
Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 18

6.12.2022

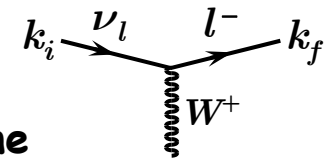
Interazioni di neutrini
Difficoltà dell'interazione di Fermi
Modello IVB (Bosone Vettoriale Intermedio)
Propagatore del fotone e del W

anno accademico 2022-2023

Interazioni neutrino-fermione

- L'interazione corrente-corrente di Fermi può essere utilizzata per calcolare le sezioni d'urto di interazioni neutrino fermione mediate da corrente carica (CC)
- Può essere utilizzata anche per descrivere interazioni di antineutrini
- Può essere utilizzata per interazioni di neutrini di tutte le famiglie
 - Nel processo di corrente carica il neutrino si trasforma nel leptone carico della famiglia scambiando un bosone W^+

$$\nu_e \rightarrow e^- \quad \nu_\mu \rightarrow \mu^- \quad \nu_\tau \rightarrow \tau^-$$

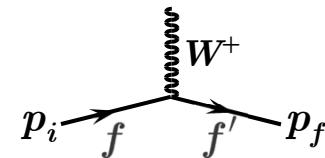


- Dall'altro lato possiamo trovare un fermione o un antifermione

$$f \rightarrow f' \quad \bar{f} \rightarrow \bar{f}'$$

- Per la conservazione della carica deve essere

$$\Delta Q = q_{f'} - q_f = q_{\bar{f}'} - q_{\bar{f}} = 1$$



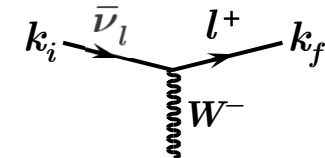
- Si possono avere le seguenti transizioni

$$l^- \rightarrow \nu_l \quad d \rightarrow u \quad s \rightarrow u \quad \bar{u} \rightarrow \bar{d} \quad \bar{u} \rightarrow \bar{s} \quad q_u = \frac{2}{3}e \quad q_d = q_s = -\frac{1}{3}e$$

- Per le interazioni di antineutrini tutte le cariche sono invertite

- In questo caso la particella scambiata è il bosone W^-

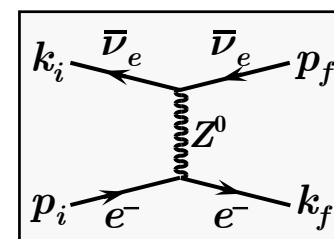
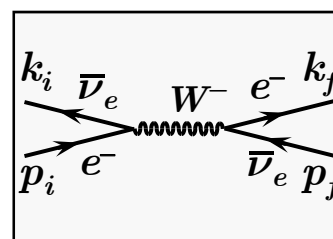
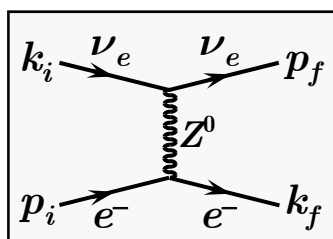
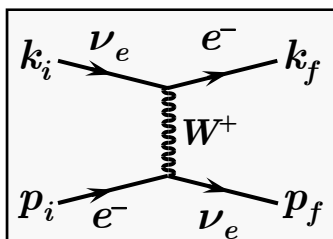
$$\Delta Q = -1 \quad l^+ \rightarrow \bar{\nu}_l \quad u \rightarrow d \quad u \rightarrow s \quad \bar{d} \rightarrow \bar{u} \quad \bar{s} \rightarrow \bar{u}$$



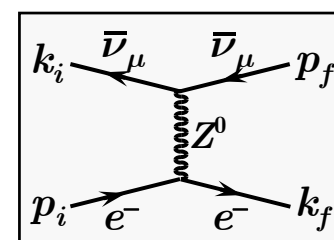
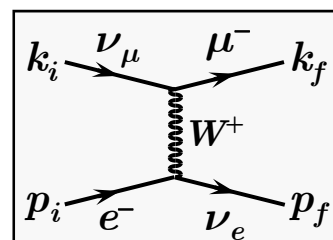
- Per finire osserviamo che le correnti conservano il relativo numero fermionico

Interazioni neutrino-fermione

- Troveremo la stessa formula per tutte le famiglie
 - In realtà le famiglie differiscono per la massa
 - Spesso approssimeremo le masse a zero
- Le formule per le particelle sono diverse da quelle per le antiparticelle
 - Sia per i neutrini-antineutrini che per i fermioni-antifermioni
- Per fissare le idee studiamo
 - La sezione d'urto neutrino elettronico - elettrone
 - La sezione d'urto antineutrino elettronico - elettrone
 - Questi due processi sono mediati da correnti sia cariche che neutre



- Per il momento trascureremo la corrente neutra
- La reazione $\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e$ può essere mediata solo tramite CC
 - Osserviamo che $\bar{\nu}_\mu e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu e^-$ può essere mediata solo da corrente neutra

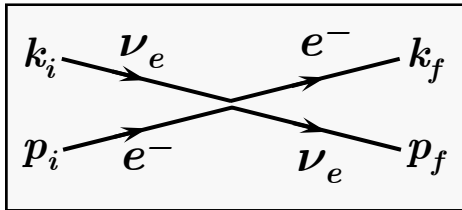


Lo scattering $\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-$

- Iniziamo con il calcolo della sezione d'urto per lo scattering di un neutrino da parte di un elettrone

$$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$$

- Il diagramma di Feynman al primo ordine associato a questa reazione e la corrispondente ampiezza di Fermi sono



$$\mathfrak{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}_{k_f} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_{k_i} \bar{u}_{p_f} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u_{p_i}$$

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{G^2}{2} M^{\mu\nu} N_{\mu\nu}$$

- Il quadrato dell'elemento di matrice è
- I due tensori $M^{\mu\nu}$ e $N^{\mu\nu}$ sono facilmente derivabili dal digramma utilizzando le regole per i diagrammi (vedi diapositiva 327)

$$M^{\mu\nu} = \text{Tr}[(\not{k}_f + m_e) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) (\not{k}_i + m_\nu) (1 + \gamma^5) \gamma^\nu]$$

$$N^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\not{p}_f + m_\nu) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) (\not{p}_i + m_e) (1 + \gamma^5) \gamma^\nu]$$

- Nel primo tensore non è fatta la media sulle polarizzazioni iniziali (manca il fattore $\frac{1}{2}$) perché il neutrino ha solo lo stato left-handed

Lo scattering $\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-$

- Il calcolo delle tracce è lasciato come esercizio

- Il risultato per i due tensori è ($m_\nu = 0$)

$$M^{\mu\nu} = 8 \left[k_i^\mu k_f^\nu - g^{\mu\nu} k_i \cdot k_f + k_f^\mu k_i^\nu - i\varepsilon^{\lambda\mu\sigma\nu} k_{i\lambda} k_{f\sigma} \right]$$

$$N^{\mu\nu} = 4 \left(p_i^\mu p_f^\nu - g^{\mu\nu} p_i \cdot p_f + p_f^\mu p_i^\nu - i\varepsilon^{\lambda\mu\sigma\nu} p_{i\lambda} p_{f\sigma} \right)$$

- Il prodotto dei due tensori si calcola facilmente (un po' lungo ...)

