
Elettromagnetismo

Prof. Francesco Ragusa
Università degli Studi di Milano

Lezione n. 2 - 11.10.2021

Linearità della forza elettrica
Vettori. Lavoro della forza elettrostatica.
Indipendenza dal cammino
Campo Elettrico e linee di campo

Anno Accademico 2022/2023

Linearità della Forza Elettrica

- Un'altra importante proprietà della Forza Elettrica è la linearità
 - Non è contenuta esplicitamente nella legge di Coulomb
 - Deriva dalle osservazioni sperimentali
- Supponiamo di avere tre cariche: q_1, q_2, q_3
 - Misuriamo la forza fra due cariche con la terza posta a distanza infinita in modo che non influisca sulla forza fra le altre due
 - q_3 in r_A e q_2 in r_B (q_1 posta all'infinito)
 - q_3 in r_A e q_1 in r_C (q_2 posta all'infinito)
 - La forza fra q_3 in r_A e q_2 in r_B (q_1 a infinito)

$$\mathbf{F}_{32} = k \frac{q_3 q_2}{r_{AB}^2} \hat{\mathbf{r}}_{AB}$$

- La forza fra q_3 in r_A e q_1 in r_C (q_2 a infinito)

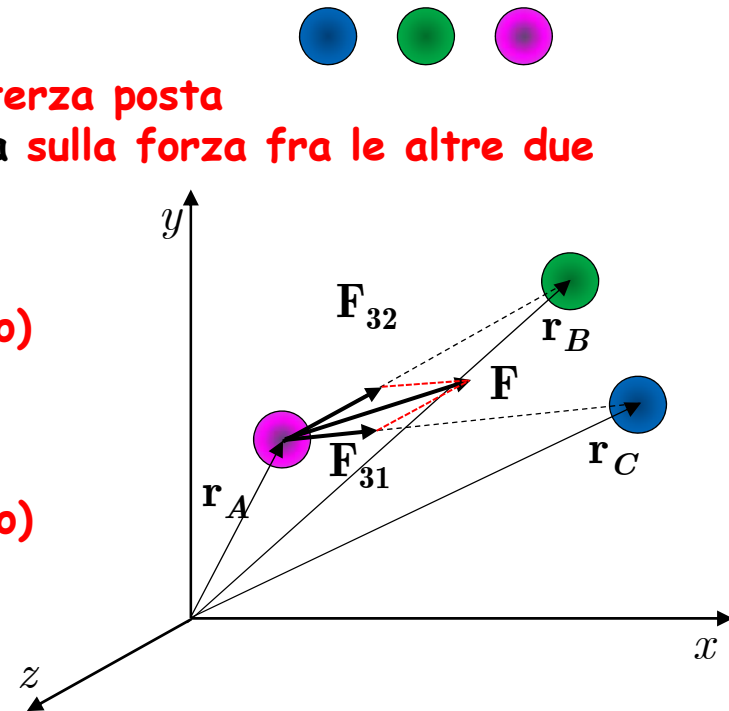
$$\mathbf{F}_{31} = k \frac{q_3 q_1}{r_{AC}^2} \hat{\mathbf{r}}_{AC}$$

- Se adesso misuriamo la forza fra q_3 in r_A e q_1 e q_2 rispettivamente in r_B e in r_C misuriamo $\mathbf{F}$

- La $\mathbf{F}$ risulta

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}$$

$$\mathbf{F} = k \frac{q_3 q_1}{r_{AC}^2} \hat{\mathbf{r}}_{AC} + k \frac{q_3 q_2}{r_{AB}^2} \hat{\mathbf{r}}_{AB}$$

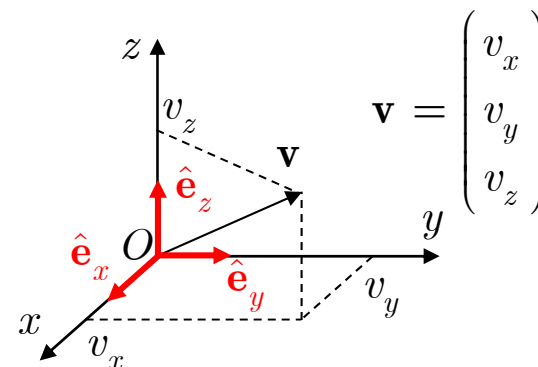


Linearità della Forza Elettrica

- La proprietà appena illustrata vale per un numero arbitrario di cariche
 - Indipendentemente dal numero di cariche presenti nel sistema in esame
 - La legge di Coulomb permette di calcolare la forza fra ogni coppia di cariche
 - La forza su una data carica si trova sommando (sovrapponendo) le forze di tutte le altre cariche accoppiate una a una, indipendentemente dalle altre con la carica data
- Questa è la base del Principio di Sovrapposizione che vale per i sistemi lineari
 - Un sistema con N cariche nel quale vogliamo calcolare la forza su una data carica, diciamo q_1 dovuta alle restanti $N - 1$ cariche può essere pensato come la sovrapposizione di $N - 1$ sistemi indipendenti
 - Un sistema per ogni coppia di cariche (q_1, q_j) $j = 2 \dots N$
 - Ogni singolo sistema si risolve semplicemente (legge di Coulomb)
 - L'effetto totale su q_1 è la sovrapposizione dei singoli effetti
- Utilizzeremo ancora il principio di sovrapposizione

