
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 5 - 12.10.2022

Legge di Gauss
Angolo solido
Applicazioni della legge di Gauss

Anno Accademico 2022/2023

La Legge di Gauss

- Possiamo adesso ritornare alla Legge di Gauss
 - Legge di Gauss stabilisce un legame fra il campo elettrico e le sue sorgenti
 - Notiamo che anche la Legge di Coulomb stabilisce un legame fra la forza e la carica
 - Ricordiamo che il campo elettrico è la forza esercitata per unità di carica
- La Legge di Gauss stabilisce che

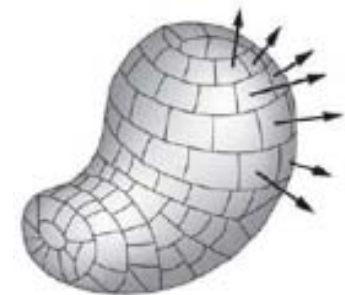
Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma algebrica di tutte le cariche contenute all'interno della superficie divisa per ϵ_0

- Una importante precisazione
 - Con una superficie chiusa lo spazio viene diviso in una parte interna alla superficie e una esterna
 - Per convenzione la normale alla superficie è diretta verso l'esterno

- Legge di Gauss in forma matematica

$$\oint_A \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad Q = \sum_{j=1}^N q_j$$

- Il simbolo $\oint_A$ indica integrale esteso alla superficie chiusa A



La Legge di Gauss

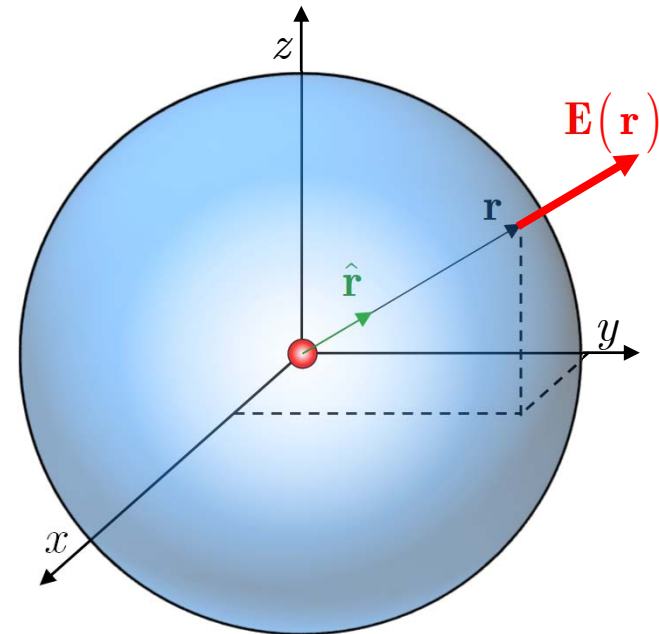
- Se le cariche non sono puntiformi ma sono descritte da opportune densità di carica allora si sostituisce alla somma un integrale di volume

$$Q = \sum_{j=1}^N q_j \quad \longrightarrow \quad Q = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \quad \longrightarrow \quad \oint_A \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

- L'integrale di volume è esteso a tutto il volume V contenuto all'interno della superficie chiusa A sulla quale è stato calcolato il flusso
- Verifichiamo la Legge di Gauss nel semplice caso in cui il campo elettrico sia generato da una carica puntiforme

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

- Calcoliamo il flusso attraverso una superficie sferica di raggio r e centrata nell'origine
 - Il campo è perpendicolare alla superficie per ogni direzione di $\mathbf{r}$



La Legge di Gauss

- Consideriamo un elemento di superficie in coordinate sferiche

$$da = r \sin \theta d\phi r d\theta \quad da = r^2 \sin \theta d\phi d\theta \quad da = da \hat{\mathbf{r}}$$

- Il campo elettrico sull'elemento di superficie è

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

- Il contributo elementare al flusso è

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = E da = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} r^2 \sin \theta d\phi d\theta$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} r^2 \sin \theta d\phi d\theta = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta$$

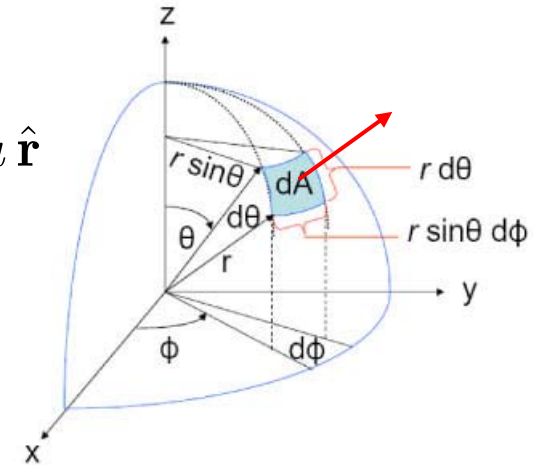
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \left[-\cos \theta \right]_0^\pi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} 2\pi [-1 - 1] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Indipendente dal raggio r

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

- Hanno giocato un ruolo fondamentale

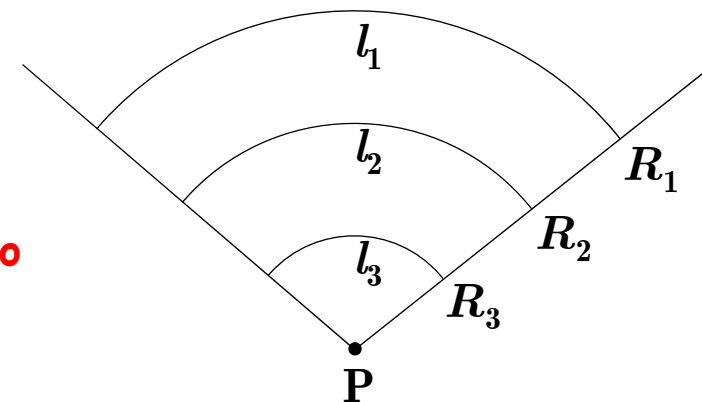
- La dipendenza di $\mathbf{E}$ da $1/r^2$
- La dipendenza di da da r^2