- Occorre la proprietà del tensore di Levi - Civita

$$-\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = 2 \left(\delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\sigma - \delta_\beta^\lambda \delta_\alpha^\sigma \right)$$

- Il risultato è

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{G^2}{2} 128 (k_i \cdot p_i) (k_f \cdot p_f)$$

- Calcoliamo i prodotti

- Dalla conservazione del 4-momento $k_i + p_i = k_f + p_f$

$$s = (k_i + p_i)^2 = (k_f + p_f)^2 \quad s = 2k_i \cdot p_i + m_e^2 = m_e^2 + 2k_f \cdot p_f$$

- Trascuriamo m_e

$$k_i \cdot p_i = k_f \cdot p_f = \frac{s}{2}$$

- Inserendo nell'elemento di matrice si ottiene

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{G^2}{2} 128 \frac{s^2}{4} = 16G^2 s^2$$

La sezione d'urto $\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-$

- La sezione d'urto è
$$d\sigma = \frac{|\overline{\mathfrak{M}}|^2}{4\sqrt{(k_i \cdot p_i)^2 - (m_e m_\nu)^2}} d\Phi_2$$
- Ricordiamo (diapositiva [271](#)) il fattore di flusso F e lo spazio delle fasi $d\Phi_2$

$$F = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2} = 4|\mathbf{q}_i|W_i \quad d\Phi_2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\mathbf{q}_f|}{W_f} d\Omega$$

- Inoltre $|\mathbf{q}_i| = |\mathbf{q}_f| = \frac{\sqrt{s}}{2} \quad W_i = W_f = \sqrt{s}$

- Otteniamo pertanto

$$d\Phi_2 = \frac{1}{2} \frac{d\Omega}{(4\pi)^2} \quad F = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2} = 2s$$

- Per l'elemento di matrice il risultato del calcolo era $|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{G^2}{2} 128 \frac{s^2}{4} = 16G^2 s^2$
- Introducendo nella formula per la sezione d'urto

$$d\sigma = 16G^2 s^2 \frac{1}{2s} \frac{1}{2} \frac{d\Omega}{(4\pi)^2}$$

- Pertanto, nel centro di massa, la sezione d'urto è isotropa
- La sezione d'urto totale è

$$\sigma = \int \frac{G^2 s}{4\pi^2} d\Omega = \frac{G^2 s}{\pi}$$

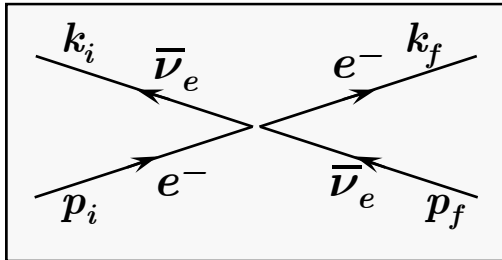
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^2 s}{4\pi^2}$$

Lo scattering $\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-$

- Calcoliamo adesso il quadrato dell'ampiezza della reazione

$$\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$$

- Il diagramma di Feynman al primo ordine (solo CC) associato a questa reazione e la corrispondente ampiezza di Fermi sono



$$\mathfrak{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}_{k_f} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v_{p_f} \bar{v}_{k_i} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u_{p_i}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}_{k_f} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_{k_i} \bar{u}_{p_f} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u_{p_i}$$

- Le correnti sono relative a particelle o tutte nello stato iniziale o tutte nello stato finale
 - Nella reazione neutrino-elettrone le correnti univano particelle fra gli stati iniziali e finali
- Confrontiamo con la corrispondente ampiezza della reazione $\nu_e e^- \rightarrow \nu_e e^-$
 - Gli spinori u_{k_f} e u_{p_i} compaiono allo stesso modo e quindi contribuiranno allo stesso modo
 - Lo spinore u_{k_i} è diventato v_{p_f} - dato che $m_\nu = 0$ basta sostituire k_i con p_f
 - Lo spinore u_{p_f} è diventato v_{k_i} - dato che $m_\nu = 0$ basta sostituire p_f con k_i
- Sostituendo $\overline{|\mathfrak{M}|^2} = \frac{G^2}{2} 128 (k_i \cdot p_i) (k_f \cdot p_f) \longrightarrow \overline{|\mathfrak{M}|^2} = \frac{G^2}{2} 128 (p_f \cdot p_i) (k_f \cdot k_i)$

Lo scattering $\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-$

- Studiamo adesso la cinematica della reazione
 - Consideriamo la conservazione del 4-momento

$$k_i + p_i = k_f + p_f$$

- Possiamo ricavare una espressione utile per la variabile di Mandelstam t

$$k_i - k_f = p_f - p_i \quad t = (k_i - k_f)^2 = (p_f - p_i)^2$$

- Trascurando ancora una volta le masse delle particelle

$$t = -2k_i \cdot k_f = -2p_i \cdot p_f$$

- Consideriamo adesso il sistema del centro di massa
 - Dato che lo scattering è elastico

$$p_i = -k_i \quad p_f = -k_f \quad |k_i| = |k_f| \equiv |q| \quad E = |q| \quad |q| = \frac{\sqrt{s}}{2}$$

- Calcoliamo t (sempre trascurando le masse)

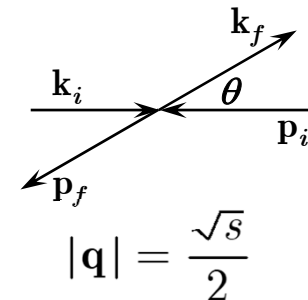
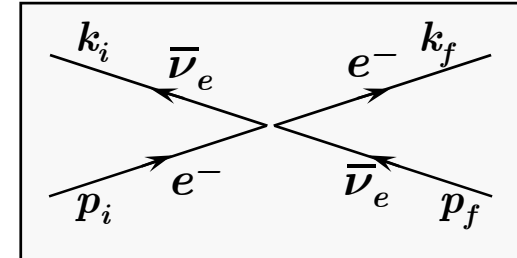
$$t = -2k_i \cdot k_f = -2E_1 E_3 + 2(k_i \cdot k_f) = -2q^2 + 2q^2 \cos \theta = -2q^2 (1 - \cos \theta)$$

