
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 4 - 07.10.2022

**Campo elettrico espresso come
gradiente del potenziale
Flusso di un campo vettoriale**

Anno Accademico 2022/2023

Superfici equipotenziali

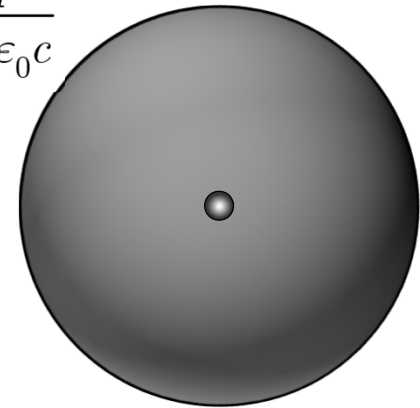
- Il potenziale elettrico è una funzione scalare
 - Per un dato potenziale la relazione seguente definisce, al variare di c , una famiglia di superfici
- Le superfici prendono il nome di superfici equipotenziali
 - Il valore del potenziale è lo stesso ($\phi = c$) in ogni punto della superficie
- Esaminiamo, ad esempio, le superfici equipotenziali del potenziale di una carica puntiforme

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

- La relazione che definisce la superficie equipotenziale è

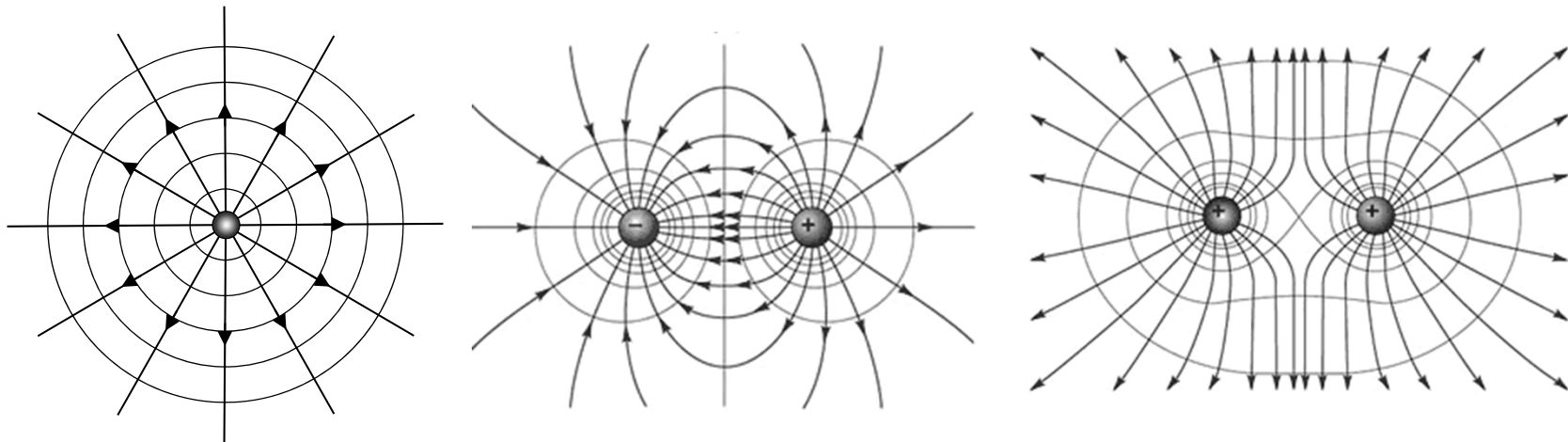
$$\phi(r) = c \quad \longrightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \quad R_c = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = R_c^2$$

- Pertanto le superfici equipotenziali sono delle sfere centrate sulla posizione della carica
- Al variare della costante c cambia la superficie
 - Una famiglia infinita di sfere concentriche



Superfici equipotenziali

- La rappresentazione delle superfici equipotenziali è complicata
 - Si preferisce rappresentare le "sezioni" delle superfici
 - Intersezioni delle superfici equipotenziali con opportuni piani
 - Ad esempio, consideriamo le superfici equipotenziali di una carica puntiforme



- Ovviamente le sezioni delle superfici equipotenziali sono delle circonferenze
- Consideriamo anche altri due esempi
 - Una carica positiva e una negativa di uguale valore (dipolo)
 - Due cariche positive uguali
- Notiamo che vicino alle cariche le sezioni diventano circolari
- Notiamo anche che linee di campo e superfici equipotenziali sono perpendicolari