La Legge di Gauss

- Abbiamo visto che il flusso del campo elettrico di una carica attraverso una superficie chiusa sferica è uguale a
 - **Inoltre è** indipendente dal raggio **della sfera**
- In realtà c'è una condizione ancora più forte
 - **È** indipendente dalla forma **della superficie chiusa**
- Per convincerci di questo conviene fare preliminarmente una digressione sull'angolo solido
- Per meglio capire il concetto, iniziamo dall'angolo piano
 - **Consideriamo un punto P sul piano**
 - **Un angolo piano è la regione del piano** delimitata da due ... **originanti da P**
 - Due cosa?
 - Due semirette
 - La "misura" dell'angolo piano è data dal rapporto fra lunghezza di un arco e il raggio dell'arco
 - **È un numero** adimensionale
 - La "misura" dell'angolo è indipendente da R
- L'angolo completo misura 2π
 - **Rapporto fra la circonferenza e il raggio**

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$



$$\alpha = \frac{l_1}{R_1} = \frac{l_2}{R_2} = \frac{l_3}{R_3}$$

L'angolo piano

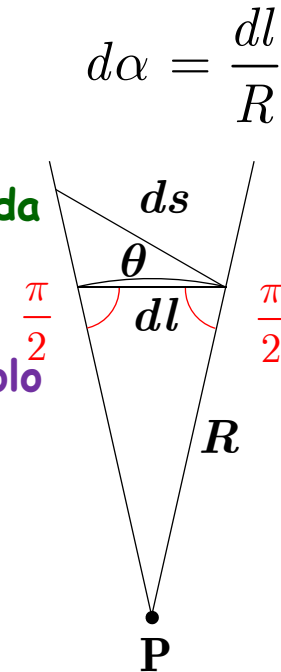
- Consideriamo adesso un angolo infinitesimo
 - dl è un arco di circonferenza infinitesimo
- Invece di dl consideriamo un segmento arbitrario ds compreso fra le semirette
 - Dato che dl è infinitesimo
 - La lunghezza di dl coincide con la lunghezza della corda
 - Gli angoli fra i raggi e la corda sono retti a meno di un angolo infinitesimo $d\alpha/2$
 - Il segmento ds è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo
- Proiettiamo ds sulla circonferenza

$$ds \cos \theta = dl$$

- La misura dell'angolo è

$$d\alpha = \frac{dl}{R} = \frac{ds \cos \theta}{R}$$

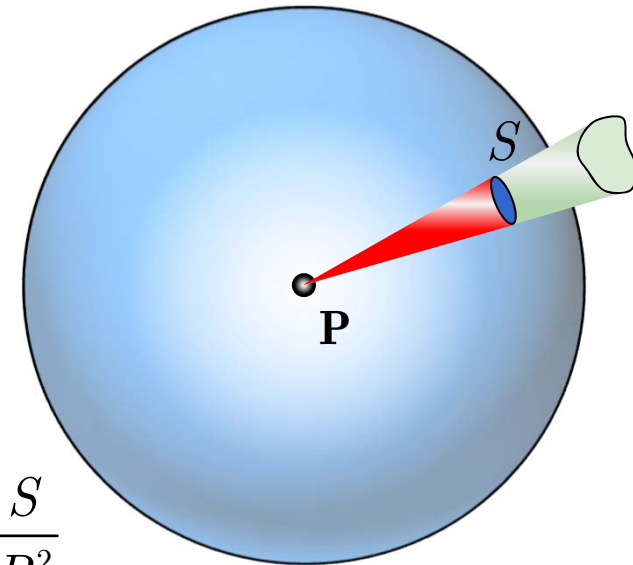
- Si può calcolare la misura dell'angolo
 - Con la lunghezza dell'arco dl
 - Con la lunghezza di un segmento arbitrario ds proiettata sull'arco
- Si dice anche che il segmento ds (o l'arco dl) sottende un angolo $d\alpha$



L'angolo solido

- L'angolo solido è la generalizzazione nello spazio dei concetti precedenti relativi all'angolo piano
 - Un angolo solido è la regione dello spazio delimitata da una superficie generata da un fascio di semirette originante da P
 - Abbiamo disegnato un cono ma la forma potrebbe essere arbitraria
 - Nel caso piano erano due semirette
- Per definire una misura dell'angolo solido consideriamo una sfera di raggio R centrata in P
 - La superficie (il "cono") interseca la sfera e vi definisce una superficie S
 - Nel caso piano avevamo un arco
- La misura dell'angolo solido è il rapporto fra
 - La superficie intersecata sulla sfera
 - Il quadrato del raggio della sfera
 - La "misura" dell'angolo è indipendente da R
- L'angolo completo misura 4π
 - Rapporto fra la superficie della sfera e il quadrato del raggio R
- Si dice anche che una superficie sottende un angolo solido

