
Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 21

19.12.2022

**Rottura spontanea della
simmetria. Modello di Higgs
Masse dei bosoni vettoriali
Rinormalizzazione**

anno accademico 2022-2023

Il modello di Higgs[†]

- Ricordiamo l'equazione per un campo vettoriale di massa nulla

- Ad esempio il potenziale elettromagnetico A^μ

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = 0 \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

- L'equazione per A^μ è invariante per trasformazioni di gauge $A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi$

- Sappiamo inoltre che per un campo vettoriale con massa non nulla

$$(\square + m^2) A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = 0 \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu$$

- Abbiamo notato che l'equazione non è invariante per trasformazioni di gauge

- Abbiamo anche visto che la consistenza dell'equazione impone che $\partial_\mu A^\mu = 0$

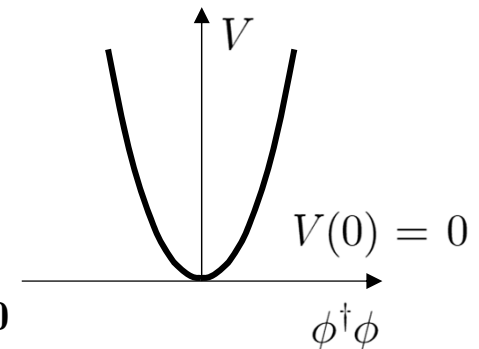
- Consideriamo un campo scalare complesso ϕ (per il momento classico, $\dagger = *$)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad V(\phi) = \frac{1}{4} \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 + \mu^2 \phi^\dagger \phi \quad \lambda, \mu^2 > 0$$

- Si verifica facilmente che la Lagrangiana è invariante per trasformazioni globali di fase $\phi'(x) = e^{-i\alpha} \phi(x)$

- L'Hamiltoniana corrispondente è

$$\mathcal{H}(\phi, \phi^\dagger) = \dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} + \nabla \phi^\dagger \cdot \nabla \phi + V(\phi)$$



- Si verifica che l'Hamiltoniana ha un minimo per $\phi^\dagger \phi = 0$

- [†]Aitchison I., Hey A. - Gauge Theories in Particle Physics (3rd ed.) - Vol. 2 - IoP 2004 § 19.3

Il modello di Higgs

- L'Hamiltoniana precedente può essere vista come limite di un sistema discreto
 - Corrisponde a un oscillatore anarmonico (si può sostituire $\phi^\dagger, \phi \rightarrow x^*, x$)
 - Per $\lambda = 0$ abbiamo l'oscillatore armonico di una particella di massa μ
 - Oscillazioni intorno a $x = 0$
 - Il caso $\lambda \neq 0$ può essere trattato perturbativamente
 - Si possono trovare le soluzioni espandendo intorno a $x = 0$
- Consideriamo adesso ϕ come un campo quantistico
 - Limite continuo di oscillatori quantistici
 - Per $\lambda = 0$ è un campo libero che descrive particelle di massa μ
 - Possiamo sviluppare il campo in operatori di creazione e distruzione

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2k_0}} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + \hat{b}_{\mathbf{k}} e^{ik \cdot x} \right] \quad k_0 = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2}$$

- Si ipotizza che esista uno stato $|0\rangle$ (il vuoto)

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0 \quad \hat{b}_{\mathbf{k}} |0\rangle = 0 \quad \langle 0 | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle = 0$$

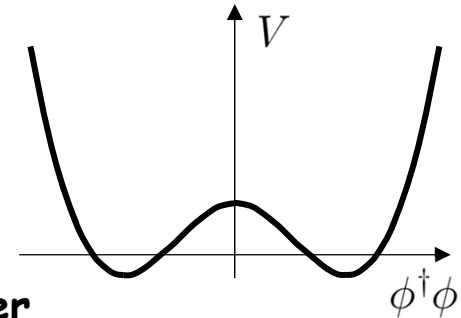
- L'espressione $\langle 0 | \phi | 0 \rangle = 0$ è la forma quantistica che corrisponde all'affermazione classica che il potenziale ha un minimo per $\phi^\dagger \phi = 0$

Il modello di Higgs

- Consideriamo adesso il caso in cui $\lambda \neq 0$ e μ^2 appaia con segno negativo

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda(\phi^\dagger\phi)^2 - \mu^2\phi^\dagger\phi$$

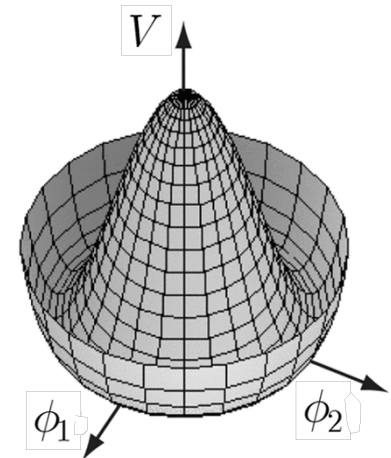
- Il potenziale ha adesso minimi locali per $\phi^\dagger\phi = \frac{2\mu^2}{\lambda}$
- Per $\phi^\dagger\phi = 0$ il sistema adesso non ha un minimo



- Non si può più trattare il sistema "libero" ($\lambda = 0$) per poi trovare correzioni perturbative
- Il potenziale va trattato nel suo complesso fin dall'inizio
- Il sistema è simmetrico nel piano $\phi_1 - \phi_2$
- Ci sono infiniti minimi per

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{4\mu^2}{\lambda} \equiv v^2$$

- Per i valori indicati di ϕ l'Hamiltoniana ha un minimo
- Si possono trovare soluzioni perturbative intorno a questi minimi
- Naturalmente occorre scegliere un particolare minimo fra gli infiniti minimi possibili
- La scelta rompe la simmetria



$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$$

Il modello di Higgs

- Consideriamo ancora il campo ϕ come un campo quantistico (interagente: $\lambda \neq 0$)
 - Nel caso precedente ($+\mu^2$) avevamo assunto
 - Che lo stato vuoto fosse unico (implicitamente)
 - Che il valore di aspettazione del campo nel vuoto fosse uguale al valore classico che minimizzava il potenziale
 - Nel caso in esame ($-\mu^2$) le cose sono differenti
 - Lo stato vuoto non è unico: esistono infiniti stati degeneri
 - Il valore di aspettazione del campo nel vuoto non è nullo
 - Assumiamo (definiamo v) $\langle 0 | \hat{\phi}(x) | 0 \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}$
 - Scriviamo il campo ϕ in un modo alternativo
 - Utilizziamo una rappresentazione che utilizza le coordinate polari

$$\phi(x) = \frac{\rho(x)}{\sqrt{2}} \exp \left[i \frac{\theta(x)}{v} \right]$$

- L'introduzione (convenzionale) di v nell'esponenziale fa sì che ϕ, ρ, θ abbiano tutti le stesse dimensioni
- La condizione di minimo adesso si esprime come: $\rho = v$, per θ arbitrario