- Inseriamo i risultati nell'elemento di matrice

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{G^2}{2} 128 (p_f \cdot p_i) (k_f \cdot k_i) = \frac{G^2}{2} 128 \frac{t^2}{4}$$

$$t = -\frac{s}{2} (1 - \cos \theta)$$

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 4G^2 s^2 (1 - \cos \theta)^2$$



Lo scattering $\bar{\nu}_e e^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-$

- Lo spazio delle fasi e il flusso sono identici al caso precedente
 - Inserendo nella formula per la sezione d'urto otteniamo

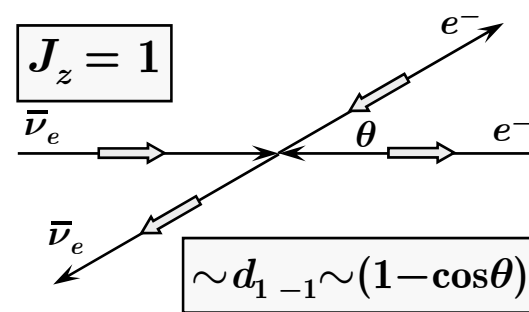
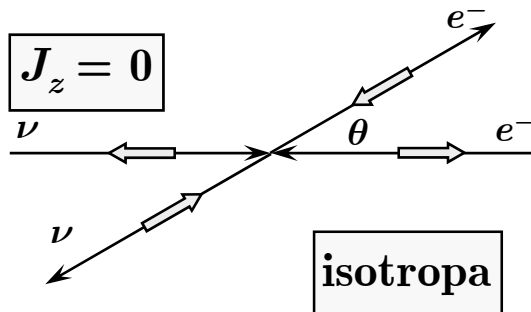
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^2 s}{(4\pi)^2} (1 - \cos\theta)^2$$

- Per la sezione d'urto totale integriamo su tutto l'angolo solido $\sigma = \int_1^{-1} \frac{G^2 s}{(4\pi)^2} (1 - \cos\theta)^2 2\pi d\cos\theta \quad \sigma = \frac{G^2 s}{3\pi}$
- Riepiloghiamo i risultati ottenuti

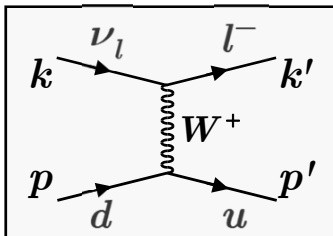
$$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^- \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^2 s}{4\pi^2} \quad \sigma = \frac{G^2 s}{\pi}$$

$$\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^- \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^2 s}{(4\pi)^2} (1 - \cos\theta)^2 \quad \sigma = \frac{G^2 s}{3\pi}$$

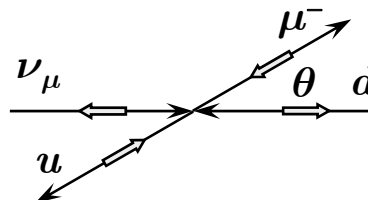
- Si può comprendere la differenza fra i due risultati facendo riferimento alla conservazione del momento angolare e alla violazione della parità



Interazione neutrino quark (CC)

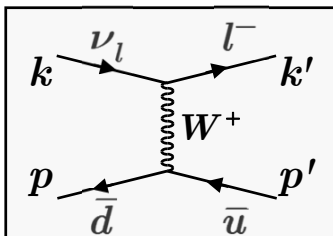


$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^2 s}{4\pi^2}$$

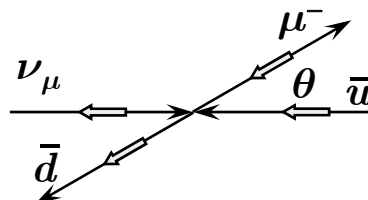


$$J_z = 0$$

 Isotropa

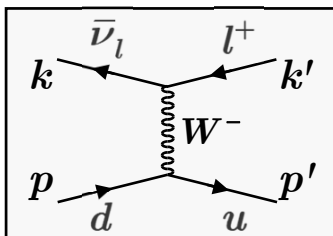


$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^2 s}{(4\pi)^2} (1 + \cos \theta)^2$$

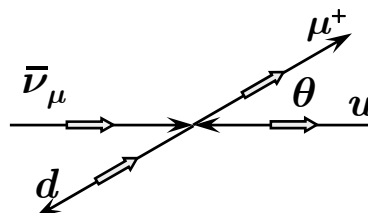


$$J_z = -1 \rightarrow J_z = -1$$

 $\mathfrak{M} \sim d_{-1,-1} \sim 1 + \cos \theta$
 $\sigma = 0 \text{ per } \theta = \pi$

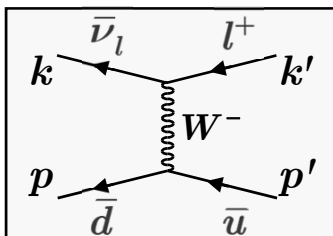


$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^2 s}{(4\pi)^2} (1 + \cos \theta)^2$$

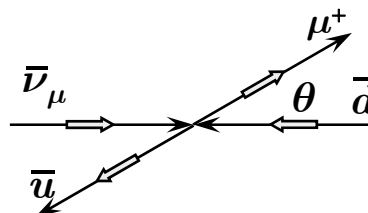


$$J_z = 1 \rightarrow J_z = 1$$

 $\mathfrak{M} \sim d_{1,1} \sim 1 + \cos \theta$
 $\sigma = 0 \text{ per } \theta = \pi$



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^2 s}{4\pi^2}$$



$$J_z = 0$$

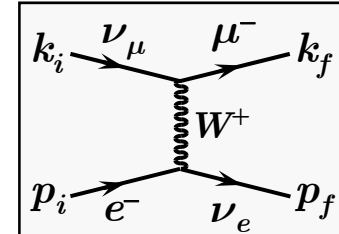
 Isotropa



La reazione $\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e$

- Includiamo l'effetto della massa del leptone carico
 - È importante per la reazione

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$$



- La struttura dell'elemento di matrice è identica
 - L'unica differenza è la massa del muone
- Nei casi precedenti, il calcolo del quadrato dell'elemento di matrice era stato fatto senza approssimazioni fino al risultato

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 64G^2 (k_i \cdot p_i)(k_f \cdot p_f)$$