Superfici equipotenziali

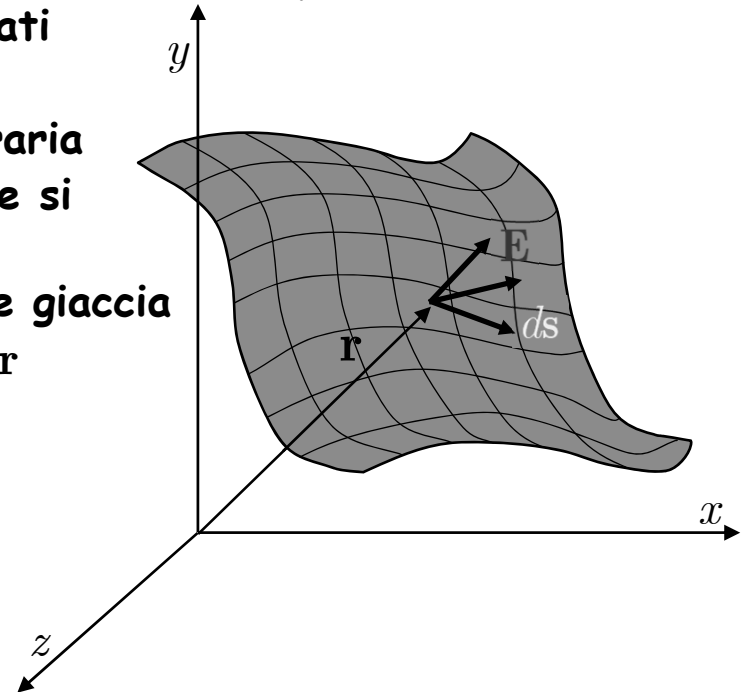
- La circostanza che il campo elettrico sia perpendicolare alle superfici equipotenziali non è limitata agli esempi considerati
 - Ha una motivazione fisica ben precisa
- Consideriamo una superficie equipotenziale arbitraria
 - Per definizione tutti i punti di questa superficie si trovano allo stesso potenziale
- Consideriamo uno spostamento infinitesimo ds che giaccia sulla superficie a partire da un punto arbitrario r
 - I vettori ds giacciono sul piano tangente alla superficie nel punto r
 - La variazione di potenziale per uno spostamento ds sulla superficie è

$$d\phi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

- Questa variazione deve essere nulla altrimenti due punti sulla superficie avrebbero potenziale differente
- Pertanto deve essere

$$d\phi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \qquad \mathbf{E} \perp d\mathbf{s}$$

- Il campo elettrico è perpendicolare alla superficie



Il campo elettrico come gradiente

- Abbiamo visto come, noto il campo elettrico, si può sempre definire un potenziale attraverso la relazione integrale

$$\phi(\mathbf{r}_B) = \phi(\mathbf{r}_A) - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{o anche come} \quad \phi(\mathbf{r}) = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

integrale indefinito

- L'integrando è il differenziale del potenziale $d\phi = - \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$

- Dall'analisi sappiamo calcolare il differenziale di una arbitraria funzione delle coordinate (una funzione continua)

$$\phi(\mathbf{r}) \equiv \phi(x, y, z)$$

$$d\phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz$$

- Il differenziale $d\phi$ (uno scalare) può essere visto come il risultato del prodotto scalare di due vettori

$$\mathbf{X} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z \quad d\mathbf{r} = dx \hat{\mathbf{e}}_x + dy \hat{\mathbf{e}}_y + dz \hat{\mathbf{e}}_z \quad d\phi = \mathbf{X} \cdot d\mathbf{r}$$

- Confrontando con l'integrando $d\phi$ dell'integrale del potenziale

$$\mathbf{E} = -\mathbf{X}$$

$$\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} - \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} - \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Il campo elettrico come gradiente

$$\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} - \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} - \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

- Abbiamo così trovato la relazione "inversa" che ci permette di passare dal potenziale al campo elettrico
 - Si dice che il campo elettrico è uguale al gradiente del potenziale cambiato di segno
 - Esiste anche un simbolo, ormai un po' obsoleto ma ancora usato

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$$

- Una notazione più diffusa utilizza l'operatore vettoriale "del" o "nabla"

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

- Si tratta di un operatore differenziale
- Il campo elettrico si scrive

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi$$

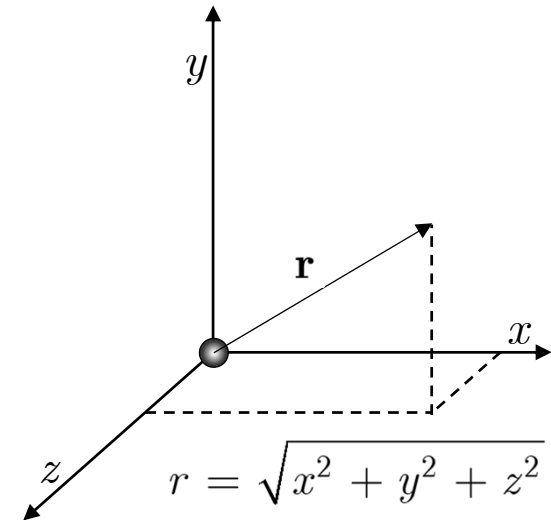
- Questa relazione è conseguenza del fatto che esiste il potenziale
 - In ultima analisi dipende dal fatto che il campo $\mathbf{E}$ è conservativo