Il modello di Higgs

- Utilizzando la nuova espressione di ϕ osserviamo che
 - Un particolare vuoto equivale a un particolare θ
 - Interpretato come oscillatore il sistema esibisce oscillazioni in ρ intorno alla posizione di equilibrio $\rho = v$
- Risulta pertanto conveniente riscrivere ϕ come

$$\hat{\phi}(x) = \frac{v + \hat{h}(x)}{\sqrt{2}} \exp \left[i \frac{\hat{\theta}(x)}{v} \right]$$

- I nuovi campi introdotti hanno valore di aspettazione nullo

$$\langle 0 | \hat{h} | 0 \rangle = 0 \quad \langle 0 | \hat{\theta} | 0 \rangle = 0 \quad \langle 0 | \hat{\phi} | 0 \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}$$

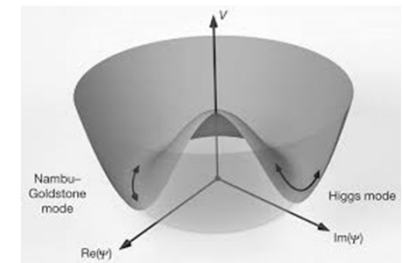
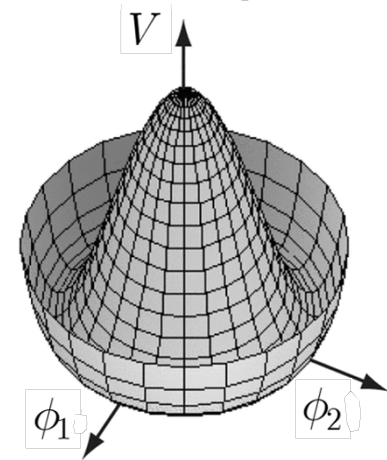
- Utilizzando i nuovi campi la Lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \hat{h} \partial^\mu \hat{h} - \mu^2 \hat{h}^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \hat{\theta} \partial^\mu \hat{\theta} + \frac{\mu^4}{\lambda} + \dots$$

- I puntini rappresentano termini cubici e quartici in $\hat{h}$ e $\hat{\theta}$ (interazioni)
- Il termine μ^4/λ proviene dal valore minimo del potenziale
- La lagrangiana descrive
 - Un campo reale $h(x)$ che ha massa $\sqrt{2}\mu$
 - Un campo reale $\theta(x)$ con massa nulla

modo di Higgs
modo di Goldstone

$$\phi(x) = \frac{\rho(x)}{\sqrt{2}} \exp \left[i \frac{\theta(x)}{v} \right]$$



Il modello di Higgs

- Consideriamo il modello precedente per il quale richiediamo adesso l'invarianza di gauge locale per il gruppo $U(1)$: $\phi'(x) = \exp[-i\alpha(x)]\phi(x)$
- Introduciamo la derivata covariante: $\partial^\mu \rightarrow \partial^\mu + iqA^\mu$
 - In corrispondenza alla trasformazione di fase $\rightarrow A'^\mu = A^\mu + \frac{1}{q}\partial^\mu\alpha(x)$

- Aggiungiamo la Lagrangiana del campo elettromagnetico (senza massa)

$$\mathcal{L} = \left[(\partial_\mu + iqA_\mu)\phi \right]^\dagger \left[(\partial^\mu + iqA^\mu)\phi \right] - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\lambda(\phi^\dagger\phi)^2 + \mu^2\phi^\dagger\phi$$

- Notiamo che questo sistema contiene 4 gradi di libertà
 - Due gradi libertà del campo complesso ϕ
 - Due gradi di libertà del campo senza massa A^μ
- Anche in questo caso è conveniente utilizzare la rappresentazione per ϕ

$$\phi(x) = \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}} \exp\left[i \frac{\theta(x)}{v}\right]$$

- Notiamo che l'introduzione di A^μ rende il campo θ completamente arbitrario
 - Qualsiasi trasformazione di fase di ϕ può essere compensata da una trasformazione di gauge per A^μ che lascia la Lagrangiana invariante

Il modello di Higgs

- Tramite le equazioni di Eulero-Lagrange si ottiene l'equazione per A^μ

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j^\mu \quad j^\mu = \phi^\dagger \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^\dagger) \phi - 2q^2 A^\mu \phi^\dagger \phi$$

- Il campo è accoppiato alla corrente
- Si può dimostrare che l'inserimento della rappresentazione di ϕ in coordinate polari porta alla seguente espressione per j^μ

$$j^\mu = -v^2 q^2 \left(A^\mu - \frac{\partial^\mu \theta}{vq} \right) + \dots$$

- I puntini sono termini quadratici e cubici nei campi
 - Ulteriori contributi alla corrente
- Inseriamo nell'equazione per A^μ

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = -v^2 q^2 \left(A^\mu - \frac{\partial^\mu \theta}{vq} \right) + \dots$$

- In termine fra parentesi ha esattamente la forma di una trasformazione di gauge per il campo elettromagnetico $A'^\mu = A^\mu - \frac{1}{q} \frac{\partial^\mu \theta}{v}$
- Sappiamo che la trasformazione lascia invariato il primo membro
L'equazione diventa

$$\square A'^\mu + v^2 q^2 A'^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A'^\nu) = \dots$$

- È l'equazione di un campo vettoriale di massa $m = vq$!



Il modello di Higgs

- La trasformazione di gauge applicata al campo A^μ è

$$A'^\mu = A^\mu - \frac{1}{q} \frac{\partial^\mu \theta}{v}$$

- A questa deve corrispondere una trasformazione di fase per il campo scalare

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha(x)} \phi(x) \quad \alpha(x) = -\frac{\theta(x)}{v}$$

- Ricordando la rappresentazione

$$\phi(x) = \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}} \exp\left[i \frac{\theta(x)}{v}\right] \longrightarrow \phi'(x) = \phi(x) \exp\left[-i \frac{\theta}{v}\right] = \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}}$$

- Il campo θ è sparito: è stato assorbito dal campo A'^μ gauged away
- Il campo vettoriale ha massa $m = vq$ e ha tre stati di polarizzazione
- Il numero totale di gradi di libertà è sempre 4
- Nel gauge che stiamo considerando
 - Il campo ϕ' è reale e pertanto ha un solo grado di libertà
 - Il campo vettoriale A'^μ ha massa $m = vq$ e ha tre gradi di libertà
- Nel gauge originale
 - Il campo ϕ è complesso e ha due gradi di libertà
 - Il campo vettoriale A^μ ha massa nulla e ha due gradi di libertà
- Il sistema è sempre lo stesso
 - L'interpretazione in termini di particelle dipende dal gauge