Vettori

- I vettori servono per rappresentare grandezze caratterizzate da modulo, direzione, verso
 - Per definirlo occorrono tre quantità
 - In coordinate cartesiane si utilizzano le proiezioni sui tre assi



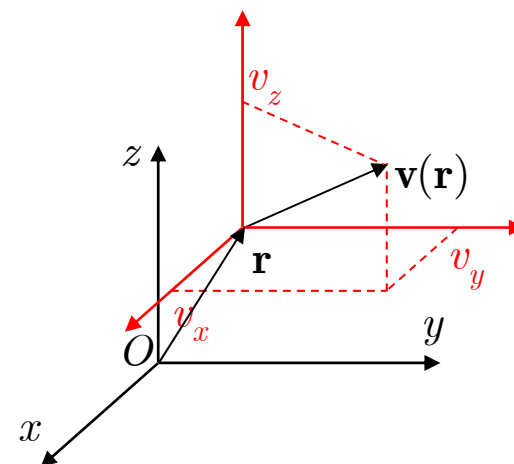
- Introduciamo una terna di versori lungo i tre assi

$$|\hat{e}_x| = |\hat{e}_y| = |\hat{e}_z| = 1 \quad \hat{e}_x \cdot \hat{e}_y = \hat{e}_x \cdot \hat{e}_z = \hat{e}_y \cdot \hat{e}_z = 0$$

- Utilizzando i tre versori si può scrivere

$$\mathbf{v} = v_x \hat{e}_x + v_y \hat{e}_y + v_z \hat{e}_z$$

- Normalmente in fisica si utilizzano i vettori applicati
 - Un vettore applicato al punto $\mathbf{r}$ si ottiene trasladando il vettore $\mathbf{v}$ in modo che la sua origine sia nel punto $\mathbf{r}$



- In tal caso si scrive $\mathbf{v}(\mathbf{r})$
- Le componenti di $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ si determinano con un sistema di coordinate locale
 - In coordinate cartesiane coincidono con le componenti del vettore in $\mathbf{O}$

Vettori

- I versori sono vettori che individuano una direzione
 - I versori hanno modulo unitario
- Dato un arbitrario vettore $\mathbf{w}$ abbiamo visto che il versore della sua direzione si definisce come

$$\hat{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}}{w} \quad |\mathbf{w}| = w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$$

- Un versore di particolare importanza è quello associato al vettore posizione $\mathbf{r}$

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \hat{r}_x = \frac{x}{r} \quad \hat{r}_y = \frac{y}{r} \quad \hat{r}_z = \frac{z}{r} \quad \hat{\mathbf{e}}_r \equiv \hat{\mathbf{r}}$$

$$\hat{r}_x^2 + \hat{r}_y^2 + \hat{r}_z^2 = 1 \quad \hat{\mathbf{r}} = \hat{r}_x \hat{\mathbf{e}}_x + \hat{r}_y \hat{\mathbf{e}}_y + \hat{r}_z \hat{\mathbf{e}}_z$$

- Definiamo infine i tre angoli che il versore $\hat{\mathbf{r}}$ forma con i tre assi

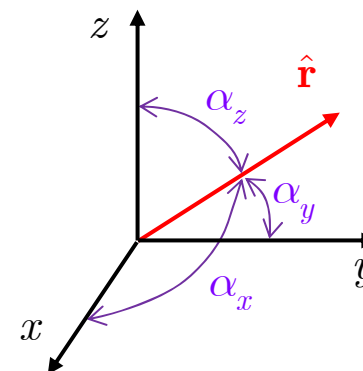
$$\hat{r}_x = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x = |\hat{\mathbf{r}}| \cdot |\hat{\mathbf{e}}_x| \cos \alpha_x = \cos \alpha_x$$

- E analogamente $\hat{r}_y = \cos \alpha_y \quad \hat{r}_z = \cos \alpha_z$

- Abbiamo definito i tre coseni direttori

- Possiamo scrivere

$$\hat{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_x \\ \cos \alpha_y \\ \cos \alpha_z \end{pmatrix} \quad |\hat{\mathbf{r}}|^2 = \cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1$$



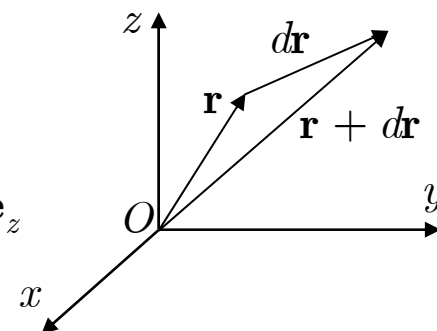
Vettori

- Consideriamo adesso uno spostamento infinitesimo dalla posizione $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{e}}_x + y \hat{\mathbf{e}}_y + z \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$d\mathbf{r} = dx \hat{\mathbf{e}}_x + dy \hat{\mathbf{e}}_y + dz \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\mathbf{r} + d\mathbf{r} = (x + dx) \hat{\mathbf{e}}_x + (y + dy) \hat{\mathbf{e}}_y + (z + dz) \hat{\mathbf{e}}_z$$