- Calcoliamo adesso i due prodotti scalari
 - Per il primo, relativo ai momenti nello stato iniziale, non ci sono modifiche (si può trascurare m_e)
 - Per il secondo prodotto abbiamo

$$k_i \cdot p_i = \frac{s}{2}$$

$$s = (k_f + p_f)^2 = m_\mu^2 + 2k_f \cdot p_f$$

$$k_f \cdot p_f = \frac{s - m_\mu^2}{2} = \frac{s}{2} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{s} \right)$$

- Inserendo nell'elemento di matrice

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 16G^2 s^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{s} \right)$$

La reazione $\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e$

- Per spazio delle fasi e flusso si può usare il calcolo precedente ma con cura
 - Quando trascuriamo le masse le reazioni sono processi di scattering elastico
 - Le masse delle particelle nello stato iniziale sono uguali alle masse nello stato finale
 - La quantità di moto (3d) nel centro di massa dello stato iniziale è uguale al quantità di moto nel centro di massa dello stato finale
- Nel caso della reazione $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$
 - Le masse delle particelle nello stato iniziale e finale sono diverse
 - Di conseguenza anche le quantità di moto q_i e q_f sono differenti
 - Le quantità di moto nel flusso e nello spazio delle fasi sono differenti
- Ricordiamo il risultato per il fattore di flusso

$$\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2} = \frac{s}{2}$$

- Questo risultato è ancora valido perché la cinematica dello stato iniziale non è cambiata
- Ricordiamo il risultato per lo spazio delle fasi
 - Occorre esprimere q_f in termini di invarianti
 - Occorre tenere conto dell'effetto soglia

$$d\Phi_2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\mathbf{q}_f|}{\sqrt{s}} d\Omega$$



La quantità di moto nel centro di massa

- Cominciamo dalla variabile invariante s nel c.m. delle particelle 1–2

$$s = (p_1 + p_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 + 2|\mathbf{q}|^2 \quad -2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_2|\cos\pi$$

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{q}$$

$$(s - m_1^2 - m_2^2 - 2|\mathbf{q}|^2)^2 = (2\sqrt{\mathbf{q}^2 + m_1^2}\sqrt{\mathbf{q}^2 + m_2^2})^2 = 4(|\mathbf{q}|^2 + m_1^2)(|\mathbf{q}|^2 + m_2^2) \quad E_{1,2} = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_{1,2}^2}$$

- Sviluppando

$$(s - m_1^2 - m_2^2)^2 + 4|\mathbf{q}|^4 - 4|\mathbf{q}|^2(s - m_1^2 - m_2^2) = 4|\mathbf{q}|^4 + 4(m_1^2 + m_2^2)|\mathbf{q}|^2 + 4m_1^2m_2^2$$

- Semplificando

$$(s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2m_2^2 = 4s|\mathbf{q}|^2$$

- per finire otteniamo

$$|\mathbf{q}|^2 = \frac{(s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2m_2^2}{4s}$$

- nello stato iniziale 1 = e , 2 = ν_μ

$$|\mathbf{q}_i| = \frac{s - m_e^2}{2\sqrt{s}}$$

- nello stato finale 1 = μ , 2 = ν_e

$$|\mathbf{q}_f| = \frac{s - m_\mu^2}{2\sqrt{s}}$$

Soglia di produzione

- Nel caso della reazione di produzione occorre anche calcolare l'energia minima necessaria perché la reazione sia possibile

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$$

- Il minimo valore di s necessario è quello che porta alla produzione delle due particelle a riposo nello stato finale: $|\mathbf{q}_f| = 0$

- Dalla diapositiva precedente

$$(s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2 = 4s |\mathbf{q}_f|^2 = 0$$

- La reazione è possibile per

$$(s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2 \geq 0 \quad \longrightarrow \quad s - m_1^2 - m_2^2 \geq 2m_1 m_2 \quad s \geq (m_1 + m_2)^2$$

- Ponendo $m_1 = m_\mu$, $m_2 = 0$ e introducendo il valore di s nel laboratorio

$$s = (k_i + p_i)^2 = m_e^2 + 2m_e E_\nu \quad 2m_e E_\nu + m_e^2 \geq m_\mu^2$$

$$E_\nu \geq \frac{m_\mu^2 - m_e^2}{2m_e}$$

$$m_\mu = 105 \quad \text{MeV}$$

$$m_e = .511 \quad \text{MeV}$$

$$E_\nu \geq 10.79 \quad \text{GeV}$$



La reazione $\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e$

- Per finire specializziamo la formula dello spazio delle fasi al nostro caso

$$d\Phi_2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\mathbf{q}_f|}{\sqrt{s}} d\Omega \quad |\mathbf{q}_f| = \frac{s - m_\mu^2}{2\sqrt{s}}$$

- Otteniamo

$$d\Phi_2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{s - m_\mu^2}{2s} d\Omega \quad \boxed{d\Phi_2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{s}\right) d\Omega}$$

- Inseriamo questi risultati nella formula per la sezione d'urto

$$d\sigma = \frac{|\overline{\mathfrak{M}}|^2}{4\sqrt{(k \cdot p)^2 - (m_e m_{\nu_\mu})^2}} d\Phi_2$$

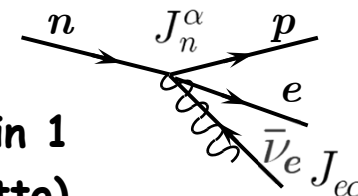
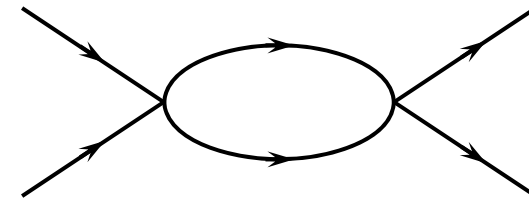
$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = 16G^2 s^2 \left(1 - \frac{m_\mu^2}{s}\right) \quad \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2} = \frac{s}{2}$$

- Otteniamo

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^2 s}{4\pi^2} \left(1 - \frac{m_\mu^2}{s}\right)^2} \quad E_\nu \geq \frac{m_\mu^2 - m_e^2}{2m_e} = 10.79 \text{ GeV}$$

Difficoltà dell'Interazione di Fermi

- Le sezioni d'urto fin qui calcolate divergono al crescere dell'energia
- Osserviamo inoltre che i calcoli fin qui fatti sono approssimati al primo ordine della teoria perturbativa
 - È possibile fare calcoli di ordine superiore ?
 - Ad esempio, è possibile calcolare diagrammi come il seguente ?
 - Diagrammi di questo tipo divergono
- Il tipo di divergenza è grave e non si riesce a reinterpretare come invece avviene per l'elettrodinamica con la rinormalizzazione
 - La teoria di Fermi non è rinormalizzabile
- Si è tentato di rendere la teoria più simile all'elettrodinamica introducendo il bosone vettoriale intermedio (IVB)
 - Le correnti dell'interazione di Fermi sono vettoriali
 - La particella scambiata deve essere un 4-vettore, spin 1
 - L'interazione debole è a corto range (al limite di contatto)
 - La particella scambiata deve avere una massa non nulla
- Dobbiamo trovare il propagatore di una particella vettoriale di massa non nulla
 - Approfondiamo lo studio dei propagatori