Masse dei Bosoni: rottura della simmetria

- Abbiamo osservato (senza dimostrarlo) che la rinormalizzabilità della teoria richiede che i bosoni vettoriali siano senza massa
 - In contrasto con la natura a corto range dell'interazione debole
- Il problema viene risolto
 - Con l'introduzione di un termine gauge-invariante nella lagrangiana che rappresenta una particella scalare con auto-interazione

- Con la rottura spontanea della simmetria
- Il campo di Higgs (la particella scalare) è un doppietto di isospin debole $T = 1/2$ con ipercarica $Y = 1$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} \phi^+ &= \frac{\theta_2 + i\theta_1}{\sqrt{2}} \\ \phi^0 &= \frac{\theta_4 - i\theta_3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- La sua Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = (i\partial_\mu \phi)^\dagger (i\partial^\mu \phi) - V(\phi) \equiv |i\partial_\mu \phi|^2 - V(\phi) \quad V(\phi) = \mu^2 (\phi^\dagger \phi) + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$

- L'interazione del campo di Higgs con i bosoni vettoriali viene introdotta con la sostituzione dell'operatore derivazione ∂_μ con quello covariante D_μ

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_1 \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{W}_\mu(x) + ig_2 \frac{Y}{2} B_\mu$$

- Sostituendo otteniamo, per la parte cinetica, quella importante per le masse

$$\mathcal{L} = \left| \partial_\mu \phi + ig_1 \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{W}_\mu(x) \phi + ig_2 \frac{Y}{2} B_\mu \phi \right|^2 + \dots$$

Masse dei Bosoni: rottura della simmetria

- La parte che dà origine alle masse è $\mathcal{L}_M = \left| \left(ig_1 \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{W}_\mu(x) + ig_2 \frac{Y}{2} B_\mu \right) \phi \right|^2$

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{4} \left| \left[g_1 \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} + g_2 \begin{pmatrix} B_\mu & 0 \\ 0 & B_\mu \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \right|^2$$

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{4} \left| \begin{pmatrix} g_1 W_\mu^3 + g_2 B_\mu & g_1 (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ g_1 (W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -W_\mu^3 + g_2 B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \right|^2$$

- La rottura spontanea della simmetria si ottiene assumendo che il campo ϕ abbia un valore di aspettazione nel vuoto $\phi_v = \langle 0 | \phi | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$ diverso da zero
 - Il campo con valore di aspettazione diverso da zero è θ_4 $\theta_4 = v + h(x)$
 - Gli altri hanno valore di aspettazione nullo: $\langle \theta_1 \rangle = \langle \theta_2 \rangle = \langle \theta_3 \rangle = \langle h \rangle = 0$
- In termini di campi con valori di aspettazione nulli il campo di Higgs si esprime

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_2(x) + i\theta_1(x) \\ v + h(x) - i\theta_3(x) \end{pmatrix} = \phi_v + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_2(x) + i\theta_1(x) \\ h(x) - i\theta_3(x) \end{pmatrix}$$

- I termini che generano la massa dei bosoni sono quelli che dipendono da ϕ_v

Masse dei Bosoni: rottura della simmetria

- Isolando il termine che contiene il valore di aspettazione nel vuoto ϕ_v otteniamo

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{8} \left| \begin{pmatrix} g_1 W_\mu^3 + g_2 B_\mu & g_1 (W_\mu^1 - i W_\mu^2) \\ g_1 (W_\mu^1 + i W_\mu^2) & -W_\mu^3 + g_2 B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right|^2$$

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{8} \left| g_1 v \left[(W^1)^\mu - i(W^2)_\mu \right] \right|^2 + \frac{1}{8} \left| v \left(-g_1 W_\mu^3 + g_2 B_\mu \right) \right|^2$$

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp i W_\mu^2}{\sqrt{2}}$$

$$\mathcal{L}_M = \left(\frac{1}{2} v g_1 \right)^2 (W^+)_\mu (W^-)^\mu + \frac{1}{8} v^2 \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}$$

- Il primo termine ha la forma di un termine di massa per un bosone vettoriale carico di massa

$$M_W = \frac{1}{2} v g_1$$

$$M_W^2 (W^+)_\mu (W^-)^\mu$$

- Il secondo termine, una forma quadratica non diagonale rispetto ai campi W_μ^3 e B_μ

- Può essere messa in forma diagonale diagonalizzando la matrice

$$\begin{pmatrix} g_1^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_2^2 \end{pmatrix}$$

Masse dei Bosoni: rottura della simmetria

- Troviamo gli autovalori della matrice

$$\left| \begin{pmatrix} g_1^2 - \lambda & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_2^2 - \lambda \end{pmatrix} \right| = g_1^2 g_2^2 - \lambda(g_1^2 + g_2^2) + \lambda^2 - g_1^2 g_2^2 = \lambda^2 - \lambda(g_1^2 + g_2^2) \quad \lambda = \begin{cases} 0 \\ g_1^2 + g_2^2 \end{cases}$$

- L'equazione agli autovalori $Mu = \lambda u$ per $\lambda = 0$ $\begin{pmatrix} g_1^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $g_1 x - g_2 y = 0$ una soluzione è $w = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{g_1}{g_2} \end{pmatrix}$
- Normalizziamo la soluzione

$$N^2 = |w|^2 = \frac{g_1^2 + g_2^2}{g_2^2} \quad u_1 = \frac{w}{N} = \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \begin{pmatrix} g_2 \\ g_1 \end{pmatrix}$$

- Definiamo

$$\sin \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad \cos \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad \tan \theta_W = \frac{g_2}{g_1}$$

- Le soluzioni (ortogonali, M è simmetrica) sono pertanto

$$u_1 = \begin{pmatrix} \sin \theta_W \\ \cos \theta_W \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta_W \\ -\sin \theta_W \end{pmatrix}$$



Masse dei Bosoni: rottura della simmetria

- Diagonalizzare la matrice si ottiene passando ad una nuova base ruotando i vettori con $R(\theta_W)$
- Per la nuova base otteniamo pertanto le combinazioni lineari

$$R(\theta_W) = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix}$$

$$A_\mu = \cos \theta_W B_\mu + \sin \theta_W W_\mu^3$$

$$Z_\mu = -\sin \theta_W B_\mu + \cos \theta_W W_\mu^3$$

- Con queste combinazioni lineari il termine della lagrangiana diventa

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= \frac{1}{8} \left| v \left(-g_1 W_\mu^3 + g_2 B_\mu \right) \right|^2 = \frac{1}{8} v^2 \left(g_1^2 + g_2^2 \right) \frac{\left| \left(g_1 W_\mu^3 - g_2 B_\mu \right) \right|^2}{g_1^2 + g_2^2} + 0 \frac{\left| \left(g_1 W_\mu^3 + g_2 B_\mu \right) \right|^2}{g_1^2 + g_2^2} \\ &= \frac{1}{8} v^2 \left(g_1^2 + g_2^2 \right) \left| \left(\cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu \right) \right|^2 + 0 \left| \left(\sin \theta_W W_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu \right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} M_Z^2 \left| Z_\mu \right|^2 + 0 \left| A_\mu \right|^2 \end{aligned}$$

$$M_Z = \frac{1}{2} v \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$$

- A_μ corrisponde all'autovalore $\lambda = 0$
 - È il fotone, il mediatore delle correnti elettromagnetiche
- Z_μ corrisponde all'autovalore $\lambda = g_1^2 + g_2^2$
 - È il bosone Z^0 , il mediatore delle correnti neutre