$$\Omega = \frac{S}{R^2}$$



Angolo solido

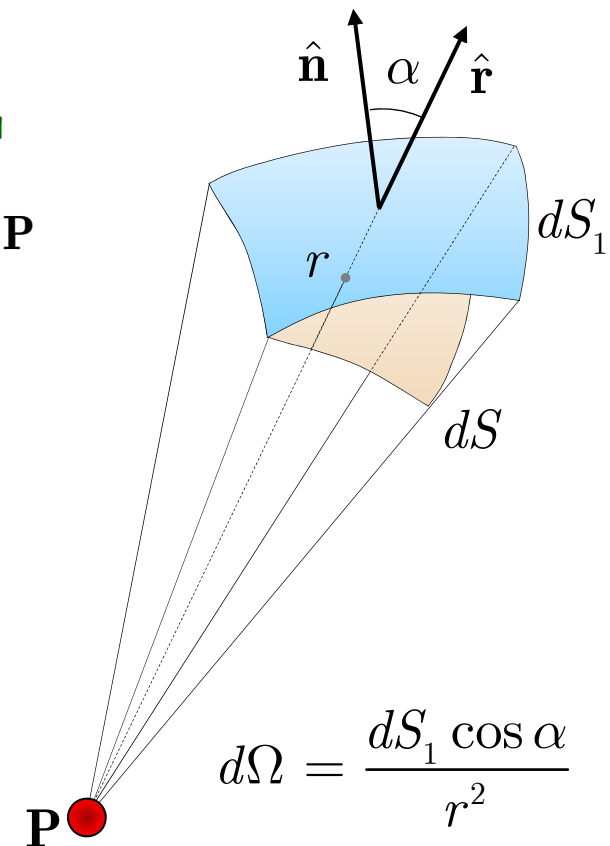
- Analizziamo in maggiore dettaglio il caso in cui la superficie di cui vogliamo calcolare l'angolo solido rispetto al punto P non sia una parte di una sfera
 - Stiamo considerando una superficie infinitesima dS_1
 - Possiamo costruire una superficie, una sorta di cono, unendo i punti del contorno della superficie dS_1 con il punto P
 - In questo modo individuiamo una superficie dS su una sfera di raggio r
 - La superficie S si trova ad una distanza r da P

- L'angolo solido sotteso da dS è

$$d\Omega = \frac{dS}{r^2}$$

- L'angolo solido sotteso da dS_1 è lo stesso
 - Ha la stessa misura
- Consideriamo le normali alle superfici
 - Se α è l'angolo fra le normali alle due superfici si avrà

$$dS = dS_1 \cos \alpha = dS_1 \hat{n} \cdot \hat{r}$$



La legge di Gauss

- Siamo adesso in grado di comprendere come il flusso attraverso una superficie chiusa non dipenda dalla forma particolare della superficie
- Consideriamo una superficie chiusa arbitraria che racchiude una carica puntiforme
 - Suddividiamola in tante superfici infinitesime dS_1
 - Il flusso attraverso ogni superficie è

$$d\Phi = \mathbf{E}(r) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS_1 = E(r) dS_1 \cos \theta$$

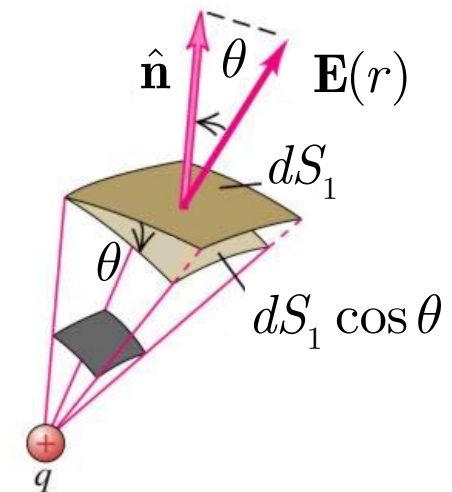
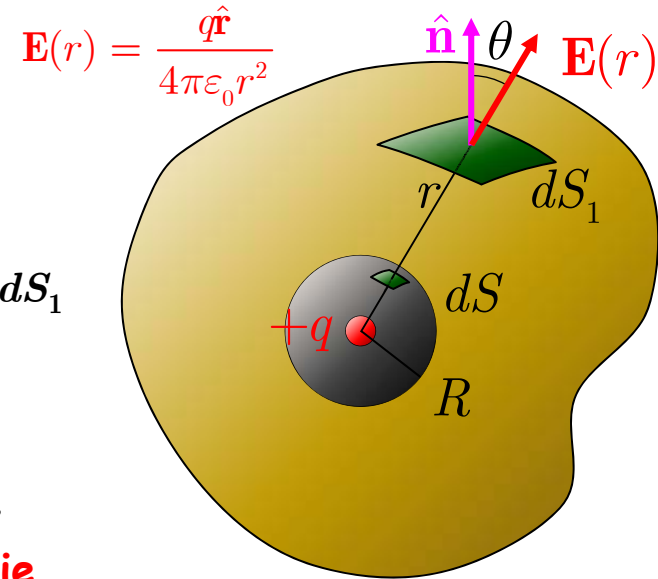
- La superficie dS_1 , che si trova ad un raggio r sottende lo stesso angolo solido della superficie dS che si trova sulla sfera di raggio R

$$\frac{dS_1 \cos \theta}{r^2} = \frac{dS}{R^2} \quad dS_1 \cos \theta = \frac{r^2}{R^2} dS$$

$$d\Phi = E(r) \frac{r^2}{R^2} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \frac{r^2}{R^2} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} dS$$