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \phi(\mathbf{r}_B) = \phi(\mathbf{r}_A) - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad \longleftrightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi$$

Il campo elettrico come gradiente

- La relazione fra potenziale e campo elettrico appena trovata consente una strategia conveniente per il calcolo del campo elettrico
 - Data una distribuzione di cariche si calcola il potenziale elettrico
 - È una quantità scalare; è un calcolo più semplice
 - Trovato il potenziale si calcola il campo elettrico come gradiente del potenziale
- Illustriamo il metodo con un semplice esempio
 - Il campo di una carica puntiforme nell'origine

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$



- Calcoliamo la derivata rispetto a x

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} 2x$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1} x = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{x}{r}$$

$$\frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{r^2}$$

Il campo elettrico come gradiente

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{x}{r}$$

- Per la simmetria dell'espressione le derivate rispetto alle altre coordinate sono

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{y}{r} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{z}{r}$$

- Riconosciamo le tre componenti del versore $\hat{\mathbf{r}}$

$$\frac{x}{r} = \hat{r}_x \qquad \frac{y}{r} = \hat{r}_y \qquad \frac{z}{r} = \hat{r}_z$$

- Richiamiamo la definizione

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \qquad \mathbf{E} = -\hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} - \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} - \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

- Otteniamo

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{e}}_x \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}_x + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}_y + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} [\hat{\mathbf{e}}_x \hat{r}_x + \hat{\mathbf{e}}_y \hat{r}_y + \hat{\mathbf{e}}_z \hat{r}_z]$$

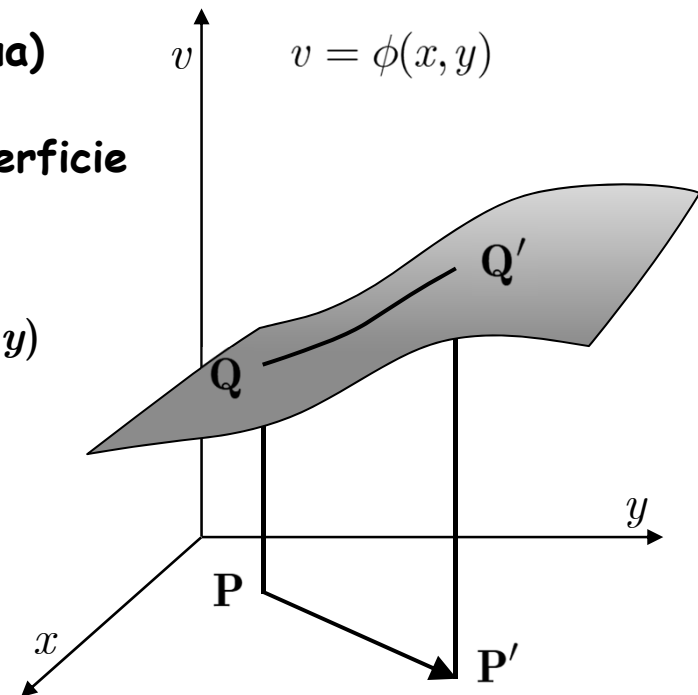

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Derivate direzionali

- Approfondiamo alcuni concetti relativi al gradiente di una funzione scalare
- Premessa
 - Il potenziale è una funzione di tre variabili $\phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z)$
 - Non è possibile per noi rappresentare una funzione di tre variabili
 - Avremmo bisogno di visualizzare uno spazio quadrimensionale
 - Tuttavia i concetti possono essere illustrati e visualizzati per una funzione di due variabili $\phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y)$
- Consideriamo una funzione arbitraria (ma continua) delle variabili x e y
- Consideriamo inoltre due punti Q e Q' sulla superficie corrispondenti ai due punti P e P' sul piano $x-y$
 - Al variare del punto P sul piano $x-y$ il punto Q descrive una curva sulla superficie $v = \phi(x, y)$
 - Il punto P descrive una curva sul piano $x-y$ che in forma parametrica ha la forma

$$\mathbf{P}(s) = x(s)\hat{\mathbf{e}}_x + y(s)\hat{\mathbf{e}}_y$$

- In particolare $\mathbf{P}(s)$ può essere una retta
- Descrive una direzione sul piano $x-y$