Le costanti di accoppiamento

- La rottura spontanea della simmetria permette di trovare relazioni fra le masse e le costanti di accoppiamento
- Il valore di aspettazione nel vuoto del campo di Higgs è $v = \langle \phi \rangle$

$$M_W = \frac{1}{2} g_1 v \quad M_Z = \frac{1}{2} v \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \quad \text{ovviamente}$$

$$\frac{M_W}{M_Z} = \cos \theta_W$$

- Qual è la relazione di g_1 con G (Fermi) ?
- Ricordiamo la definizione della correnti $J_\mu = J^+$

$$J_+ = \bar{\ell}_L \gamma_\mu \tau_+ \ell_L = \bar{\nu}_e \gamma_\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) e = J_\mu$$

- Differisce dalle correnti utilizzate per il decadimento β per il fattore $\frac{1}{2}$
- L'ampiezza per la interazione di Fermi con la corrente qui definita è
- I bosoni $W^\pm$ hanno massa M_W e un propagatore (vedi diapositiva 609)

$$\mathfrak{M} = \frac{4G}{\sqrt{2}} J_+^\mu J_\mu^+$$

- Il propagatore è proporzionale a $\frac{1}{M_W^2 - q^2}$

$$\mathfrak{M} = \frac{g_1^2}{2} \frac{1}{M_W^2 - q^2} J_+^\mu J_\mu^+ \xrightarrow{q^2 \rightarrow 0} \frac{g_1^2}{2M_W^2} J_+^\mu J_\mu^+$$

da cui

$$\frac{g_1^2}{2M_W^2} = \frac{4G}{\sqrt{2}}$$

Le costanti di accoppiamento

- Possiamo calcolare il valore di aspettazione del campo di Higgs nel vuoto

$$M_W = \frac{1}{2} g_1 v \quad M_Z = \frac{1}{2} v \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \quad \frac{g_1^2}{2M_W^2} = \frac{4G}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{4G}{\sqrt{2}} = \frac{g_1^2}{2M_W^2} = \frac{g_1^2}{2\left(\frac{1}{2} g_1 v\right)^2} = \frac{2}{v^2} \quad \boxed{\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2v^2}} \quad v^2 = \frac{1}{\sqrt{2}G}$$

- Utilizzando il valore di $G = 1.16 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ si trova $v \approx 246 \text{ GeV}$
- Ricordiamo inoltre
 $e = g_1 \sin \theta_W = g_2 \cos \theta_W$ otteniamo $G = \frac{e^2}{4\sqrt{2}M_W^2 \sin^2 \theta_W} = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}M_W^2 \sin^2 \theta_W}$
- Otteniamo la previsione della massa del bosone W

$$M_W = \sqrt{\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2} \sin^2 \theta_W}} \quad M_W = \frac{37.38}{\sin \theta_W}$$

- Utilizzando la misura sperimentale $\sin^2 \theta_W \approx 0.23$

$$M_W \approx 78 \text{ GeV} \quad \cos^2 \theta_W = 0.77$$

$$M_Z = \frac{M_W}{\cos \theta_W} \approx 89 \text{ GeV}$$

- Differiscono molto dai valori sperimentali
- Calcolo al primo ordine
 - Correzioni radiative importanti

Le costanti di accoppiamento

- La unificazione delle forze deboli ed elettromagnetica non è completa:
 - Abbiamo introdotto due costanti di accoppiamento indipendenti g_1 e g_2
- Una completa unificazione richiederebbe una unica costante di accoppiamento
- La rottura spontanea e la forma della corrente elettromagnetica fissano il rapporto fra le due costanti

$$g_1 \sin \theta_W = g_2 \cos \theta_W$$

- Per definire il modello occorre misurare 3 quantità: ad esempio g_1 , g_2 , v
 - Sono possibili altre scelte:
 - La carica elettrica (α) e le masse dei bosoni W e Z
 - Le grandezze misurate con gli errori più piccoli: α , G , M_Z
- Ricordiamo le più importanti relazioni al "tree level"
 - Senza correzioni di ordine superiore

$$\cos^2 \theta_W = \frac{g_2^2}{g_1^2 + g_2^2} \quad \sin^2 \theta_W = \frac{g_1^2}{g_1^2 + g_2^2}$$

Le costanti di accoppiamento

- Infine riepiloghiamo le relazioni fra le costanti di accoppiamento
 - Sono valide solo a livello d'albero

$$e = g_1 \sin \theta_W = g_2 \cos \theta_W$$

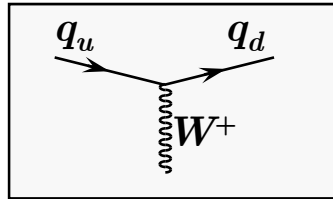
$$\frac{g_1^2}{2M_W^2} = \frac{4G}{\sqrt{2}}$$

$$G = \frac{e^2}{4\sqrt{2}M_W^2 \sin^2 \theta_W} = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}M_W^2 \sin^2 \theta_W}$$

$$G = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}M_Z^2 \cos^2 \theta_W \sin^2 \theta_W}$$

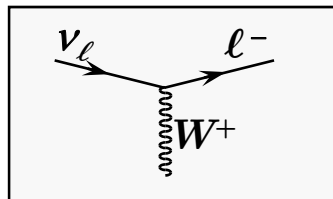
Interazioni nel modello standard

Corrente Carica quark



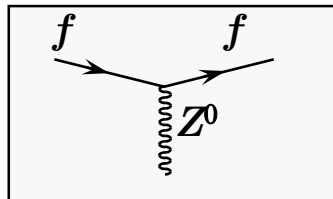
$$J_{\mu}^{-} = V_{q_u q_d} \frac{-ie}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \bar{q}_u \gamma_{\mu} \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) q_d$$

Corrente Carica leptoni



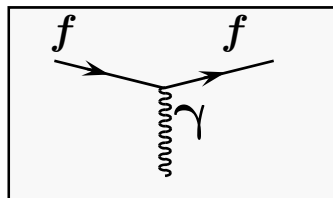
$$J_{\mu}^{-} = \frac{-ie}{\sqrt{2} \sin \theta_W} \bar{\nu}_{\ell} \gamma_{\mu} \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \ell$$

Corrente neutra



$$J_{\mu}^{NC} = \frac{-ie}{\cos \theta_W \sin \theta_W} \frac{1}{2} \bar{f} \gamma_{\mu} \left[(1 - \gamma^5) T_f^3 - 2Q_f \sin^2 \theta_W \right] f$$