Particelle con massa nulla e con spin 1[†]

- Una particella di spin 1 è descritta da un campo A^μ

- La lagrangiana di un campo vettoriale senza massa accoppiato a una sorgente j^μ è

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

- $\mathcal{L}$ è invariante per trasformazioni di gauge se la corrente è conservata

- Il tensore $F^{\mu\nu}$ è invariante per trasformazioni di gauge $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$

- Esaminiamo come si trasforma il termine di interazione

$$j_\mu A'^\mu = j_\mu A^\mu + j_\mu \partial^\mu \Lambda = j_\mu A^\mu + \partial^\mu (\cancel{\Lambda j_\mu}) - \Lambda \partial^\mu j_\mu$$

- La 4-divergenza non contribuisce all'azione e può essere ignorata

$$j_\mu A'^\mu = j_\mu A^\mu - \Lambda \partial^\mu j_\mu \quad \text{se } \partial^\mu j_\mu = 0 \quad j_\mu A'^\mu = j_\mu A^\mu \quad \mathcal{L}' \text{ è invariante se } J^\mu \text{ è conservata}$$

- Le equazioni di Eulero-Lagrange portano all'equazione per A^μ

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j^\mu$$

- Fissiamo il gauge con la condizione di Lorentz $\partial^\mu A_\mu = 0$ e assumiamo $j^\mu = 0$

- Si trova la soluzione di onda piana che propaga nel vuoto

$$A^\mu(x) = \varepsilon^\mu(k) e^{-ik \cdot x} \quad k^2 = 0 \quad k_\mu \varepsilon^\mu(k) = 0$$

- Il 4-vettore $\varepsilon^\mu(k)$ descrive la polarizzazione della particella

- † Per la trattazione degli stati di polarizzazione di particelle vettoriali vedi

Greiner W., Reinhardt J. - Field Quantization 2nd ed. – Springer 1996 § 6.4.1 e § 6.4.2

Particelle con massa non nulla e con spin 1

- Il passaggio a particelle con massa non nulla si fa introducendo un termine quadratico nella lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu - j_\mu A^\mu$$

- Osserviamo che $\mathcal{L}$ non è più gauge invariante a causa del nuovo termine
- Le equazioni di Eulero-Lagrange portano all'equazione di Proca

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) + m^2 A^\mu = j^\mu$$

- Calcoliamo la 4-divergenza dell'equazione

$$\partial_\mu \square A^\mu - \partial_\mu \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) + m^2 \partial_\mu A^\mu = \partial_\mu j^\mu$$

- I primi due termini si elidono e pertanto $m^2 \partial_\mu A^\mu = \partial_\mu j^\mu$
- Se la corrente è nulla oppure è conservata deve essere $\partial_\mu A^\mu = 0$
- Pertanto nel caso di massa non nulla la condizione di Lorentz su A^μ è conseguenza dell'autoconsistenza della teoria
- Nel caso $J^\mu = 0$ (propagazione) l'equazione di Proca si semplifica in

$$\square A^\mu + m^2 A^\mu = 0$$

- La soluzione di onde piane

$$A^\mu(x) = \varepsilon^\mu(k) e^{-ik \cdot x} \quad k^2 = m^2 \quad k_\mu \varepsilon^\mu(k) = 0$$

- Il 4-vettore $\varepsilon^\mu(k)$ descrive la polarizzazione della particella

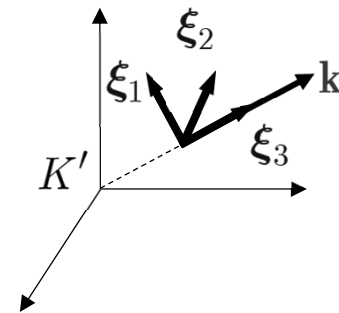
Particelle con massa non nulla e con spin 1

- Una particella di spin 1 dotata di massa ha un sistema di riposo K'
 - Per rappresentare la polarizzazione della particella si può utilizzare il formalismo generale introdotto nella diapositiva 77 e seguenti
 - Nel sistema di riposo K' la particella ha polarizzazione ξ
 - Si definisce il 4-vettore $\varepsilon' = (0, \xi)$ $\varepsilon' \cdot \varepsilon' = -\xi \cdot \xi = -1$
 - s' è ortogonale al 4-vettore energia impulso $k' = (m, 0)$ $k' \cdot \varepsilon' = 0$
- Nel sistema K in cui la particella ha 4-momento $k = (k^0, \mathbf{k})$

$$\varepsilon^0 = \frac{\mathbf{k} \cdot \xi}{m} \quad \vec{\varepsilon} = \xi + \frac{(\mathbf{k} \cdot \xi)}{m(k_0 + m)} \mathbf{k}$$

- Consideriamo tre vettori polarizzazione ξ nel sistema K'
 - Due polarizzazioni ξ_1 e ξ_2 perpendicolari a $\mathbf{k}$ $\xi_1 \cdot \mathbf{k} = \xi_2 \cdot \mathbf{k} = 0$ $\xi_3 = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$
 - Una polarizzazione longitudinale ξ_3
 - Ovviamente $\xi_i \cdot \xi_j = 0$ $i, j=1, 2$
- I 4-vettori corrispondenti nel sistema K sono

$$\varepsilon_1(k) = (0, \xi_1) \quad \varepsilon_2(k) = (0, \xi_2) \quad \varepsilon_3(k) = \frac{1}{m} \left(|\mathbf{k}|, \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} k_0 \right)$$
 - Osserviamo che anche i prodotti 4-dimensionali sono nulli: $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = 0$ $i, j=1, 2, 3$



Particelle con massa non nulla e con spin 1

$$\varepsilon_1(k) = (0, \xi_1) \quad \varepsilon_2(k) = (0, \xi_2) \quad \varepsilon_3(k) = \frac{1}{m} \left(|\mathbf{k}|, \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} k_0 \right)$$

- Si può introdurre un quarto vettore ε_0 , di tipo time-like, per avere un sistema di vettori base completo