Derivate direzionali

- Vogliamo adesso calcolare la variazione di ϕ lungo la direzione $P-P'$
 - Supponiamo che la distanza da P a P' sia infinitesima
 - Introducendo le coordinate $x(s)$ e $y(s)$ in $\phi(x,y)$

$$\phi(s) = \phi[x(s), y(s)] \quad d\phi(s) = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy$$

$$d\phi(s) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} ds \quad \frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

- Ricordiamo che le derivate di x e y rispetto a s sono i coseni direttori della direzione $P-P'$

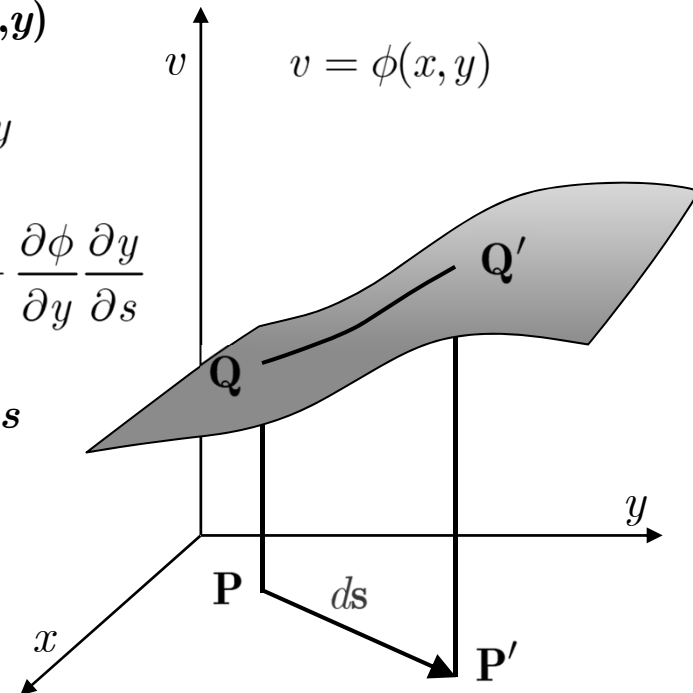
$$\hat{u}_s = \hat{e}_x \frac{\partial x}{\partial s} + \hat{e}_y \frac{\partial y}{\partial s}$$

- Inoltre

$$\nabla \phi = \hat{e}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

- Otteniamo in definitiva

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \hat{u}_s \cdot \nabla \phi$$



**Definizione di
derivata direzionale**

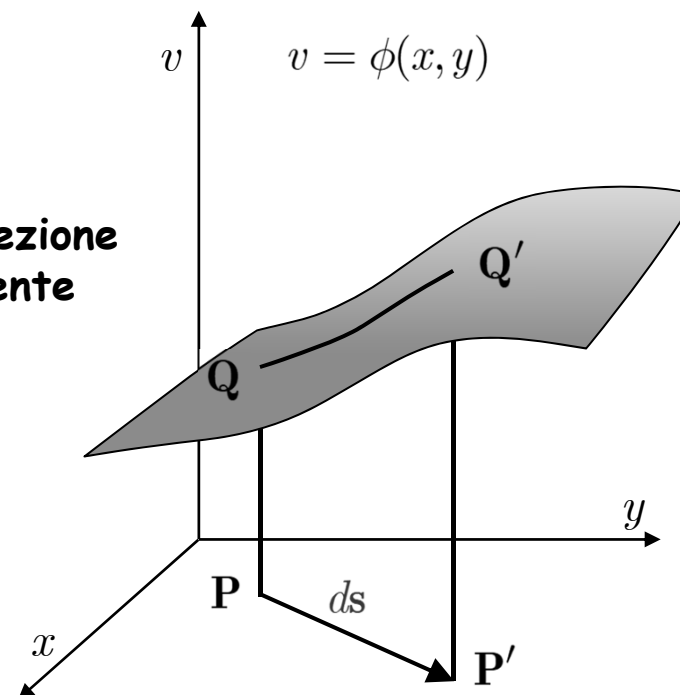
Derivate direzionali

- Riepilogando, abbiamo trovato l'espressione per la derivata direzionale di una funzione di più variabili

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

- Inoltre abbiamo visto come la derivata in direzione di $\hat{\mathbf{u}}_s$ può essere espressa utilizzando il gradiente

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \hat{\mathbf{u}}_s \cdot \nabla \phi$$



- Naturalmente il formalismo è immediatamente generalizzabile in tre direzioni anche se non visualizzabile come invece abbiamo fatto in due dimensioni

Derivate direzionali

- Una importante osservazione sul risultato trovato

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \hat{\mathbf{u}}_s \cdot \nabla \phi$$

- Il gradiente $\nabla \phi$ e il versore $\hat{\mathbf{u}}_s$ sono due vettori
 - In particolare $|\hat{\mathbf{u}}_s| = 1$
- Si ha pertanto

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \hat{\mathbf{u}}_s \cdot \nabla \phi = |\hat{\mathbf{u}}_s| |\nabla \phi| \cos \alpha = |\nabla \phi| \cos \alpha$$

- α è l'angolo compreso fra la direzione del gradiente e la direzione in cui si calcola la derivata direzionale
- Ovviamente la derivata direzionale è massima quando $\cos \alpha = 1$ ($\alpha = 0$)
 - Avviene quando $\hat{\mathbf{u}}_s$ è nella direzione del gradiente
- Concludiamo che ...