- Lo spostamento infinitesimo definito è arbitrario
 - I differenziali dx, dy, dz sono arbitrari

- In altre situazioni lo spostamento infinitesimo può avere dei vincoli

- Ad esempio essere lungo una traiettoria definita
 - In tal caso, per evitare confusione, si usano simboli diversi

$$d\mathbf{s} = dx \hat{\mathbf{e}}_x + dy \hat{\mathbf{e}}_y + dz \hat{\mathbf{e}}_z \quad d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{e}}_x + dy \hat{\mathbf{e}}_y + dz \hat{\mathbf{e}}_z$$

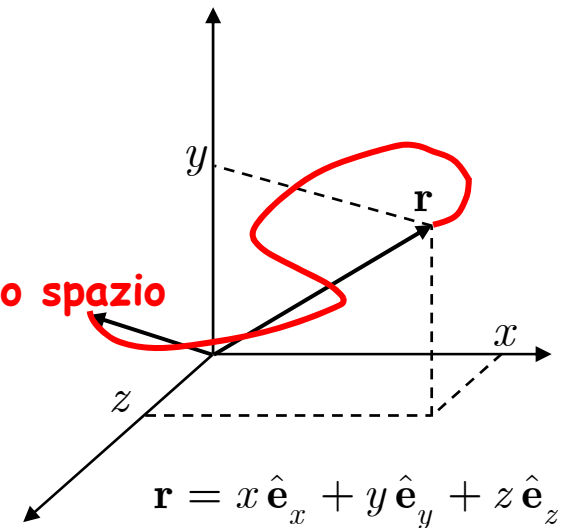
- Il significato di queste definizioni sarà più chiaro fra poco quando studieremo le curve nello spazio
 - Nel caso di una curva il vettore $\mathbf{r}$ descrive la curva stessa
 - I tre differenziali $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ non sono più arbitrari
 - Il vettore $d\mathbf{r}$ è tangente alla curva

Curve nello spazio

- Consideriamo il vettore posizione $\mathbf{r}$
 - Le sue componenti cartesiane x, y, z
- Le componenti siano adesso tre arbitrarie funzioni del parametro s

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\hat{\mathbf{e}}_x + y(s)\hat{\mathbf{e}}_y + z(s)\hat{\mathbf{e}}_z$$

- Al variare di s il vettore $\mathbf{r}(s)$ descrive una curva nello spazio
- Avete già visto cose analoghe nella cinematica
 - Traiettoria di un punto
 - In quel caso il parametro s era il tempo t
- Scegliamo come parametro s la lunghezza dello spazio percorso sulla traiettoria



- Consideriamo uno spostamento infinitesimo $d\mathbf{r}$ sulla curva

$$d\mathbf{r} = dx\hat{\mathbf{e}}_x + dy\hat{\mathbf{e}}_y + dz\hat{\mathbf{e}}_z \quad d\mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial s}ds\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\partial y}{\partial s}ds\hat{\mathbf{e}}_y + \frac{\partial z}{\partial s}ds\hat{\mathbf{e}}_z$$

- Notiamo che dx, dy, dz non sono più arbitrari
- Il modulo di $d\mathbf{r}$ è

$$|d\mathbf{r}| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2} ds \quad \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2} = 1$$

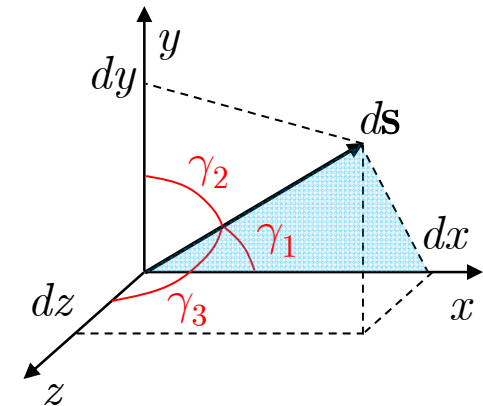
- Ma per costruzione s è la distanza percorsa sulla curva, quindi $|d\mathbf{r}| = ds$

Curve nello spazio

- Veniamo al significato delle derivate introdotte nella diapositiva precedente
- Quando le coordinate x, y, z sono funzioni di s introduciamo il vettore ds
 - Notiamo che dr e ds sono lo stesso vettore
 - Il vettore ds è sulla curva descritta da r ; hanno la stessa lunghezza
 - Calcoliamo le tre componenti di ds
 - Consideriamo il piano formato da ds e dall'asse x
 - Nel triangolo rettangolo indicato ds è l'ipotenusa e dx è un cateto
 - Chiamiamo γ_1 l'angolo compreso
 - Ovviamente

$$dx = ds \cos \gamma_1$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos \gamma_1$$



- Abbiamo ritrovato uno dei tre coseni direttori di ds

- Analogamente

$$dy = ds \cos \gamma_2$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \cos \gamma_2$$

$$dz = ds \cos \gamma_3$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \cos \gamma_3$$