- È possibile perché $k^2 = m^2 \neq 0$

- Non si può fare per il fotone

$$\varepsilon_0(k) = \frac{k}{m} = \frac{1}{m} (k_0, \mathbf{k})$$

- Si verifica facilmente che $\varepsilon_\lambda \cdot \varepsilon_{\lambda'} = g_{\lambda\lambda'}$

- In seguito avremo bisogno delle "somme di polarizzazione"

- La somma in λ non è in forma covariante

- $g_{\lambda\lambda}$ serve solo per definire i segni

$$P^{\mu\nu} = \sum_{\lambda=0}^3 g_{\lambda\lambda} \varepsilon_\lambda^\mu(k) \varepsilon_\lambda^\nu(k) = g^{\mu\nu}$$

- Si può verificare la relazione nel sistema di riposo della particella

$$\varepsilon_0(k) = (1, 0) \quad \varepsilon_2(k) = (0, \xi_2)$$

$$\varepsilon_1(k) = (0, \xi_1) \quad \varepsilon_3(k) = (0, \xi_3) \quad \xi_3 = \hat{\mathbf{k}}$$

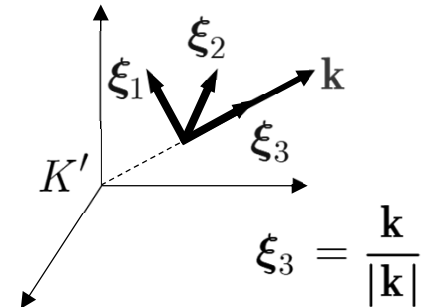
$$P^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^\mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^\nu - \sum_{\lambda=1}^3 \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_\lambda \end{pmatrix}^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_\lambda \end{pmatrix}^\nu$$

- Se $\mu = 0$ oppure $\nu = 0$ tutti i contributi sono nulli escluso il caso $\mu = \nu = 0$

- Per $\mu = i$ e $\nu = j$ con $i, j = 1, 2, 3$

$$\sum_{\lambda=1}^3 (\xi_\lambda)^i (\xi_\lambda)^j = \delta_{ij}$$

Si tratta della normale relazione di completezza per una terna ortogonale in R^3



Particelle con massa non nulla e con spin $1^\dagger$

- Abbiamo visto che la condizione di Lorentz implica un vincolo sulle componenti del campo A^μ
 - $\partial^\mu A_\mu = 0$ implica che solo tre componenti di A^μ sono indipendenti
 - Analogamente, dei quattro vettori di polarizzazione solo tre sono indipendenti e hanno un senso fisico
- La completezza della somma di polarizzazione ha senso matematicamente
 - Fisicamente siamo interessati alla somma estesa solamente ai tre stati fisici
 - Analizziamo il contributo di $\varepsilon_0(k)$ alla somma

$$g^{\mu\nu} = \sum_{\lambda=0}^3 g_{\lambda\lambda} \varepsilon_\lambda^\mu(k) \varepsilon_\lambda^\nu(k) = \varepsilon_0^\mu \varepsilon_0^\nu - \sum_{\lambda=1}^3 \varepsilon_\lambda^\mu(k) \varepsilon_\lambda^\nu(k) \quad \varepsilon_0^\mu(k) = \frac{k^\mu}{m}$$

- Otteniamo pertanto

$$\sum_{\lambda=1}^3 \varepsilon_\lambda^\mu(k) \varepsilon_\lambda^\nu(k) = - \left(g^{\mu\nu} - \frac{1}{m^2} k^\mu k^\nu \right)$$

- $\dagger$ Per la trattazione degli stati di polarizzazione di particelle vettoriali vedi Greiner W., Reinhardt J. - Field Quantization 2nd ed. – Springer 1996 § 6.4.1 e § 6.4.2

Particelle con massa nulla e con spin 1

- I vettori di polarizzazione di un campo vettoriale con massa nulla non possono essere ottenuti da quelli introdotti nelle diapositive precedenti ponendo $m = 0$
 - Nel caso di massa nulla gli stati di polarizzazione indipendente sono solo due
 - Inoltre non possiamo utilizzare il 4-vettore k per definire ε_0 perché $k^2 = 0$
- E naturalmente non possiamo utilizzare il sistema di riposo
- Utilizziamo il gauge di Lorentz: $\partial^\mu A_\mu = 0 \rightarrow k_\mu \varepsilon^\mu(k) = 0$
 - Utilizziamo l'ulteriore invarianza che permette di trasformare i vettori di polarizzazione come $\varepsilon^\mu \rightarrow \varepsilon^\mu + \beta k^\mu$
 - Possiamo pertanto assumere che $\varepsilon_i(k) = (0, \xi_i)$ $i = 1, 2, 3$
$$\varepsilon_1(k) = (0, \xi_1) \quad \varepsilon_2(k) = (0, \xi_2) \quad \varepsilon_3(k) = (0, \hat{k})$$
 - Infine scegliamo, in questo sistema, il quarto stato come $\varepsilon_0(k) = n = (1, 0)$
- Utilizzando il 4-vettore n possiamo scrivere $\varepsilon_3(k)$ in forma covariante

$$\varepsilon_3(k) = \frac{k - n(k \cdot n)}{\left[(k \cdot n)^2 - k^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad \varepsilon_3(k) \cdot \varepsilon_3(k) = -1$$

- È facile verificare che nel sistema in cui $n = (1, 0)$ si ha $\varepsilon_3(k) = (0, \hat{k})$
- Per fotoni reali ($k^2 = 0$) i quattro 4-vettori soddisfano le seguenti relazioni

$$k \cdot \varepsilon_1(k) = k \cdot \varepsilon_2(k) = 0 \quad k \cdot \varepsilon_0(k) = -k \cdot \varepsilon_3(k) = k \cdot n$$

Particelle con massa nulla e con spin 1

- Si può dimostrare che i quattro stati definiti precedentemente soddisfano la stessa relazione di completezza del caso con massa diversa da zero

$$P^{\mu\nu}(k) = \sum_{\lambda=0}^3 g_{\lambda\lambda} \varepsilon_{\lambda}^{\mu}(k) \varepsilon_{\lambda}^{\nu}(k) = g^{\mu\nu}$$

- Nel caso di un campo vettoriale senza massa siamo interessati alla somma di polarizzazione limitata agli stati fisici $\varepsilon_1(k)$ e $\varepsilon_2(k)$
- Si hanno due risultati per particelle reali (on-shell, $k^2 = 0$) oppure virtuali (off-shell, $k^2 \neq 0$)
 - Per particelle reali ($k^2 = 0$)
 - Ad esempio per fotoni esterni

$$\sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_{\lambda}^{\mu}(k) \varepsilon_{\lambda}^{\nu}(k) = - \left(g^{\mu\nu} + \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{(k \cdot n)^2} - \frac{k^{\mu} n^{\nu} + k^{\nu} n^{\mu}}{k \cdot n} \right)$$