Corrente
elettromagnetica



$$J_{\mu}^{em} = -ie Q_f \bar{f} \gamma_{\mu} f$$

Interazioni nel modello standard

- Abbiamo detto che la corrente neutra per i fermioni carichi contiene una parte Left-Handed e una parte Right-Handed
 - Mettiamo in evidenza questo aspetto

- Partiamo da

$$J_\mu^{NC} = \frac{-ie}{\cos \theta_W \sin \theta_W} \frac{1}{2} \bar{f} \gamma_\mu [v_f - a_f \gamma^5] f$$

- Vogliamo trovare i coefficienti g_R e g_L tali che

$$J_\mu^{NC} = \frac{-ie}{\cos \theta_W \sin \theta_W} \frac{1}{2} \bar{f} \gamma_\mu [g_R^f (1 + \gamma^5) + g_L^f (1 - \gamma^5)] f$$

- Deve essere

$$g_R^f (1 + \gamma^5) + g_L^f (1 - \gamma^5) = v_f - a_f \gamma^5$$

- Da cui

$$\begin{cases} g_R^f + g_L^f = v_f \\ g_R^f - g_L^f = -a_f \end{cases} \quad \begin{cases} g_R^f = \frac{v_f - a_f}{2} \\ g_L^f = \frac{v_f + a_f}{2} \end{cases}$$

Interazioni nel modello standard

- Ricordiamo che per un fermione f

$$v_f = T_f^3 - 2Q_f \sin^2 \theta_W \quad a_f = T_f^3$$

$$\begin{cases} g_R^f = \frac{v_f - a_f}{2} \\ g_L^f = \frac{v_f + a_f}{2} \end{cases}$$

- Esempi

- Per i leptoni

$$\begin{cases} g_R^f = -Q_f \sin \theta_W \\ g_L^f = T_f^3 - Q_f \sin \theta_W \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_R^e = \sin^2 \theta_W \\ g_L^e = -\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \end{cases} \quad \begin{cases} g_R^\nu = 0 \\ g_L^\nu = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Per i quark

$$\begin{cases} g_R^u = -\frac{2}{3} \sin \theta_W \\ g_L^u = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin \theta_W \end{cases} \quad \begin{cases} g_R^d = \frac{1}{3} \sin \theta_W \\ g_L^d = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin \theta_W \end{cases}$$



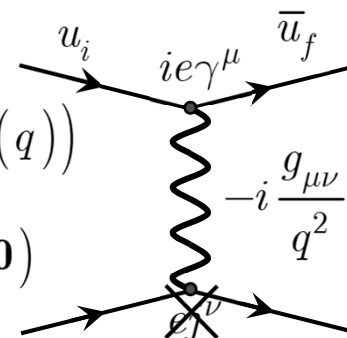
La lagrangiana completa !!

- <https://www.symmetrymagazine.org/article/the-deconstructed-standard-model-equation>