- Naturalmente

$$\cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 + \cos^2 \gamma_3 = 1$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (\cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 + \cos^2 \gamma_3) ds^2 = ds^2$$

Curve nello spazio

- Vale la pena ricordare la relazione fra gli angoli delle coordinate sferiche e gli angoli $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$
- Consideriamo un vettore che punta nella direzione individuata dai tre coseni direttori

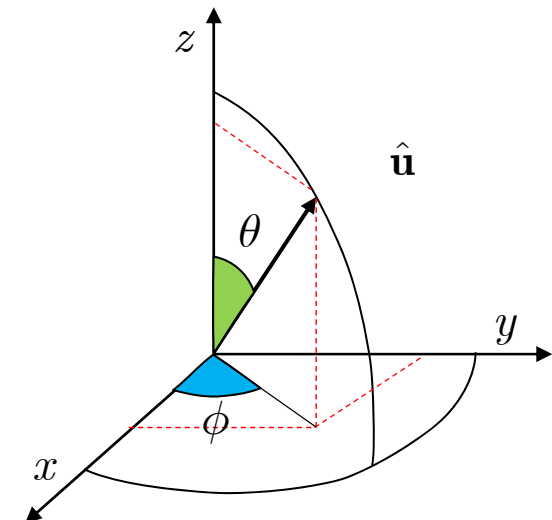
$$\cos \gamma_1 \quad \cos \gamma_2 \quad \cos \gamma_3 \quad \hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \cos \gamma_1 \\ \cos \gamma_2 \\ \cos \gamma_3 \end{pmatrix}$$

- Abbiamo visto che i tre coseni sono le componenti del vettore ($|\hat{\mathbf{u}}| = 1$)
- D'altro canto, esprimendo le componenti cartesiane in funzione degli angoli polari θ e ϕ

$$\hat{u}_x = \sin \theta \cos \phi \quad \hat{u}_y = \sin \theta \sin \phi \quad \hat{u}_z = \cos \theta \quad \hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

- È facile verificare che $|\hat{\mathbf{u}}| = 1$
- Uguagliando le componenti del vettore nelle due formulazioni otteniamo la relazione cercata

$$\cos \gamma_1 = \sin \theta \cos \phi \quad \cos \gamma_2 = \sin \theta \sin \phi \quad \cos \gamma_3 = \cos \theta$$



Curve nello spazio

- Consideriamo la curva parametrizzata con la lunghezza della curva s

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\hat{\mathbf{e}}_x + y(s)\hat{\mathbf{e}}_y + z(s)\hat{\mathbf{e}}_z$$

- La derivata di $\mathbf{r}$ rispetto a s è un vettore tangente alla curva

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}'(s) = \frac{dx}{ds}\hat{\mathbf{e}}_x + \frac{dy}{ds}\hat{\mathbf{e}}_y + \frac{dz}{ds}\hat{\mathbf{e}}_z = x'(s)\hat{\mathbf{e}}_x + y'(s)\hat{\mathbf{e}}_y + z'(s)\hat{\mathbf{e}}_z$$

- Da ora in poi l'apice denota la derivata rispetto al parametro

- Definiamo il versore tangente

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{1}{\|\mathbf{t}\|} \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

- Ricordiamo che se la curva è parametrizzata tramite s

- Un'altra grandezza importante è il versore normale alla curva (nel caso in cui $\mathbf{t}' \neq 0$)

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\hat{\mathbf{t}}'(s)}{\|\hat{\mathbf{t}}'(s)\|}$$

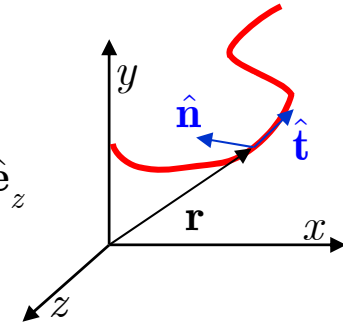
- Tramite la normale si definisce la curvatura della curva

$$k(s) = \frac{\|\hat{\mathbf{t}}'\|}{\|\hat{\mathbf{t}}\|} = \|\hat{\mathbf{t}}'\|$$

$$\mathbf{t}'(s) = \|\hat{\mathbf{t}}'(s)\| \hat{\mathbf{n}}(s) = k(s) \hat{\mathbf{n}}(s)$$

- L'inverso della curvatura prende il nome di raggio di curvatura

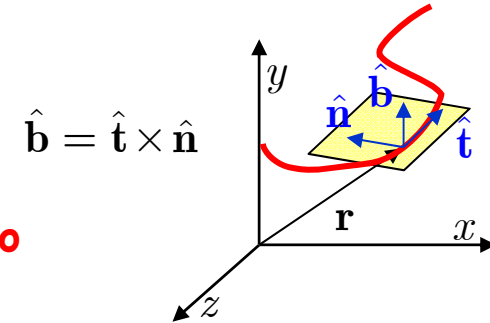
$$\rho(s) = \frac{1}{k(s)}$$



NB: curva parametrizzata con s

Curve nello spazio

- L'ultimo vettore importante per la teoria delle curve è il versore binormale
 - È il vettore perpendicolare al piano definito da $\hat{t}$ e $\hat{n}$
 - Piano osculatore
- Per costruzione il versore $\hat{b}$ è perpendicolare al piano osculatore
 - Se il versore $\hat{b}$ non varia con s la curva giace su un piano
 - Curva piana
- L'eventuale variazione di $\hat{b}$ permette di definire la torsione $\tau(s)$