- Per particelle virtuali ($k^2 \neq 0$)
 - Ad esempio in un propagatore

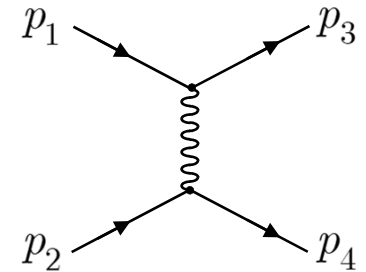
$$\sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_{\lambda}^{\mu}(k) \varepsilon_{\lambda}^{\nu}(k) = - \left(g^{\mu\nu} + \frac{k^{\mu} k^{\nu} - (k^{\mu} n^{\nu} + k^{\nu} n^{\mu}) k \cdot n + n^{\mu} n^{\nu} k^2}{(k \cdot n)^2 - k^2} \right)$$



Il propagatore fotonico

- Abbiamo definito il propagatore fotonico (vedi diapositiva 258)

$$-iD^{\mu\nu}(x_1, x_2) = \langle 0 | T[\hat{A}^\mu(x_1) \hat{A}^\nu(x_2)] | 0 \rangle$$



- Definiamo la funzione $\theta(\tau)$ $\theta(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < 0 \\ 1 & \tau \geq 0 \end{cases}$
- Otteniamo l'espressione

$$-iD^{\mu\nu}(x_1, x_2) = \theta(t_1 - t_2) \langle 0 | \hat{A}^\mu(x_1) \hat{A}^\nu(x_2) | 0 \rangle + \theta(t_2 - t_1) \langle 0 | \hat{A}^\nu(x_2) \hat{A}^\mu(x_1) | 0 \rangle$$

- Consideriamo uno dei due termini e utilizziamo lo sviluppo dei campi A^μ

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{A}^\mu(x_1) \hat{A}^\nu(x_2) | 0 \rangle &= \sum_{l,m=1,2} \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^6 \sqrt{2|\mathbf{k}|} \sqrt{2|\mathbf{q}|}} \left\langle 0 \left[\begin{pmatrix} \varepsilon_{\mathbf{k},l}^\mu \hat{c}_{\mathbf{k},l} e^{-ik \cdot x_1} + \varepsilon_{\mathbf{k},l}^{\mu*} \hat{c}_{\mathbf{k},l}^\dagger e^{ik \cdot x_1} \\ \varepsilon_{\mathbf{q},m}^\nu \hat{c}_{\mathbf{q},m} e^{-iq \cdot x_2} + \varepsilon_{\mathbf{q},m}^{\nu*} \hat{c}_{\mathbf{q},m}^\dagger e^{iq \cdot x_2} \end{pmatrix} \right] 0 \right\rangle \\ &= \sum_{l,m=1,2} \int \frac{d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{q} \varepsilon_{\mathbf{k},l}^\mu \varepsilon_{\mathbf{q},m}^{\nu*} e^{-ik \cdot x_1} e^{iq \cdot x_2}}{(2\pi)^6 \sqrt{2|\mathbf{k}|} \sqrt{2|\mathbf{q}|}} \langle 0 | \hat{c}_{\mathbf{k},l} \hat{c}_{\mathbf{q},m}^\dagger | 0 \rangle \quad [\hat{c}_{\mathbf{k},l}, \hat{c}_{\mathbf{q},m}^\dagger] = \delta_{lm} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \\ &= \sum_{l=1,2} \int \frac{d^3\mathbf{q} \varepsilon_{\mathbf{q},l}^\mu \varepsilon_{\mathbf{q},l}^{\nu*} e^{-iq \cdot (x_1 - x_2)}}{(2\pi)^3 2|\mathbf{q}|} \end{aligned}$$

Il propagatore fotonico

- Per analogia

$$\langle 0 | \hat{A}^\nu(x_2) \hat{A}^\mu(x_1) | 0 \rangle = \sum_{l=1,2} \int \frac{d^3\mathbf{q} \varepsilon_{\mathbf{q},l}^\nu \varepsilon_{\mathbf{q},l}^{\mu*} e^{-iq \cdot (x_2 - x_1)}}{(2\pi)^3 2|\mathbf{q}|}$$

- Utilizziamo la rappresentazione integrale della funzione $\theta(\tau)$

$$\theta(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha\tau}}{\alpha + i\varepsilon} d\alpha$$

- Otteniamo la seguente espressione per il propagatore

$$-iD^{\mu\nu}(x_1, x_2) = \sum_{l=1,2} \int \frac{d\alpha d^3\mathbf{q} \varepsilon_{\mathbf{q},l}^\mu \varepsilon_{\mathbf{q},l}^{\nu*} e^{-iq \cdot (x_1 - x_2)} e^{-i\alpha(t_1 - t_2)}}{2\pi i (\alpha + i\varepsilon) (2\pi)^3 2|\mathbf{q}|} + \sum_{l=1,2} \int \frac{d\alpha d^3\mathbf{q} \varepsilon_{\mathbf{q},l}^\nu \varepsilon_{\mathbf{q},l}^{\mu*} e^{-iq \cdot (x_2 - x_1)} e^{-i\alpha(t_2 - t_1)}}{2\pi i (\alpha + i\varepsilon) (2\pi)^3 2|\mathbf{q}|}$$

- Consideriamo il primo termine ($q_0 = |\mathbf{q}|$)
- Per il momento omettiamo la somma sulle polarizzazioni

$$D_1 = \int \frac{d\alpha d^3\mathbf{q} e^{-iq \cdot (x_1 - x_2)} e^{-i\alpha(t_1 - t_2)}}{2\pi i (\alpha + i\varepsilon) (2\pi)^3 2|\mathbf{q}|} = -i \int \frac{d\alpha d^3\mathbf{q} e^{+i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} e^{-iq_0(t_1 - t_2)} e^{-i\alpha(t_1 - t_2)}}{(\alpha + i\varepsilon) (2\pi)^4 2|\mathbf{q}|}$$

- Poniamo

$$\omega = q_0 + \alpha \quad \alpha = \omega - q_0 \quad d\alpha = d\omega \quad k = (\omega, \mathbf{q})$$