- Ci siamo pertanto riportati al calcolo del flusso sulla sfera di raggio R

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$



Legge di Gauss

- Fino ad ora abbiamo considerato il flusso di una singola carica puntiforme
 - Tutte le leggi e le operazioni matematiche utilizzate sono lineari
 - Vale il principio di sovrapposizione
 - Un campo generato da un sistema di cariche più complicato può pertanto essere visto come somma di più campi generati ciascuno da una carica puntiforme
 - Si possono calcolare separatamente i flussi delle singole cariche contenute all'interno della superficie

$$\Phi_i = \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

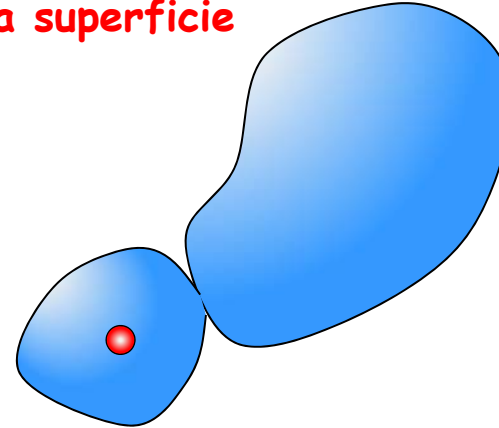
- Il flusso totale è uguale alla somma dei singoli flussi

$$\Phi = \sum_{i=1,N} \Phi_i = \frac{\sum_{i=1,N} q_i}{\epsilon_0}$$

Legge di Gauss

- Cosa succede se la carica è esterna alla superficie?
 - Possiamo considerare un problema simile con una superficie come indicato in figura
 - L'unione fra le due superfici è piccolissima
- Abbiamo appena visto che il flusso è indipendente dalla forma della superficie

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$



- Possiamo inoltre suddividere il flusso nei flussi attraverso due superfici

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

- La "strozzatura" può essere resa piccola, trascurabile
- Se chiamiamo Φ_1 il flusso attraverso la superficie che contiene la carica avremo

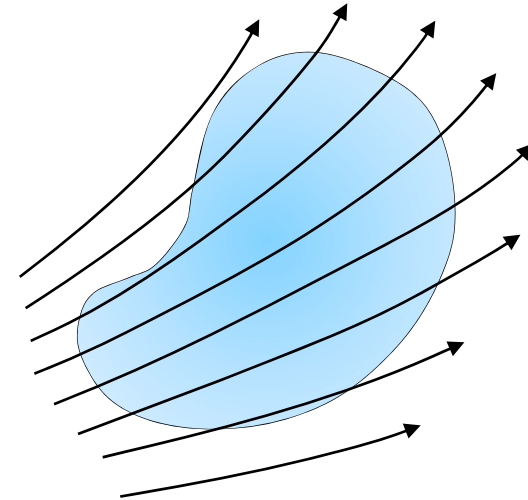
$$\Phi_1 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\frac{q}{\epsilon_0} + \Phi_2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_2 = 0$$

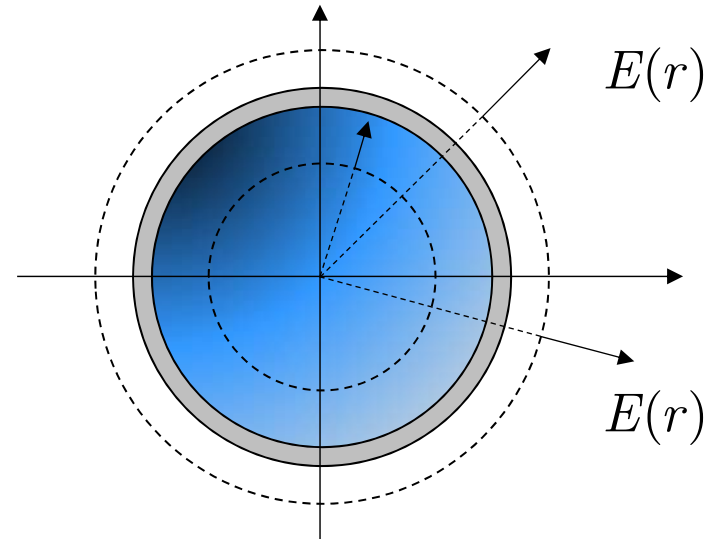
Legge di Gauss

- Pertanto l'enunciato della legge di Gauss vale anche quando la superficie chiusa non contiene cariche
 - Se all'interno della superficie non ci sono cariche il flusso totale è nullo
 - Significa che il contributo negativo al flusso è uguale al contributo positivo
- Il contributo al flusso è positivo quando l'angolo fra $\mathbf{E}$ e la normale è inferiore a $\pi/2$
- Il contributo al flusso è negativo quando l'angolo fra $\mathbf{E}$ e la normale è superiore a $\pi/2$



Campo di un guscio sferico cavo

- Abbiamo già calcolato mediante un calcolo diretto il campo elettrico all'interno di un guscio sferico di carica Q e raggio R
- La legge di Gauss permette di calcolare in modo molto semplice il campo elettrico sia all'interno che all'esterno del guscio
- Tuttavia è indispensabile utilizzare argomenti di simmetria per stabilire:
 - La direzione del campo elettrico
 - Proprietà del modulo del campo elettrico
- Nel problema in esame affermiamo che sia all'interno che all'esterno del guscio il campo elettrico deve essere diretto lungo un raggio
 - Qualsiasi altra direzione violerebbe l'isotropia dello spazio
 - La distribuzione di carica in esame ha una simmetria sferica
- Inoltre ha lo stesso modulo su tutti i punti che giacciono su una sfera di raggio r concentrica con il guscio sferico



Campo di un guscio sferico cavo

- Consideriamo a questo punto una superficie sferica di raggio $r < R$ (interna al guscio)