$$\begin{aligned}
 & 1 \quad -\frac{1}{2}\partial_\nu g_\mu^a \partial_\nu g_\mu^a - g_s f^{abc} \partial_\mu g_\nu^a \partial_\mu g_\nu^b g_\nu^c - \frac{1}{4} g_s^2 f^{abc} f^{ade} g_\mu^b g_\nu^c g_\mu^d g_\nu^e + \\
 & \quad \frac{1}{2} i g_s^2 (\bar{q}_i^\alpha \gamma^\mu q_j^\alpha) g_\mu^a + G^a \partial^2 G^a + g_s f^{abc} \partial_\mu G^a G^b g_\mu^c - \partial_\nu W_\mu^+ \partial_\nu W_\mu^- - \\
 & 2 \quad M^2 W_\mu^+ W_\mu^- - \frac{1}{2} \partial_\nu Z_\mu^0 \partial_\nu Z_\mu^0 - \frac{1}{2 c_w^2} M^2 Z_\mu^0 Z_\mu^0 - \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial_\mu H - \\
 & \quad \frac{1}{2} m_h^2 H^2 - \partial_\mu \phi^+ \partial_\mu \phi^- - M^2 \phi^+ \phi^- - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^0 \partial_\mu \phi^0 - \frac{1}{2 c_w^2} M \phi^0 \phi^0 - \beta_h \left[\frac{2M^2}{g^2} + \right. \\
 & \quad \left. \frac{2M}{g} H + \frac{1}{2} (H^2 + \phi^0 \phi^0 + 2\phi^+ \phi^-) \right] + \frac{2M^4}{g^2} \alpha_h - i g c_w [\partial_\nu Z_\mu^0 (W_\mu^+ W_\nu^- - \\
 & \quad W_\mu^- W_\nu^+) - Z_\nu^0 (W_\mu^+ \partial_\nu W_\mu^- - W_\mu^- \partial_\nu W_\mu^+) + Z_\mu^0 (W_\nu^+ \partial_\nu W_\mu^- - \\
 & \quad W_\nu^- \partial_\nu W_\mu^+)] - i g s_w [\partial_\nu A_\mu (W_\mu^+ W_\nu^- - W_\nu^+ W_\mu^-) - A_\nu (W_\mu^+ \partial_\nu W_\mu^- - \\
 & \quad W_\mu^- \partial_\nu W_\mu^+) + A_\mu (W_\nu^+ \partial_\nu W_\mu^- - W_\nu^- \partial_\nu W_\mu^+)] - \frac{1}{2} g^2 W_\mu^+ W_\mu^- W_\nu^+ W_\nu^- + \\
 & \quad \frac{1}{2} g^2 W_\mu^+ W_\nu^- W_\mu^+ W_\nu^- + g^2 c_w^2 (Z_\mu^0 W_\mu^+ Z_\nu^0 W_\nu^- - Z_\mu^0 Z_\nu^0 W_\mu^+ W_\nu^-) + \\
 & \quad g^2 s_w^2 (A_\mu W_\mu^+ A_\nu W_\nu^- - A_\mu A_\nu W_\mu^+ W_\nu^-) + g^2 s_w c_w [A_\mu Z_\nu^0 (W_\mu^+ W_\nu^- - \\
 & \quad W_\nu^+ W_\mu^-) - 2 A_\mu Z_\mu^0 W_\nu^+ W_\nu^-] - g \alpha [H^3 + H \phi^0 \phi^0 + 2 H \phi^+ \phi^-] - \\
 & \quad \frac{1}{8} g^2 \alpha_h [H^4 + (\phi^0)^4 + 4(\phi^+ \phi^-)^2 + 4(\phi^0)^2 \phi^+ \phi^- + 4 H^2 \phi^+ \phi^- + 2(\phi^0)^2 H^2] - \\
 & \quad g M W_\mu^+ W_\mu^- H - \frac{1}{2} g \frac{M}{c_w^2} Z_\mu^0 Z_\mu^0 H - \frac{1}{2} i g [W_\mu^+ (\phi^0 \partial_\mu \phi^- - \phi^- \partial_\mu \phi^0) - \\
 & \quad W_\mu^- (\phi^0 \partial_\mu \phi^+ - \phi^+ \partial_\mu \phi^0)] + \frac{1}{2} g [W_\mu^+ (H \partial_\mu \phi^- - \phi^- \partial_\mu H) - W_\mu^- (H \partial_\mu \phi^+ - \\
 & \quad \phi^+ \partial_\mu H)] + \frac{1}{2} g \frac{1}{c_w} (Z_\mu^0 (H \partial_\mu \phi^0 - \phi^0 \partial_\mu H) - i g \frac{s_w^2}{c_w} M Z_\mu^0 (W_\mu^+ \phi^- - W_\mu^- \phi^+) + \\
 & \quad i g s_w M A_\mu (W_\mu^+ \phi^- - W_\mu^- \phi^+) - i g \frac{1-2c_w^2}{2c_w} Z_\mu^0 (\phi^+ \partial_\mu \phi^- - \phi^- \partial_\mu \phi^+) + \\
 & \quad i g s_w A_\mu (\phi^+ \partial_\mu \phi^- - \phi^- \partial_\mu \phi^+) - \frac{1}{4} g^2 W_\mu^+ W_\mu^- [H^2 + (\phi^0)^2 + 2\phi^+ \phi^-] - \\
 & \quad \frac{1}{4} g^2 \frac{1}{c_w^2} Z_\mu^0 Z_\mu^0 [H^2 + (\phi^0)^2 + 2(2s_w^2 - 1)^2 \phi^+ \phi^-] - \frac{1}{2} g^2 \frac{s_w^2}{c_w} Z_\mu^0 \phi^0 (W_\mu^+ \phi^- + \\
 & \quad W_\mu^- \phi^+) - \frac{1}{2} i g^2 \frac{s_w^2}{c_w} Z_\mu^0 H (W_\mu^+ \phi^- - W_\mu^- \phi^+) + \frac{1}{2} g^2 s_w A_\mu \phi^0 (W_\mu^+ \phi^- + \\
 & \quad W_\mu^- \phi^+) + \frac{1}{2} i g^2 s_w A_\mu H (W_\mu^+ \phi^- - W_\mu^- \phi^+) - g^2 \frac{s_w}{c_w} (2c_w^2 - 1) Z_\mu^0 A_\mu \phi^+ \phi^- - \\
 & \quad g^4 s_w^2 A_\mu A_\mu \phi^+ \phi^-] - \bar{e}^\lambda (\gamma \partial + m_e^\lambda) e^\lambda - \bar{\nu}^\lambda \gamma \partial \nu^\lambda - \bar{u}_j^\lambda (\gamma \partial + m_u^\lambda) u_j^\lambda - \\
 & 3 \quad \bar{d}_j^\lambda (\gamma \partial + m_d^\lambda) d_j^\lambda + i g s_w A_\mu [-(\bar{e}^\lambda \gamma^\mu e^\lambda) + \frac{2}{3} (\bar{u}_j^\lambda \gamma^\mu u_j^\lambda) - \frac{1}{3} (\bar{d}_j^\lambda \gamma^\mu d_j^\lambda)] + \\
 & \quad \frac{i g}{4 c_w} Z_\mu^0 [(\bar{\nu}^\lambda \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \nu^\lambda) + (\bar{e}^\lambda \gamma^\mu (4s_w^2 - 1 - \gamma^5) e^\lambda) + (\bar{u}_j^\lambda \gamma^\mu (\frac{4}{3} s_w^2 - \\
 & \quad 1 - \gamma^5) u_j^\lambda) + (\bar{d}_j^\lambda \gamma^\mu (1 - \frac{8}{3} s_w^2 - \gamma^5) d_j^\lambda)] + \frac{i g}{2 \sqrt{2}} W_\mu^+ [(\bar{\nu}^\lambda \gamma^\mu (1 + \gamma^5) e^\lambda) + \\
 & \quad (\bar{u}_j^\lambda \gamma^\mu (1 + \gamma^5) C_{\lambda\kappa} d_j^\kappa)] + \frac{i g}{2 \sqrt{2}} W_\mu^- [(\bar{e}^\lambda \gamma^\mu (1 + \gamma^5) \nu^\lambda) + (\bar{d}_j^\kappa C_{\lambda\kappa}^\dagger \gamma^\mu (1 + \\
 & \quad \gamma^5) u_j^\lambda)] + \frac{i g}{2 \sqrt{2}} \frac{m_\lambda^2}{M} [-\phi^+ (\bar{\nu}^\lambda (1 - \gamma^5) e^\lambda) + \phi^- (\bar{e}^\lambda (1 + \gamma^5) \nu^\lambda)] - \\
 & 4 \quad \frac{g}{2} \frac{m_\lambda^2}{M} [H (\bar{e}^\lambda e^\lambda) + i \phi^0 (\bar{e}^\lambda \gamma^5 e^\lambda)] + \frac{i g}{2 M \sqrt{2}} \phi^+ [-m_d^\kappa (\bar{u}_j^\lambda C_{\lambda\kappa} (1 - \gamma^5) d_j^\kappa) + \\
 & \quad m_u^\lambda (\bar{u}_j^\lambda C_{\lambda\kappa} (1 + \gamma^5) d_j^\kappa) + \frac{i g}{2 M \sqrt{2}} \phi^- [m_d^\lambda (\bar{d}_j^\lambda C_{\lambda\kappa}^\dagger (1 + \gamma^5) u_j^\kappa) - m_u^\kappa (\bar{d}_j^\lambda C_{\lambda\kappa}^\dagger (1 - \\
 & \quad \gamma^5) u_j^\kappa) - \frac{g}{2} \frac{m_\lambda^2}{M} H (\bar{u}_j^\lambda u_j^\lambda) - \frac{g}{2} \frac{m_\lambda^2}{M} H (\bar{d}_j^\lambda d_j^\lambda) + \frac{i g}{2} \frac{m_\lambda^2}{M} \phi^0 (\bar{u}_j^\lambda \gamma^5 u_j^\lambda) - \\
 & \quad \frac{i g}{2} \frac{m_\lambda^2}{M} \phi^0 (\bar{d}_j^\lambda \gamma^5 d_j^\lambda)] + \bar{X}^+ (\partial^2 - M^2) X^+ + \bar{X}^- (\partial^2 - M^2) X^- + \bar{X}^0 (\partial^2 - \\
 & 5 \quad \frac{M_\lambda^2}{c_w^2}) X^0 + \bar{Y} \partial^2 Y + i g c_w W_\mu^+ (\partial_\mu \bar{X}^0 X^- - \partial_\mu \bar{X}^- X^0) + i g s_w W_\mu^+ (\partial_\mu \bar{Y} X^- - \\
 & \quad \partial_\mu \bar{X}^+ Y) + i g c_w W_\mu^- (\partial_\mu \bar{X}^- X^0 - \partial_\mu \bar{X}^0 X^+) + i g s_w W_\mu^- (\partial_\mu \bar{X}^- Y - \\
 & \quad \partial_\mu \bar{Y} X^+) + i g c_w Z_\mu^0 (\partial_\mu \bar{X}^+ X^+ - \partial_\mu \bar{X}^- X^-) + i g s_w A_\mu (\partial_\mu \bar{X}^+ X^+ - \\
 & \quad \partial_\mu \bar{X}^- X^-) - \frac{1}{2} g M [\bar{X}^+ X^+ H + \bar{X}^- X^- H + \frac{1}{c_w} \bar{X}^0 X^0 H] + \\
 & \quad \frac{1-2c_w^2}{2c_w} i g M [\bar{X}^+ X^0 \phi^+ - \bar{X}^- X^0 \phi^-] + \frac{1}{2 c_w} i g M [\bar{X}^0 X^- \phi^+ - \bar{X}^0 X^+ \phi^-] + \\
 & \quad i g M s_w [\bar{X}^0 X^- \phi^+ - \bar{X}^0 X^+ \phi^-] + \frac{1}{2} i g M [\bar{X}^+ X^+ \phi^0 - \bar{X}^- X^- \phi^0]
 \end{aligned}$$