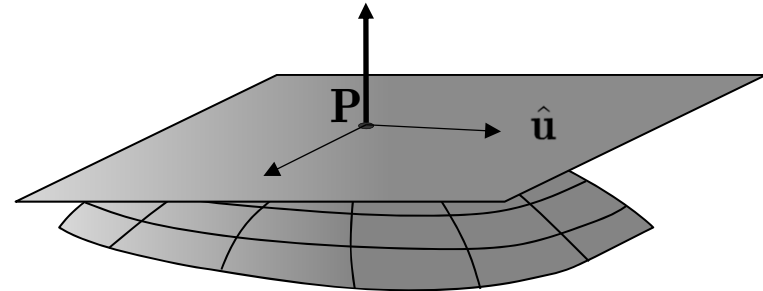
**Il gradiente punta nella direzione di massima variazione della funzione ϕ
Il suo modulo dà la derivata della funzione in quella direzione**

Il gradiente

- Per finire consideriamo una superficie equipotenziale

$$\phi(x, y, z) = c$$

- Consideriamo un punto P sulla superficie
- Consideriamo il piano tangente alla superficie nel punto P
- Per una generica direzione $\hat{u}$ sul piano tangente la variazione del potenziale è ovviamente nulla



$$d\phi_{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla \phi = 0$$

- È nulla perché $\phi = c$ è una superficie equipotenziale
- Questa relazione vale per un generico versore sul piano tangente
 - Il gradiente è perpendicolare a tutti i vettori del piano
 - Il gradiente è perpendicolare al piano

Il gradiente è perpendicolare alle superfici equipotenziali

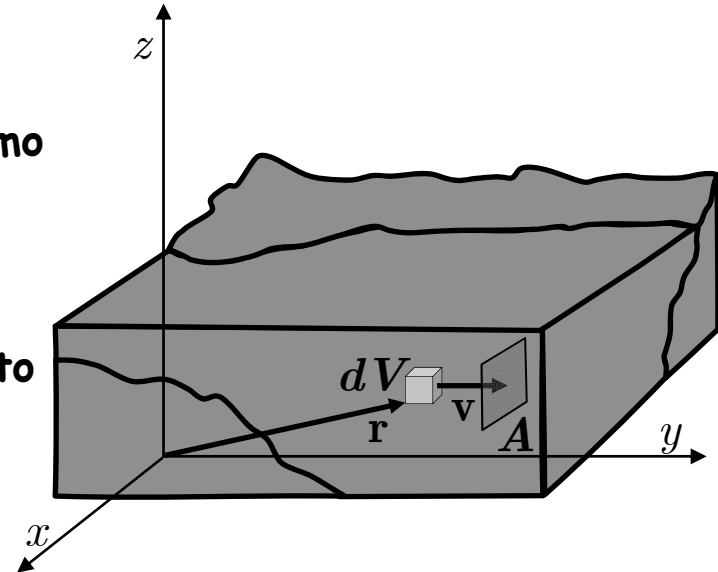
- Applicazione: utilizzare il gradiente per calcolare la normale a una superficie

La Legge di Gauss

- Studiamo un'importante proprietà del Campo Elettrico: La Legge di Gauss
 - Stabilisce un legame fra il campo e le sue sorgenti
 - Può essere formulata in due modi
 - In forma integrale
 - In forma differenziale
- In forma integrale è probabilmente più semplice, almeno per il momento
 - In forma differenziale occorre maggiore familiarità con l'analisi vettoriale
 - Conduce a importanti equazioni differenziali che governano il Campo Elettrico
- La Legge di Gauss è una delle 4 equazioni di Maxwell
- Per la sua formulazione in forma integrale abbiamo bisogno preliminarmente del concetto di "Flusso di un campo"
 - Un concetto matematico generale
 - Può essere definito per ogni campo vettoriale
- Per facilitarne la comprensione faremo una piccola deviazione verso la meccanica dei fluidi
 - Discutiamo il flusso di un fluido
 - Aiuta la comprensione qualitativa del concetto di "Flusso di un Campo"
 - Solo per aiutare la comprensione: da un punto di vista fisico il flusso del campo elettrico non ha nulla a che vedere con il flusso di fluido