- Il flusso del campo elettrico è

$$\Phi = E(r) \times 4\pi r^2$$

- La legge di Gauss ci dice che

$$\Phi = q / \varepsilon_0$$

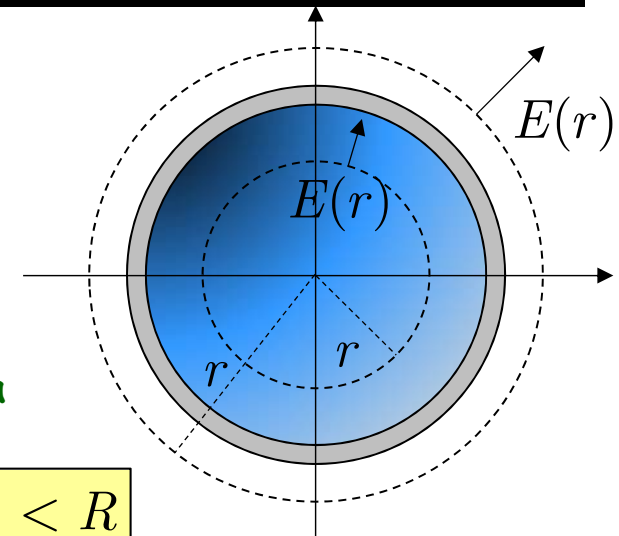
- Non c'è carica all'interno della superficie sferica

- Pertanto concludiamo che

$$E(r) \times 4\pi r^2 = 0$$



$$E(r) = 0 \quad r < R$$



- Consideriamo a questo punto una superficie sferica di raggio $r > R$

- Abbiamo la stessa espressione per il flusso

- All'interno della superficie c'è la carica totale del guscio Q

$$\Phi = E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

- Otteniamo

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad r > R$$

- Notiamo che è uguale al campo di una carica puntiforme Q nell'origine

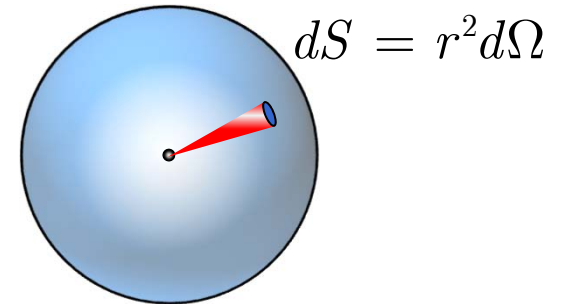
Ancora sul guscio sferico cavo

- Possiamo utilizzare l'esempio del guscio sferico cavo per approfondire ulteriormente

- Le implicazioni della dipendenza del campo da $1/r^2$

- Il concetto di angolo solido

- Per definizione un angolo solido sottende, a distanza r , una superficie $dS = r^2 d\Omega$



- La superficie sulla sfera di raggio r

- Consideriamo adesso un guscio sferico di carica Q cavo e un punto arbitrario P al suo interno

- La superficie del guscio può essere suddivisa in tante coppie costruite mediante coni con la stessa apertura

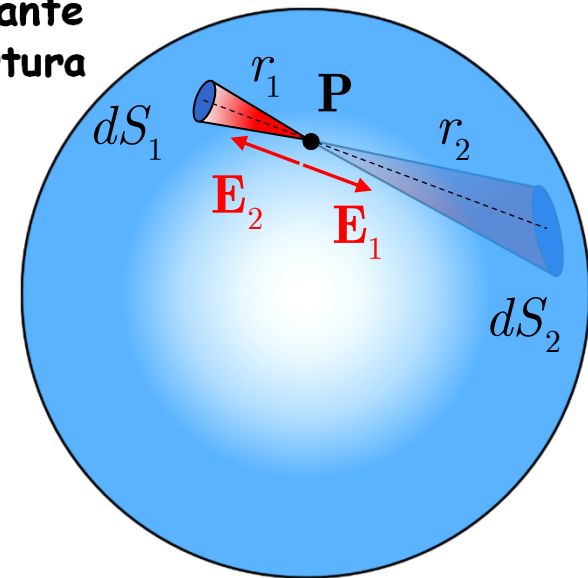
- Sottolineiamo che il punto P non è il centro della sfera

- Le due superfici individuate sulla sfera siano dS_1 e dS_2

- Le distanze da P siano r_1 e r_2 rispettivamente

- Dimostriamo adesso che i campi elettrici in P generati dai due elementi di carica si elidono

- È evidentemente che puntano in direzioni opposte



Ancora sul guscio sferico cavo

- Dobbiamo pertanto dimostrare che hanno lo stesso modulo

- I due campi sono generati da cariche differenti poste a distanze differenti da P

- Le cariche dei due elementi sono

$$dq_1 = \sigma dS_1 \quad dq_2 = \sigma dS_2 \quad \frac{dq_1}{r_1^2} = \frac{dq_2}{r_2^2} \Rightarrow \frac{dq_1}{dq_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

- Vogliamo dimostrare che

- Consideriamo la proiezione della sfera

- Le due superfici dS_1 e dS_2 sono entrambe normali ai raggi che originano dal centro del guscio C

- Tracciamo due elementi di superficie sferiche centrate sul punto P: dS'_1 e dS'_2

- Sono perpendicolari alla corda AB, asse dei due coni

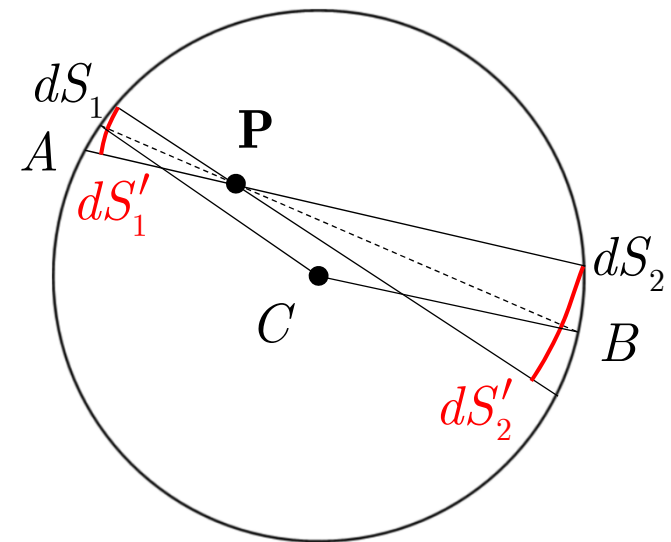
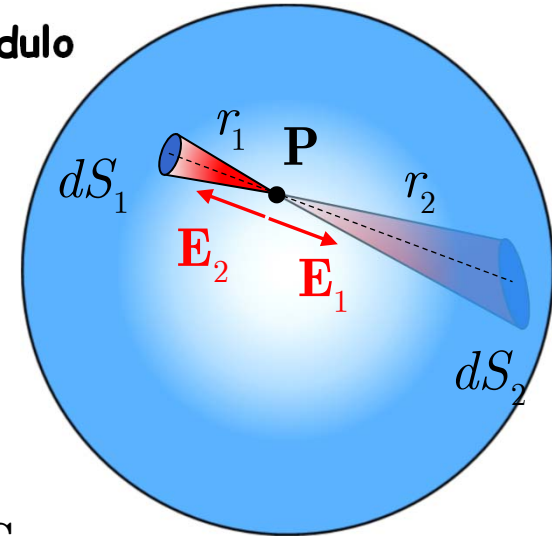
- Per la definizione di angolo solido