$$\tau(s) = \|\mathbf{b}'\|$$

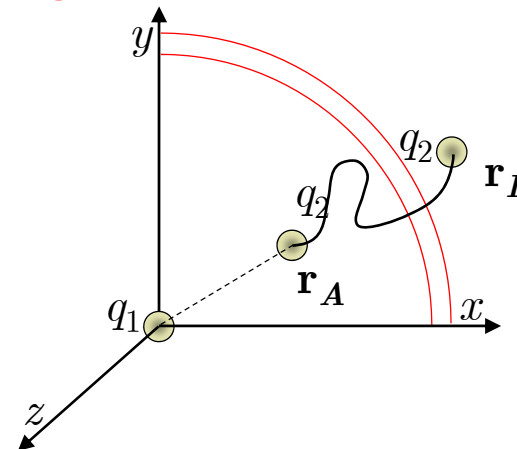
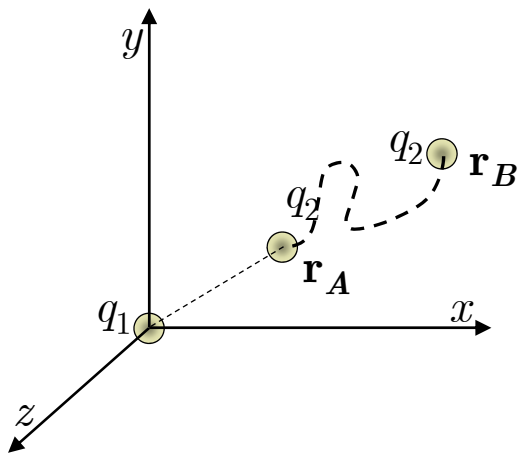
- I tre vettori definiti soddisfano l'equazione di Frenet-Serret

$$\begin{bmatrix} \hat{t}'(s) \\ \hat{n}'(s) \\ \hat{b}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{t}(s) \\ \hat{n}(s) \\ \hat{b}(s) \end{bmatrix}$$

- Per ulteriori approfondimenti sulla geometria differenziale delle curve, in particolare per curve con parametrizzazione arbitraria, si veda
 - A. Pressley - Elementary Differential Geometry, 2nd ed. - Springer 2010

La Forza Elettrostatica è Conservativa

- Un'importantissima proprietà della Forza Elettrostatica (Forza di Coulomb) è che si tratta di una forza conservativa
 - Dipende dalla natura centrale della forza
- Le cariche possono essere (in generale lo sono) mantenute nelle posizioni assegnate da forze non elettriche
 - Possiamo comunque immaginare di spostare una carica da una posizione all'altra con un movimento estremamente lento, bilanciando istante per istante la forza elettrica che agisce sulla carica in esame
- Consideriamo il lavoro fatto per spostare una carica q_2 che interagisce con una carica q_1 posta nell'origine
 - Calcoliamo il lavoro seguendo una traiettoria arbitraria da r_A a r_B
 - Suddividiamo la traiettoria in segmenti con gusci sferici centrati in $r = 0$



La Forza Elettrostatica è Conservativa

- Consideriamo lo spostamento ds compreso fra i due gusci concentrici passanti per r e $r + ds$

- La carica q_2 è in equilibrio sotto l'effetto delle forze elettrica e meccanica $F_m = -F_{el}$

- La forza elettrica F_{el} in quel punto è $F_{el} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$

- Il lavoro fatto dalla forza meccanica F_m è

$$dW = F_m \cdot ds = -F_{el} \cdot ds = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot ds$$

- Il prodotto scalare $\hat{r} \cdot ds$ è la proiezione di ds lungo la direzione radiale

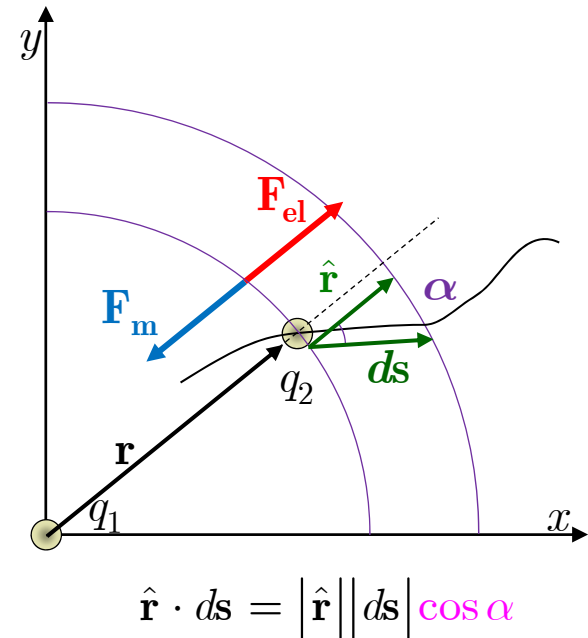
- Calcoliamo esplicitamente il prodotto scalare

$$\hat{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z}{r} \quad ds = dx\hat{e}_x + dy\hat{e}_y + dz\hat{e}_z$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \hat{r} \cdot ds = \frac{xdx + ydy + zdz}{r} \quad \text{È un differenziale esatto}$$