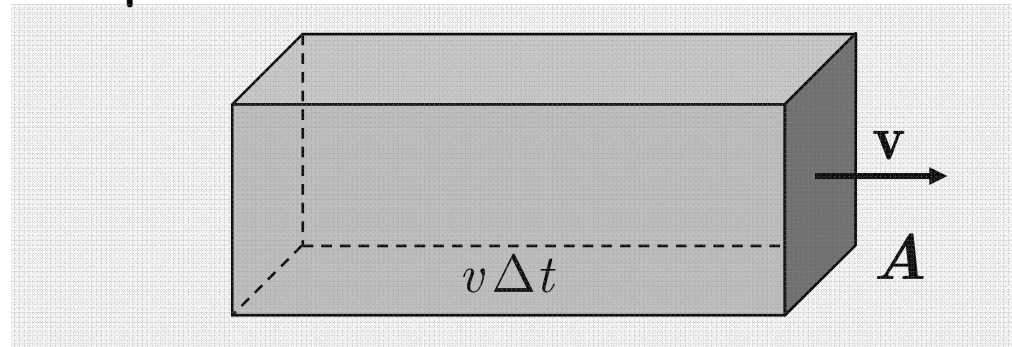
Flusso di un campo vettoriale

- Supponiamo di osservare il flusso di un fluido
 - Ad esempio l'acqua di un fiume
- Per descrivere il moto del fluido lo suddividiamo in tanti volumetti dV
- Ogni volumetto è caratterizzato da
 - La posizione $\mathbf{r}$ del volumetto
 - La densità del fluido all'interno del volumetto
 - La densità è di solito una funzione della posizione $\mathbf{r}$: $\rho(\mathbf{r})$
 - La velocità $\mathbf{v}$ del volumetto di fluido
 - La velocità del fluido può variare da punto a punto
 - Il vettore velocità è un campo vettoriale $\mathbf{v}(\mathbf{r})$
- Adesso calcoliamo la quantità di fluido che attraversa una superficie A arbitraria immersa nel fluido
 - Di interesse, ad esempio, per calcolare l'energia trasferita dal fluido in movimento alle pale di una turbina



Flusso di un campo vettoriale

- Consideriamo una superficie A nel fluido



- Per adesso assumiamo la velocità del fluido sia perpendicolare alla superficie
 - Fra breve abbandoneremo questa limitazione
 - Inoltre supponiamo che la velocità non vari sulla superficie A
- Ci chiediamo quanto fluido attraversa la superficie in un intervallo di tempo Δt
 - Evidentemente il fluido che attraversa la superficie è quello contenuto nel parallelepipedo indicato, di base A e altezza $v \Delta t$
 - Il volume del parallelepipedo è $\Delta V = A v \Delta t$. Pertanto

$$\Delta Q = \rho \Delta V = \rho A v \Delta t$$

- Definiamo il flusso ϕ come la quantità di fluido che attraversa la superficie nell'unità di tempo

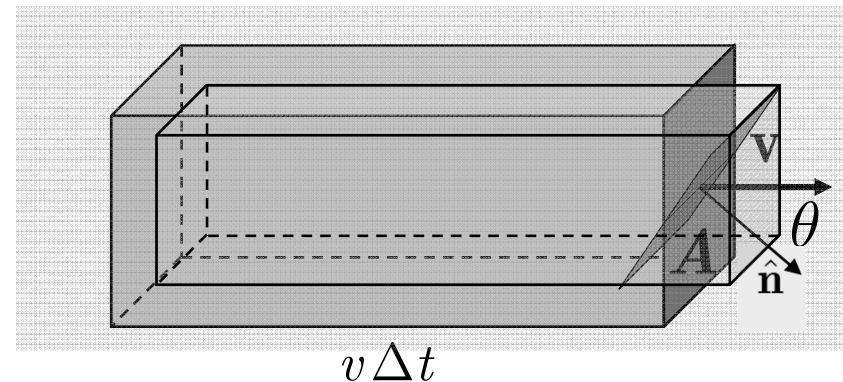
$$\phi = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho A v$$

Flusso di un campo vettoriale

- È conveniente definire il campo vettoriale $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$
 - Il vettore $\mathbf{J}$ prende il nome di densità di corrente
 - Ha le dimensioni di massa per unità di superficie per unità di tempo
 - Per definizione, la quantità di fluido che attraversa la superficie nell'unità di tempo è il flusso del vettore $\mathbf{J}$ attraverso la superficie A

$$\phi = |\mathbf{J}| \cdot A$$

- Ribadiamo che abbiamo assunto la velocità sempre perpendicolare a A
- Analizziamo il caso in cui la velocità non è perpendicolare alla superficie A
 - La situazione che abbiamo analizzato ...
- Supponiamo adesso che la stessa superficie A sia inclinata
 - La normale alla superficie forma un angolo θ con la velocità
 - Il parallelepipedo di fluido che attraversa la superficie nel tempo Δt è adesso più piccolo
 - La sua base ha una superficie $A' = A \cos \theta$
- Il flusso è
$$\phi = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho A' v = \rho A v \cos \theta$$