$$dS'_1 = r_1^2 d\Omega \quad dS'_2 = r_2^2 d\Omega$$

- Inoltre il triangolo ABC è isoscele

- Gli angoli alla base sono uguali

$$\hat{CAB} = \hat{CBA} = \beta$$



Ancora sul guscio sferico cavo

- Dato che gli angoli alla base sono uguali abbiamo

$$dS'_1 = dS_1 \cos \beta \quad dS'_2 = dS_2 \cos \beta$$

- Riepiloghiamo le altre relazioni trovate

$$dq_1 = \sigma dS_1 \quad dq_2 = \sigma dS_2$$

$$dS'_1 = r_1^2 d\Omega \quad dS'_2 = r_2^2 d\Omega$$

- Abbiamo pertanto

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{dS_1}{dS_2} = \frac{dS_1 \cos \beta}{dS_2 \cos \beta} = \frac{dS'_1}{dS'_2} = \frac{r_1^2 d\Omega}{r_2^2 d\Omega} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

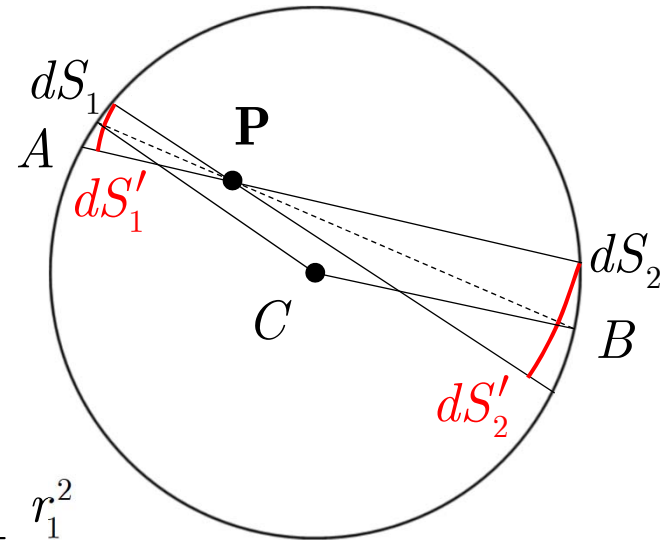
- Calcoliamo il rapporto dei moduli dei campi elettrici

$$E_1 = k \frac{dq_1}{r_1^2} \quad E_2 = k \frac{dq_2}{r_2^2} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{dq_1}{dq_2} \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{r_2^2}{r_1^2} = 1$$

- Pertanto i due campi hanno lo stesso modulo e direzione opposta

- La somma è nulla

$$\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0$$

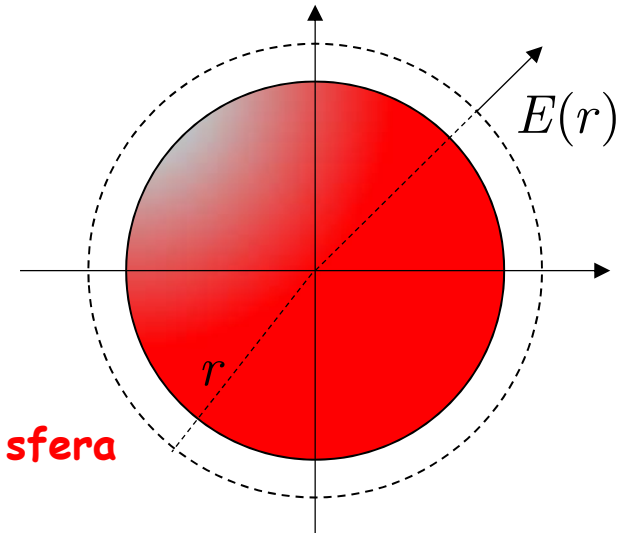


Campo di una sfera di carica

- Consideriamo adesso il campo elettrico generato da una sfera di carica

- La carica totale è Q , il raggio è R
- La sfera ha una densità di carica uniforme

$$\rho_0 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$



- Osserviamo che anche questo problema ha una simmetria sferica
 - Il campo è sempre radiale rispetto al centro della sfera
 - Il modulo del campo ad una distanza r è costante
- Consideriamo una superficie sferica di raggio $r > R$, esterna alla sfera carica
 - È la stessa condizione dell'esempio precedente
 - La carica dentro la sfera è Q
- Abbiamo pertanto

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad r > R$$

- Anche in questo caso è lo stesso campo di una carica puntiforme Q posta nell'origine

Campo di una sfera di carica

- Consideriamo adesso una sfera di raggio $r < R$, interna alla sfera carica

- La carica all'interno della sfera non è nulla
 - Inoltre è solo una parte della carica totale Q
- La carica all'interno della sfera è

$$q = \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3 = Q \frac{r^3}{R^3}$$