- Calcoliamo dr

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{\partial r}{\partial z} dz$$



La Forza Elettrostatica è Conservativa

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{\partial r}{\partial z} dz$$

- Calcoliamo le derivate

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

- Abbiamo pertanto verificato che

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} = \frac{xdx + ydy + zdz}{r} = dr$$

- Il lavoro per spostare una carica da $\mathbf{r}_A$ a $\mathbf{r}_B$ è pertanto

$$W = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{r}_A}^{\mathbf{r}_B} -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} -\frac{1}{r^2} dr = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{r_A}^{r_B}$$

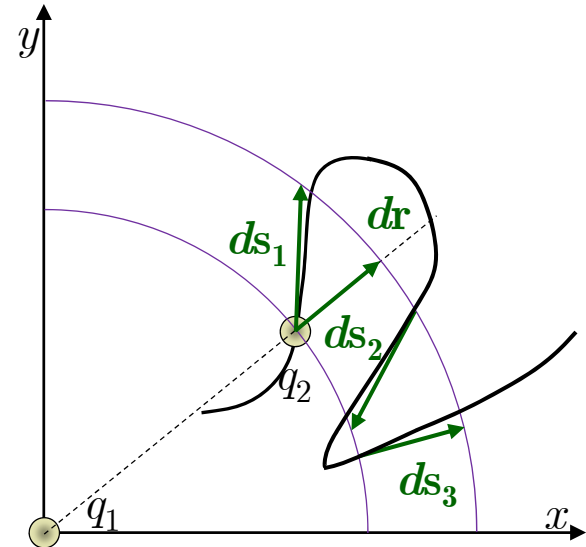
Dipende solo dalle posizioni
iniziale e finale

$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Non sono più vettori

La Forza Elettrostatica è Conservativa

- Una traiettoria arbitraria può intersecare i gusci più di una volta
- Ad esempio la traiettoria in figura
 - Ci sono tre spostamenti all'interno dei gusci fra r e $r + dr$: ds_1 , ds_2 , ds_3
 - Tutti e tre gli spostamenti hanno una proiezione radiale che ha la stessa lunghezza (in modulo): dr
 - Tuttavia due sono nel senso positivo e uno nel senso negativo
 - Il campo elettrico ha sempre lo stesso modulo (il modulo di r è costante sul guscio)
 - Il contributo al lavoro dello spostamento ds_2 cancella uno degli altri due
 - Rimane un solo contributo
- È facile convincersi che rimangono solo i contributi che sommati danno ancora una volta

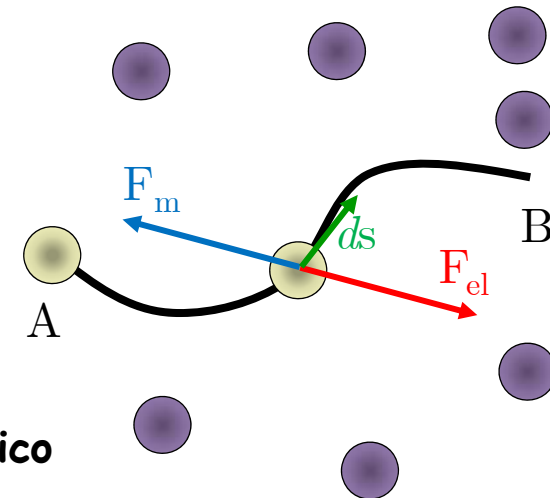


$$W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

- Il lavoro non dipende dalla particolare traiettoria ma solo dal punto di partenza e da quello di arrivo

Energia di un sistema di cariche

- Ci limitiamo a sistemi elettrostatici in cui le cariche sono ferme
 - Come abbiamo visto la forza elettrostatica è conservativa
 - In generale le cariche sono mantenute nelle posizioni da forze non elettriche
- Per definire l'energia del sistema possiamo immaginare di spostare una carica da una posizione all'altra con un movimento estremamente lento, bilanciando istante per istante la forza elettrica che agisce sulla carica in esame
 - In presenza di altre cariche, sulla carica in esame sarà esercitata una forza elettrostatica F_{el}
 - Durante il moto è applicata una forza F_m che bilancia la forza F_{el}
- Nel corso del movimento la forza F_m
 - Potrà "frenare" la carica
 - Angolo fra F_m e ds maggiore di $\pi/2$
 - Lavoro negativo, energia guadagnata dal sistema meccanico, persa dal sistema elettrostatico
 - Potrà "spingere" la carica
 - Angolo fra F_m e ds minore di $\pi/2$
 - Lavoro positivo, energia persa dal sistema meccanico, guadagnata dal sistema elettrostatico