Flusso di un campo vettoriale

- La definizione di flusso viene pertanto scritta in modo più generale introducendo il versore normale alla superficie

$$\phi = \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} A$$

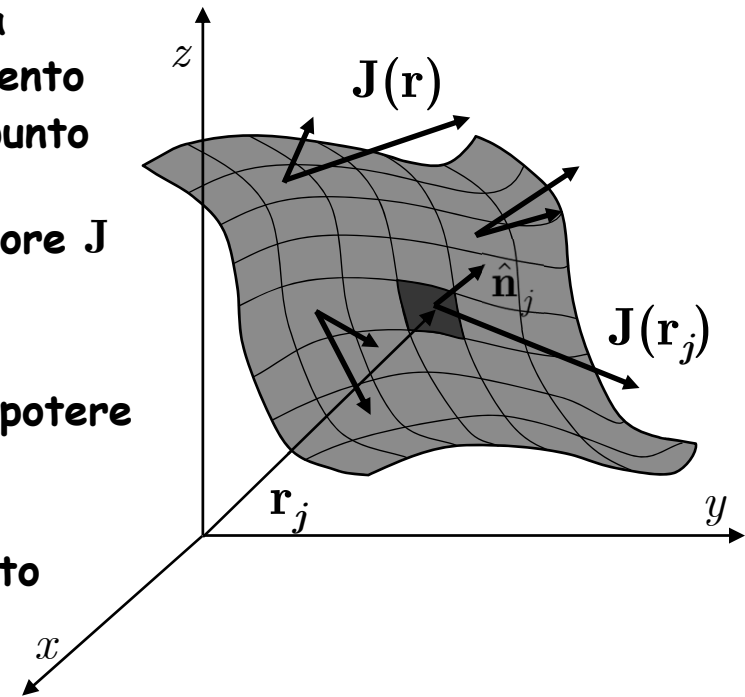
- Un'altra notazione molto importante unifica la normale alla superficie e l'area della superficie in un'unica grandezza vettoriale

$$\mathbf{A} = A \hat{\mathbf{n}} \quad \phi = \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}$$

- Questa notazione è più importante e più utile di quello che potrebbe apparire a prima vista
- Soprattutto per le superfici infinitesime *da* che si incontrano nella geometria differenziale nello studio delle superfici
 - La trattazione matematica delle superfici è un argomento importante
 - Esula dagli obbiettivi primari del nostro corso
- Negli esempi trattati
 - La velocità era costante su tutta la superficie e aveva sempre la stessa direzione
 - La superficie era una semplice figura geometrica piana
- Vediamo adesso il caso più generale di flusso attraverso una superficie arbitraria

Flusso di un campo vettoriale

- Consideriamo una superficie di forma arbitraria
 - La superficie è immersa in un fluido in movimento
 - La velocità del fluido, in generale, varia da punto a punto sulla superficie
 - Il movimento del fluido è descritto dal vettore $\mathbf{J}$
- Suddividiamo la superficie in piccoli elementi di superficie Δa_j
 - Gli elementi sono sufficientemente piccoli da potere essere considerati superfici piane
 - Tutte orientate in modo differente
- Ogni elemento di superficie Δa_j è caratterizzato
 - Ovviamente dalla superficie Δa_j
 - Dalla posizione del suo centro $\mathbf{r}_j$
 - Dalla normale alla superficie $\hat{\mathbf{n}}_j$
- Il flusso di $\mathbf{J}$ attraverso ogni elemento di superficie è
- Il flusso attraverso la superficie completa si calcola sommando i flussi attraverso le singole superfici



$$\Delta\phi_j = \mathbf{J}(\mathbf{r}_j) \cdot \hat{\mathbf{n}}_j \Delta a_j$$

$$\phi = \sum_{j=1}^N \Delta\phi_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{J}(\mathbf{r}_j) \cdot \hat{\mathbf{n}}_j \Delta a_j$$

Flusso di un campo vettoriale

- Nel caso limite si fa tendere all'infinito il numero N di elementi di superficie e la somma diventa un integrale

$$\phi = \sum_{j=1}^N \mathbf{J}(\mathbf{r}_j) \cdot \hat{\mathbf{n}}_j \Delta a_j \quad \boxed{\phi = \int_A \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da}$$