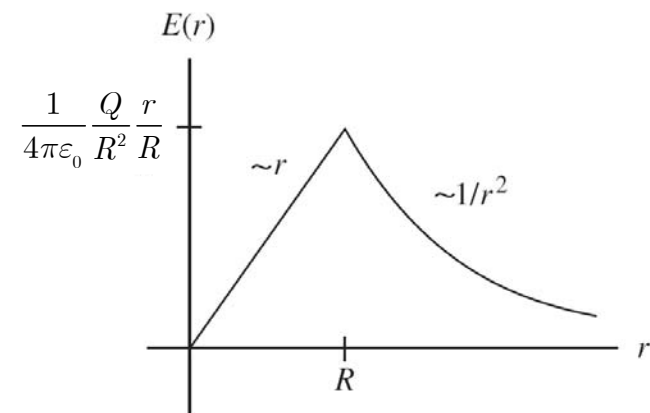
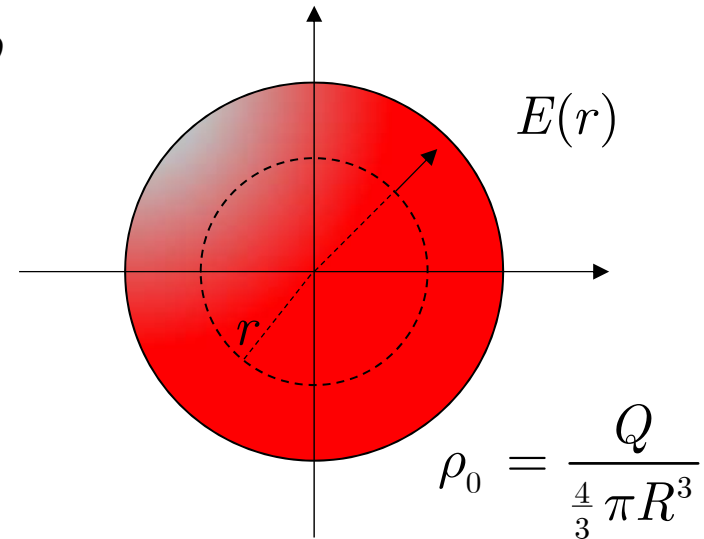
- Applichiamo la legge di Gauss

$$\Phi = E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} Q \frac{r^3}{R^3}$$

- Ricaviamo $E(r)$

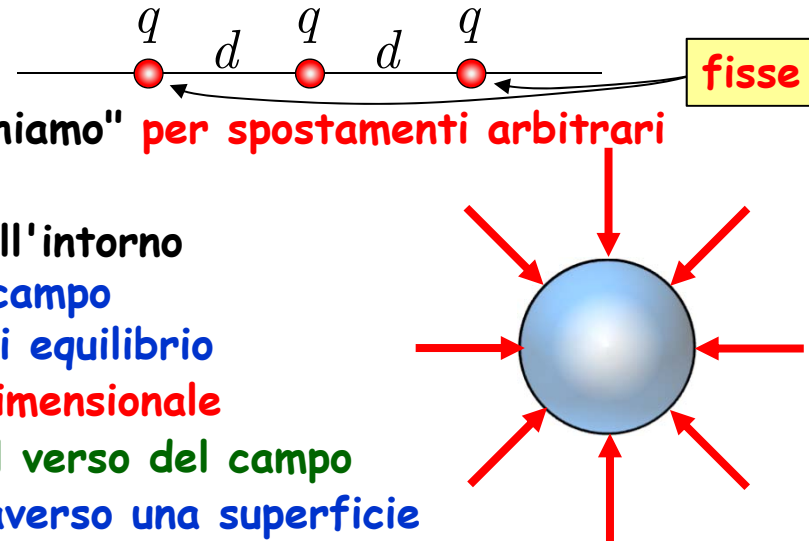
$$E(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{1}{\epsilon_0} Q \frac{r^3}{R^3} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\epsilon_0} Q \frac{r}{R^3}$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \frac{r}{R}$$



Equilibrio in campo elettrostatico

- La legge di Gauss permette anche di trarre un'importante conclusione riguardo la possibilità di costruire un campo elettrostatico che abbia una posizione di equilibrio stabile in un punto dove non ci sono cariche elettriche
 - È essenziale la precisazione "dove non ci sono cariche elettriche"
- Una posizione di equilibrio stabile implica che la forza su una carica sia nulla
 - Questo è possibile
 - Deve anche esserci una "forza di richiamo" per spostamenti arbitrari
 - In tutte le direzioni possibili
- Per una carica positiva significa che nell'intorno di una posizione di equilibrio stabile il campo elettrico punta sempre verso il punto di equilibrio
 - In tutte le direzioni nello spazio tridimensionale
 - Per una carica negativa si inverte il verso del campo
- Possiamo allora calcolare il flusso attraverso una superficie
 - Il flusso sarebbe diverso da zero
 - Nella posizione di equilibrio ci sarebbe una carica



$$\Phi = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \neq 0$$

Pertanto la legge di Gauss implica che non ci possano essere posizioni di equilibrio stabile dove non ci sono cariche elettriche

Discontinuità del campo elettrico

- Il campo elettrico è discontinuo quando si attraversa una superficie con densità di carica σ