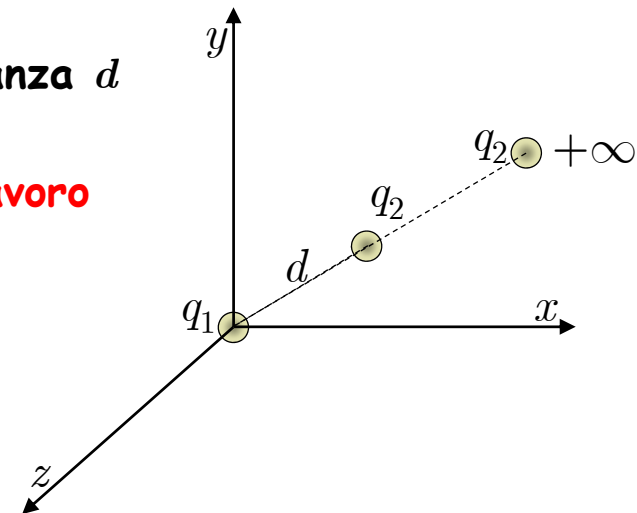


Energia di un sistema di cariche

- L'energia elettrostatica di un sistema di cariche è definita come il lavoro fatto sul sistema (energia guadagnata dal sistema elettrostatico) per costruire una data configurazione di cariche elettriche inizialmente poste all'infinito
- Consideriamo il caso più semplice
 - Un sistema di due cariche positive poste a distanza d
- Trasportiamo la carica q_1 nell'origine
 - Non ci sono altre cariche; non facciamo alcun lavoro
- Trasportiamo successivamente una carica q_2 dall'infinito a una distanza d dalla prima carica
 - Per semplicità lungo una traiettoria rettilinea
 - Il lavoro fatto sul sistema elettrostatico è dato dall'integrale

$$W = \int_{+\infty}^d \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{s}$$

- Il segno di questo integrale deve essere trattato con cura
 - Concettualmente la forza $\mathbf{F}_m$ e lo spostamento sono nello stesso verso
 - Tuttavia il differenziale $d\mathbf{s}$ è positivo quando si allontana dall'origine
 - Il prodotto scalare è negativo



Energia di un sistema di cariche

- Ricordiamo che per ipotesi le due cariche hanno lo stesso segno
 - La forza elettrica F_{el} su q_2 è repulsiva, diretta nel senso positivo dei vettori posizione che partono dall'origine
 - La forza meccanica F_m è diretta verso l'origine

$$\mathbf{F}_m = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

- Lo spostamento $d\mathbf{s}$ si allontana dall'origine
- Ricordiamo il lavoro

$$W = \int_{+\infty}^d dW = \int_{+\infty}^d \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{s} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{+\infty}^d \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s}}{r^2}$$

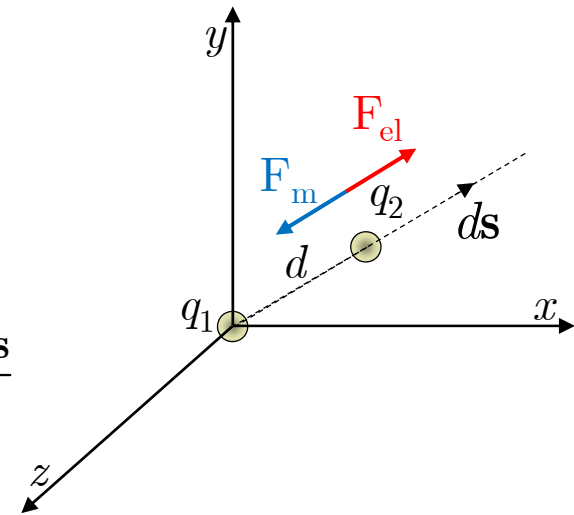
- Ricordiamo inoltre

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{s} = \frac{xdx + ydy + zdz}{r} = dr$$

- Otteniamo

$$W = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{+\infty}^d \frac{1}{r^2} dr = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{+\infty}^d = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d}$$

- Lavoro positivo
 - Energia guadagnata dal sistema elettrostatico



Il Campo Elettrico

- La legge di Coulomb permette di trovare le forze che si esercitano fra le cariche elettriche che costituiscono un sistema elettrostatico
- È tuttavia particolarmente interessante formulare il problema in modo differente
 - Consideriamo un sistema elettrostatico composto da N cariche elettriche $q_1, \dots, q_j, \dots, q_N$ poste nelle posizioni $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_j, \dots, \mathbf{r}_N$
 - Ci si chiede qual è la forza che viene esercitata su una ulteriore carica q_0 posta in una posizione arbitraria $\mathbf{r}_0$
- La legge di Coulomb fornisce immediatamente la risposta

Abbiamo usato il principio di sovrapposizione (linearità)

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_0 q_j}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_j|^2} \hat{\mathbf{r}}_{0j} \quad \hat{\mathbf{r}}_{0j} = \frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_j|}$$

- A questo punto introduciamo il campo elettrico $\mathbf{E}$ nel punto $\mathbf{r}_0$ come il rapporto fra la forza $\mathbf{F}$ e la carica q_0

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \quad \text{evidentemente} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_j|^2} \hat{\mathbf{r}}_{0j}$$