Correzioni radiative. Rinormalizzazione

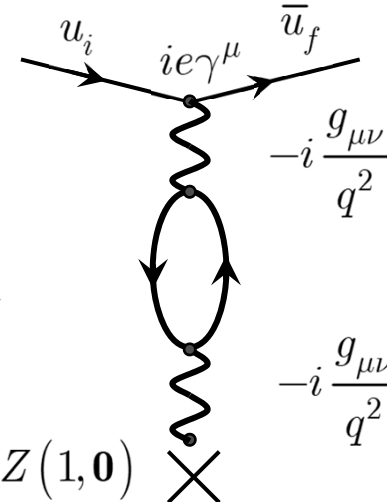
- Abbiamo studiato la diffusione di una carica da un potenziale statico
- Calcolo al primo ordine con un diagramma di Feynman
 - Agli elementi del diagramma corrispondono
- L'ampiezza invariante è $-i\mathfrak{M} = \left(ie\bar{u}_f \gamma^\mu u_i \right) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left(-iej^\nu(q) \right)$
 - Nel caso statico ($q^2 \rightarrow 0$)
 $j^\nu(x) = (\rho, \rho\mathbf{v}) \rightarrow (-Z\delta(x), 0) \quad -iej^\nu(q) = -iZe(1, 0)$
- Si può calcolare la sezione d'urto
 - La sezione d'urto calcolata può essere utilizzata per misurare il valore sperimentale della carica elettrica
 - La misura della sezione d'urto per $q^2 \rightarrow 0$ permette di ricavare il valore di e
- All'ordine successivo l'ampiezza diventa



$$-i\mathfrak{M} = \left(ie\bar{u}_f \gamma^\mu u_i \right) \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} I^{\rho\sigma}(q^2) \frac{-ig_{\sigma\nu}}{q^2} \left(-ij^\nu(q) \right)$$

$$I^{\rho\sigma} = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^2} \text{Tr} \left\{ ie\gamma^\rho \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} ie\gamma^\sigma \frac{i(\not{q} - \not{p} + m)}{(q - p)^2 - m^2} \right\}$$

$$-iej^\nu(q) = -ieZ(1, 0)$$



Correzioni radiative. Rinormalizzazione

- Il calcolo di $I^{\alpha\beta}$ è molto laborioso e può essere trovato in testi di Teoria dei Campi Quantistici

$$I^{\rho\sigma} = -ig^{\rho\sigma}q^2 I(q^2) + \dots$$

- Diamo solo i risultati principali

- I puntini ... rappresentano contributi proporzionali a $q^\alpha q^\beta$ che danno contributi nulli quando accoppiati a correnti esterne conservate

- La funzione $I(q^2)$ è data da

$$I(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi} \int_{m^2}^{\infty} \frac{dp^2}{p^2} + \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 z(1-z) \ln \left(1 - \frac{q^2 z(1-z)}{m^2} \right) dz$$

- Il primo termine diverge logaritmicamente

- Per poter manipolare l'espressione si introduce un cut-off Λ sul primo integrale e si fa tendere alla fine $\Lambda \rightarrow \infty$

- Il secondo termine è finito. Le approssimazioni per alto q^2 e basso q^2 sono

$$I(q^2) \simeq \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + \frac{\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} \quad -q^2 / m^2 \ll 1$$

$$I(q^2) \simeq \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \left(\frac{-q^2}{m^2} \right) \quad -q^2 / m^2 \gg 1$$

- Evidentemente $I(q^2)$ è privo di significato fisico, a meno di non riuscire a "eliminare" o "ridefinire" la parte divergente

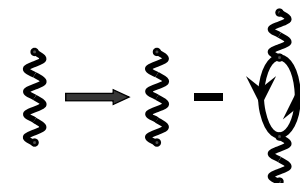
Correzioni radiative. Rinormalizzazione

- Nelle ampiezze di 1° e 2° ordine le correnti sono le stesse

- Il calcolo modifica il propagatore

- Possiamo rappresentare graficamente come

- Otteniamo



$$-i\mathfrak{M} = \left(ie\bar{u}_f \gamma^\mu u_i \right) \left[\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\rho}}{q^2} \left(-ig^{\rho\sigma} q^2 I(q^2) \right) \frac{-ig_{\sigma\nu}}{q^2} \right] (-iej^\nu(q))$$

$$-i\mathfrak{M} = \left(ie\bar{u}_f \gamma^\mu u_i \right) \left[\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left(-I(q^2) \right) \right] (-iej^\nu(q))$$

$$-i\mathfrak{M} = \left(ie\bar{u}_f \gamma^\mu u_i \right) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} [1 - I(q^2)] (-iej^\nu(q))$$

- Utilizzando l'approssimazione per basso q^2 , l'ampiezza diventa

$$-i\mathfrak{M} = \left(ie\bar{u}_f \gamma^\mu u_i \right) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left[1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \frac{\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} \right] (-iej^\nu(q))$$

- Trascurando termini di ordine α^2 possiamo riscriverla come

$$-i\mathfrak{M} = \left(ie\bar{u}_f \gamma^\mu u_i \right) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left[1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right] \left[1 - \frac{\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} \right] (-iej^\nu(q))$$

Correzioni radiative. Rinormalizzazione

$$-i\mathfrak{M} = \left(ie\bar{u}_f \gamma^\mu u_i \right) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left[1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right] \left[1 - \frac{\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} \right] (-iej^\nu(q))$$