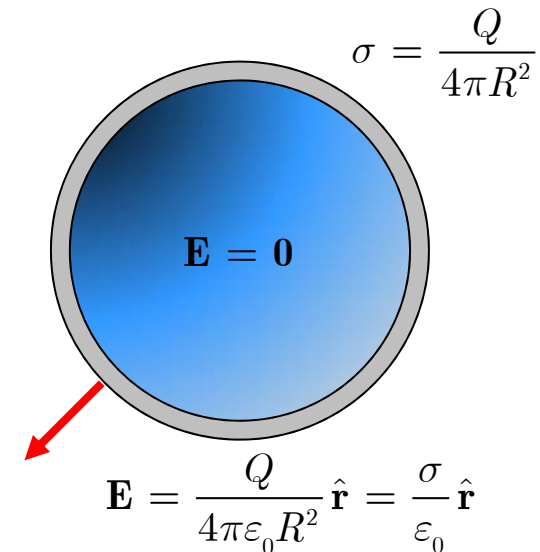
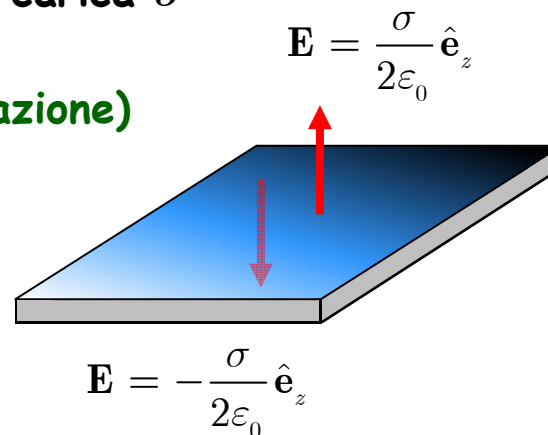
- Abbiamo visto due esempi

- Un piano infinito (esercitazione)

- Un guscio sferico cavo

- All'interno $E = 0$

- Sulla superficie ...



- In entrambi i casi la variazione della componente normale è

$$\Delta E_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

- La componente tangenziale è la stessa da entrambe le parti della superficie carica $E_{\parallel} = 0$

$$\Delta E_{\parallel} = 0$$

- Si tratta di proprietà generali

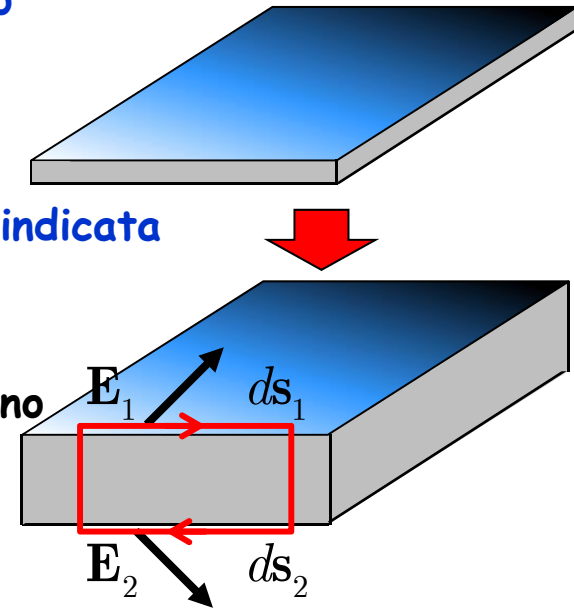
- Non limitate agli esempi trattati o alla densità uniforme

Discontinuità del campo elettrico

- Esaminiamo in maggiore dettaglio questo ultimo punto
 - Consideriamo un piano di carica molto sottile
 - Non necessariamente uniforme
 - Esaminiamolo in maggiore dettaglio localmente
- Consideriamo la circuitazione di $\mathbf{E}$ nella linea chiusa indicata

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

- Non è detto che il campo sia perpendicolare al piano
- Le lunghezze delle linee rosse verticali sono trascurabili rispetto a quelle orizzontali
- Le linee orizzontali sono vicinissime al piano e a esso parallele



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \approx \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{s}_2 = E_{\parallel 1} ds - E_{\parallel 2} ds = (E_{\parallel 1} - E_{\parallel 2}) ds = 0$$

- Otteniamo pertanto

$$E_{\parallel 1} = E_{\parallel 2}$$

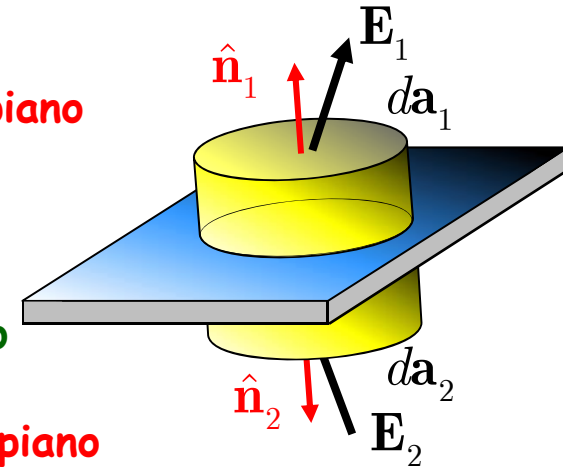
- La componente di $\mathbf{E}$ tangente alla superficie è continua

Discontinuità del campo elettrico

- Studiamo adesso la componente normale
 - In questo caso utilizziamo la legge di Gauss
 - Usiamo un cilindretto con le facce parallele al piano

$$|d\mathbf{a}_1| = |d\mathbf{a}_2| = da$$

- La superficie laterale è trascurabile
- Il contributo importante al flusso è solo quello delle due facce parallele al piano
- Non è detto che il campo sia perpendicolare al piano



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{La carica all'interno del cilindro è} \quad q = \sigma da$$

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} &\approx \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{a}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{a}_2 = E_{\perp 1} da - E_{\perp 2} da \\ &= (E_{\perp 1} - E_{\perp 2}) da = \frac{\sigma da}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

- Otteniamo pertanto

$$E_{\perp 1} - E_{\perp 2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

- La componente normale di $\mathbf{E}$ ha una discontinuità proporzionale a σ