- È bene sottolineare che il versore $\hat{\mathbf{n}}_j$ è una funzione del punto $\mathbf{r}$, e quindi della variabile di integrazione
- È necessario definire la superficie A
 - Nei casi semplici si tratta di semplici superfici (una superficie sferica, una superficie cilindrica) poste in posizioni semplici (simmetriche) rispetto al sistema in esame
 - In generale è necessario specificare l'equazione della superficie
 - L'equazione della superficie permette di determinare il versore $\hat{\mathbf{n}}_j$ in ogni punto della superficie
- L'integrale introdotto prende il nome di Integrale di Superficie
- Come già detto una forma alternativa è considerare l'elemento di superficie come un vettore nella direzione della normale e modulo uguale alla superficie

$$\boxed{\phi = \int_A \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{a}}$$

Superfici in forma parametrica

- Analogamente a quanto visto per le curve (vedi diapositiva **32** e seguenti) anche per le superfici è conveniente una rappresentazione parametrica

- Le curve dipendevano da un parametro

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\hat{\mathbf{e}}_x + y(s)\hat{\mathbf{e}}_y + z(s)\hat{\mathbf{e}}_z$$

- Le superfici dipendono da due parametri

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\hat{\mathbf{e}}_x + y(u, v)\hat{\mathbf{e}}_y + z(u, v)\hat{\mathbf{e}}_z \quad \mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

- I parametri u e v variano in un dominio definito

- Dominio finito per superfici finite

- Esempio di superficie

- Una sfera di raggio R

- Parametri $u = \theta$ $v = \phi$

$$\mathbf{r}(\theta, \phi) = R \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{matrix}$$

- Anche per le superfici si definiscono le tangenti

- Due vettori tangenti alla superficie

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \quad \mathbf{t}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

- I versori tangenti sono

$$\hat{\mathbf{t}}_1 = \frac{\mathbf{t}_1}{|\mathbf{t}_1|} \quad \hat{\mathbf{t}}_2 = \frac{\mathbf{t}_2}{|\mathbf{t}_2|}$$

Vettori tangenti alla sfera

- I versori tangenti per la sfera sono

$$\mathbf{t}_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{r}(\theta, \phi) = R \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{t}}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

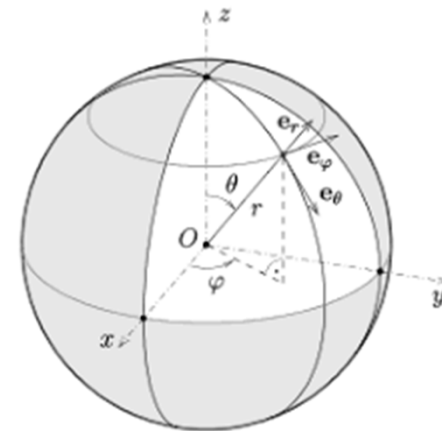
$$\mathbf{t}_\phi = \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{r}(\theta, \phi) = R \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{t}}_\phi = \frac{\mathbf{t}_\phi}{|\mathbf{t}_\phi|} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Consideriamo anche il versore radiale

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{e}}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

- Formano una terna ortogonale
- Utilizziamo per i versori la notazione più comune

$$\hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{t}}_\theta \quad \hat{\mathbf{e}}_\phi = \hat{\mathbf{t}}_\phi$$



Elemento di superficie

- Consideriamo l'elemento di superficie sulla sfera corrispondente a due spostamenti infinitesimi $d\theta$ e $d\phi$
- È un parallelogramma i cui lati sono

$$d\mathbf{r}_\phi = \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{r}(\theta, \phi) d\phi = \mathbf{t}_\phi d\phi = R \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\phi d\phi$$

$$d\mathbf{r}_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{r}(\theta, \phi) d\theta = \mathbf{t}_\theta d\theta = R \hat{\mathbf{e}}_\theta d\theta$$

- Si definisce l'elemento d'area vettoriale

$$\begin{aligned} d\mathbf{a} &= d\mathbf{r}_\theta \times d\mathbf{r}_\phi = (R d\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta) \times (R \sin \theta d\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi) \\ &= R^2 \sin \theta d\phi d\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta \times \hat{\mathbf{e}}_\phi = R^2 \sin \theta d\phi d\theta \hat{\mathbf{e}}_r \end{aligned}$$

- Il modulo del prodotto vettoriale è l'area del parallelogramma
- Il prodotto vettoriale è perpendicolare alla superficie

$$da = R^2 \sin \theta d\phi d\theta \hat{\mathbf{e}}_r$$

- L'integrale di superficie è un integrale doppio sui parametri u e v
- Per altre superfici si utilizza un metodo analogo
 - Occorre la forma parametrica della superficie