- Possiamo associare il termine divergente alla carica elettrica

- Si definisce la carica rinormalizzata

$$e_R = e \left[1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

- Allo stesso ordine di approssimazione, vale anche

$$1 - \frac{\alpha}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} \simeq 1 - \frac{\alpha_R}{15\pi} \frac{q^2}{m^2}$$

- L'ampiezza diventa

$$-i\mathfrak{M} = \left(ie_R \bar{u}_f \gamma^\mu u_i \right) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left[1 - \frac{\alpha_R}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} \right] (-ie_R j^\nu(q))$$

- La carica elettrica utilizzata nell'ampiezza deve essere misurata dall'esperimento

- Ad esempio, misurando la sezione d'urto

- Notiamo che la carica presente dell'ampiezza (carica rinormalizzata e_R) è diversa da quella usata nella Lagrangiana (carica "nuda")

- Sottolineiamo infine, anche se ovvio, che le formule della sezione d'urto a livello d'albero e a livello 1-loop sono differenti

Correzioni radiative. Rinormalizzazione

- Si può utilizzare la formula 1-loop
 - Si utilizza la misura della sezione d'urto (ad esempio per $q^2 \rightarrow 0$) per definire e_R
 - La divergenza viene assorbita nella definizione della carica
 - Il processo si chiama rinormalizzazione
- Che la carica elettrica di una particella possa essere diversa nel vuoto e all'interno di un materiale è una circostanza nota in fisica dello stato solido
 - Carica nel vuoto e carica nella materia sono differenti
- Nella teoria dei campi ci sono differenze
 - L'elettrone non può essere isolato dalla sorgente della rinormalizzazione
 - La carica è modificata dal campo elettromagnetico che lei stessa genera
 - Fluttuazioni del vuoto (vacuum fluctuations)
 - La correzione è infinita
- Vale comunque la pena notare che la scala Λ a cui la divergenza comincia a contribuire è estremamente elevata

$$\alpha \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \ll 1 \qquad \ln \frac{\Lambda}{m} \ll \frac{1}{2\alpha} \qquad \Lambda \ll m \exp \left[\frac{1}{2\alpha} \right] \sim 10^{26} \text{ GeV}$$

- Corrisponde ad una lunghezza $l_\Lambda = \hbar/\Lambda c = 10^{-27} \text{ fm}$

Correzioni radiative. Rinormalizzazione

- A questa scala di energia (o di lunghezza) probabilmente sono presenti altri fenomeni
- Che la rinormalizzazione permetta di disaccoppiare la teoria in esame dai fenomeni a scale così distanti è una circostanza molto rassicurante
 - È dovuto alla dipendenza logaritmica da Λ
- La carica elettrica è rinormalizzabile a tutti gli ordini
- Nel limite di basso q^2 il grafico studiato è il potenziale di Coulomb
 - Permette di calcolare i livelli energetici dell'atomo

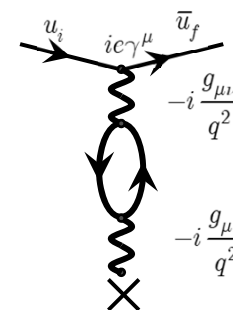
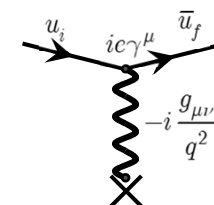
$$-i\mathcal{M} = \left(ie\bar{u}_f \gamma^\mu u_i \right) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \left(-iej^\nu(q) \right) \rightarrow \left(ie\bar{u}_f \gamma^0 u_i \right) \frac{-i}{q^2} (-iZe) \quad \frac{Ze^2}{q^2} \leftrightarrow \frac{Ze^2}{4\pi} \frac{1}{r}$$

- La correzione introdotta dai loop

$$\frac{Ze^2}{q^2} \rightarrow \frac{Ze_R^2}{q^2} \left(1 - \frac{\alpha_R}{15\pi} \frac{q^2}{m^2} \right) \quad \frac{Ze^2}{4\pi} \frac{1}{r} \rightarrow \left(1 - \frac{\alpha_R}{15\pi m^2} \nabla^2 \right) \frac{Ze_R^2}{4\pi} \frac{1}{r}$$

- Il potenziale diventa pertanto

$$V(r) = \frac{Ze_R^2}{4\pi} \frac{1}{r} - \frac{Ze_R^4}{60\pi^2 m^2} \delta(\mathbf{r}) \quad \alpha_R = \frac{e_R^2}{4\pi}$$

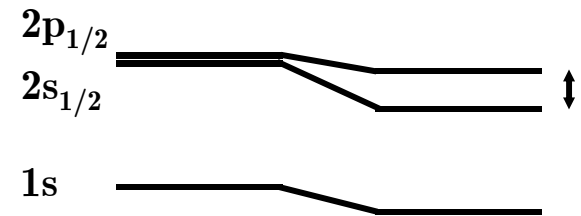


Lamb Shift

- Le correzioni apportate al potenziale di Coulomb hanno un effetto misurabile

$$V(r) = \frac{Ze_R^2}{4\pi} \frac{1}{r} - \frac{Ze_R^4}{60\pi^2 m^2} \delta(\mathbf{r})$$

- Il potenziale proporzionale a $\delta(\mathbf{r})$ può essere trattato come una perturbazione
- In meccanica non relativistica gli stati $2s_{1/2}$ e $2p_{1/2}$ sono degeneri
 - La teoria di Dirac rimuove la degenerazione
 - La separazione $h\nu$ fra gli stati corrisponde ad una frequenza $\nu = 1057$ MHz
 - La polarizzazione del vuoto corregge questa separazione per $\Delta\nu = -27$ MHz
 - L'effetto della polarizzazione del vuoto è stato verificato sperimentalmente
- Considerato un grande successo della teoria quantistica dei campi
 - Dimostra che la rinormalizzazione è una procedura che produce risultati fisicamente significativi



Shelter Island Conference (1947)

- Hans Bethe (1967)
- David Bohm
- Gregory Breit
- Karl K. Darrow
- Herman Feshbach
- Richard Feynman (1965)
- Hendrik Kramers
- Willis Lamb (1955)
- Duncan MacInnes
- Robert Eugene Marshak
- John von Neumann
- Arnold Nordsieck
- J. Robert Oppenheimer
- Abraham Pais
- Linus Pauling (1954)
- Isidor Isaac Rabi (1944)
- Bruno Rossi
- Julian Schwinger (1965)
- Robert Serber
- Edward Teller
- George Uhlenbeck
- John Hasbrouck van Vleck (1977)
- Victor Frederick Weisskopf
- John Archibald Wheeler



Richard Feynman (seated, with pen in hand) illustrates a point at the conference. From left to right, standing, are: W. Lamb, K.K. Darrow, Victor Weisskopf, George E. Uhlenbeck, Robert E. Marshak, Julian Schwinger, David Bohm, From left to right, seated are: J. Robert Oppenheimer (holding pipe), Abraham Pais, Richard P. Feynman, Herman Feshbach.