[E] = NQ^{-1} \quad [\epsilon_0 E] = QL^{-2} \quad [\epsilon_0 EE] = NL^{-2} = NLL^{-3} = JL^{-3}$$