- Il campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ permette di calcolare la forza su una carica arbitraria q in una posizione arbitraria $\mathbf{r}$: $\mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$

Il Campo Elettrico

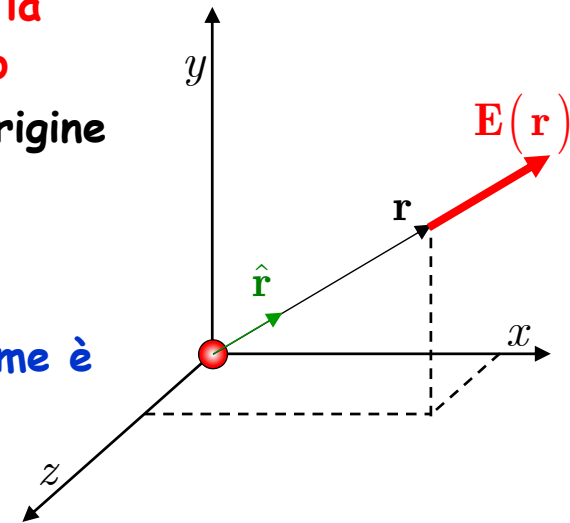
- Per fissare meglio i concetti appena esposti consideriamo in maggiore dettaglio un caso molto semplice
 - Il campo elettrico di una carica puntiforme q_1 posta nel punto $\mathbf{r}_1$

- La formula precedente, specializzata al caso di una sola carica è

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_j|^2} \hat{\mathbf{r}}_{0j} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1|^2} \hat{\mathbf{r}}_{01}$$

- Il vettore $\hat{\mathbf{r}}_{01}$ punta dalla posizione $\mathbf{r}_1$ in cui è posta la carica al punto $\mathbf{r}_0$ dove vogliamo conoscere il campo
- Semplifichiamo ulteriormente ponendo la carica nell'origine $\mathbf{r}_1 = 0$ e chiamando $\mathbf{r}$ invece che $\mathbf{r}_0$ il punto generico
- Il vettore $\hat{\mathbf{r}}_{01}$ diventa il vettore che dall'origine punta a $\mathbf{r}$, cioè $\hat{\mathbf{r}}$
- In definitiva il campo elettrico di una carica puntiforme è

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$



Il Campo Elettrico

- Quanto fatto fino a ora non aggiunge nulla alla legge di Coulomb
 - Vedremo tuttavia che il concetto di campo ha delle implicazioni molto importanti che potremo apprezzare completamente quando tratteremo fenomeni variabili nel tempo
- Nell'esempio descritto le N cariche elettriche avevano una posizione fissata
 - In generale sono tenute nelle posizioni date da forze di tipo non elettrico che mantengono le cariche nelle posizioni date
- Quando introdurremo i conduttori tratteremo problemi in cui le cariche possono muoversi
 - In questi casi occorre assicurarsi che l'introduzione della carica q_0 non modifichi la posizione delle cariche
 - In pratica q_0 deve essere molto piccola
 - Si esprime questo requisito modificando la definizione di campo elettrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{\mathbf{F}}{q_0} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q_0}$$

- Questa espressione definisce matematicamente il campo elettrico
- Tuttavia sperimentalmente si scontra con la circostanza che la carica più piccola osservata è la carica dell'elettrone e
- Sperimentalmente si chiede che la carica q_0 non modifichi il sistema

Il Campo Elettrico

- Continuiamo a elaborare il concetto di campo
- Il sistema di N cariche elettriche $q_1, \dots, q_j, \dots, q_N$ genera una proprietà dello spazio
 - Ad ogni punto dello spazio è assegnato un vettore, il vettore applicato $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, che descrive in modo esauriente l'interazione di una carica arbitraria q con il sistema di N cariche
- Le N cariche sono le sorgenti del campo
 - Si dice anche che le N cariche elettriche generano il campo elettrico $\mathbf{E}$
- Nello spazio vuoto, fissate le cariche elettriche (il loro valore e la loro posizione) il campo elettrico può essere calcolato con la formula

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_j|^2} \hat{\mathbf{r}}_{0j}$$

- Nella materia o in presenza di conduttori occorre sviluppare dei metodi più potenti per calcolare il campo elettrico
 - Si utilizzano le equazioni differenziali alle derivate parziali
 - Si fissano opportune condizioni al contorno

Il Campo Elettrico

- Sottolineiamo un aspetto importante di questa formulazione
 - Il campo elettrico è una proprietà locale dello spazio
 - In linea di principio, potrebbe succedere che
 - In un dato punto dello spazio una carica di valore q Coulomb sente una forza F
 - Nello stesso punto una carica del valore $2q$ potrebbe sentire una forza diversa da $2F$
 - La forza potrebbe dipendere dalla disposizione e dai valori di tutte le cariche che costituiscono il sistema, inclusa la carica $2q$
- Se fosse così l'introduzione del Campo Elettrico sarebbe inutile
 - Invece la conoscenza del campo in un punto e nell'intorno è tutto quello che serve per determinare la forza su una carica arbitraria
 - Non importa come il campo è stato generato
 - Questo è il significato dell'aggettivo "locale"