Il propagatore fotonico

- Otteniamo

$$D_1 = -i \int \frac{d\alpha d^3\mathbf{q} e^{+i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} e^{-iq_0(t_1-t_2)} e^{-i\alpha(t_1-t_2)}}{(\alpha + i\varepsilon)(2\pi)^4 2|\mathbf{q}|} = -i \int \frac{d\omega d^3\mathbf{q} e^{+i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)} e^{-i\omega(t_1-t_2)}}{(\omega - q_0 + i\varepsilon)(2\pi)^4 2|\mathbf{q}|}$$

$$k = (\omega, \mathbf{q}) \quad d\omega d^3\mathbf{q} = d^4k$$

$$= -i \int \frac{d^4k e^{-ik\cdot(x_1-x_2)}}{(\omega - q_0 + i\varepsilon)(2\pi)^4 2|\mathbf{q}|}$$

- Analogamente il secondo termine

$$D_2 = -i \int \frac{d^4k e^{-ik\cdot(x_2-x_1)}}{(\omega - q_0 + i\varepsilon)(2\pi)^4 2|\mathbf{q}|} = i \int \frac{d^4k e^{-ik\cdot(x_1-x_2)}}{(\omega + q_0 + i\varepsilon)(2\pi)^4 2|\mathbf{q}|}$$

- Abbiamo cambiato $k_\alpha \rightarrow -k_\alpha$
- In particolare $\omega \rightarrow -\omega$ nel denominatore
- Sommiamo i due termini

$$D_1 + D_2 = -i \int \frac{d^4k e^{-ik\cdot(x_1-x_2)}}{(2\pi)^4 2|\mathbf{q}|} \left[\frac{1}{\omega - q_0 + i\varepsilon} - \frac{1}{\omega + q_0 + i\varepsilon} \right]$$

$$\frac{1}{\omega - q_0} - \frac{1}{\omega + q_0} = \frac{\omega + q_0 - \omega + q_0}{\omega^2 - q_0^2} = \frac{2q_0}{\omega^2 - q_0^2}$$

Il propagatore fotonico

$$D_1 + D_2 = -i \int \frac{d^4 k e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)}}{(2\pi)^4 2|\mathbf{q}|} \left[\frac{1}{\omega - q_0 + i\varepsilon} - \frac{1}{\omega + q_0 + i\varepsilon} \right]$$

- Inseriamo nell'integrale (reintroduciamo $+i\varepsilon$ nel denominatore)

$$D_1 + D_2 = -i \int \frac{d^4 k e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)}}{(2\pi)^4 2|\mathbf{q}|} \frac{2q_0}{\omega^2 - q_0^2 + i\varepsilon} = -i \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{\omega^2 - q_0^2 + i\varepsilon} e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)} d^4 k$$

- Reintroduciamo le somme di polarizzazione

- Ricordiamo che $k = (\omega, \mathbf{q})$

$$D^{\mu\nu}(x_1 - x_2) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \left(\sum_{l=1}^2 \varepsilon_{\mathbf{q},l}^\mu \varepsilon_{\mathbf{q},l}^{\nu*} \right) \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)} d^4 k$$

- Il secondo membro è una trasformata di Fourier
- Il propagatore fotonico nello spazio dei momenti è pertanto

$$D^{\mu\nu}(k) = -\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \left(\sum_{l=1}^2 \varepsilon_{\mathbf{q},l}^\mu \varepsilon_{\mathbf{q},l}^{\nu*} \right)$$

Il propagatore fotonico

- Utilizziamo l'espressione che abbiamo trovato per le somme di polarizzazione nella diapositiva 536

$$\sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_{\lambda}^{\mu}(k) \varepsilon_{\lambda}^{\nu}(k) = - \left(g^{\mu\nu} + \frac{k^{\mu} k^{\nu} - (k^{\mu} n^{\nu} + k^{\nu} n^{\mu}) k \cdot n + n^{\mu} n^{\nu} k^2}{(k \cdot n)^2 - k^2} \right)$$

- Otteniamo[†]

$$D^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \left(g^{\mu\nu} + \frac{k^{\mu} k^{\nu} - (k^{\mu} n^{\nu} + k^{\nu} n^{\mu}) k \cdot n + n^{\mu} n^{\nu} k^2}{(k \cdot n)^2 - k^2} \right)$$

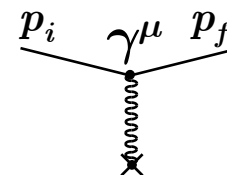
- In elettrodinamica il propagatore è accoppiato a correnti conservate

$$\partial^{\mu} j_{\mu}(x) = 0 \rightarrow k^{\mu} j_{\mu}(q) = 0$$

- I primi tre termini della frazione danno pertanto contributo nullo
- Ignoriamo anche i termini in n^{μ} e n^{ν}
- Rappresentano il contributo dell'interazione Coulombiana[†]
- Si utilizza pertanto la forma covariante del propagatore fotonico

$$D^{\mu\nu}(k) = \frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon}$$

- [†]vedi W. Grenier, J. Reinhardt – Field Quantization – Springer 1996 p.185



Il propagatore del bosone $W^\pm$

- La stessa derivazione può essere fatta per il propagatore di bosoni vettoriali con massa diversa da zero

- Una prima differenza sta nella relazione fra energia e quantità di moto

$$q_0 = |\mathbf{q}| = \sqrt{\mathbf{q}^2} \rightarrow q_0 = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}$$

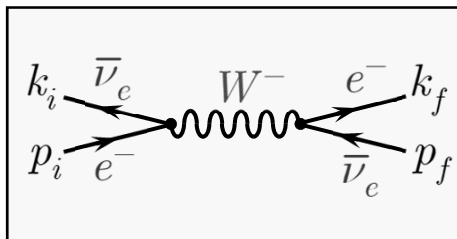
- Una seconda differenza risiede nel valore delle somme di polarizzazione

$$\sum_{\lambda=1}^3 \varepsilon_\lambda^\mu(k) \varepsilon_\lambda^\nu(k) = -\left(g^{\mu\nu} - \frac{1}{m^2} k^\mu k^\nu\right)$$

- Tenendo conto di queste differenze il propagatore per una particella vettoriale di massa M_W è

$$D^{\mu\nu}(q) = \frac{1}{q^2 - M_W^2 + i\varepsilon} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{M_W^2} \right)$$

- Calcoliamo l'ampiezza di transizione per un processo che abbiamo descritto con l'interazione corrente-corrente utilizzando il propagatore (slide [520](#))



$$q = k_i + p_i = k_f + p_f$$

$$\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$$

$$\mathfrak{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} j_1^\mu j_{2\mu}$$



$$j_1^\mu = \bar{v}_{k_i} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_{p_i}$$

$$j_2^\mu = \bar{u}_{k_f} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v_{p_f}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{g^2}{8} j_1^\mu D_{\mu\nu}(q) j_2^\nu$$

Il propagatore del bosone $W^\pm$

- Utilizziamo la forma esplicita del propagatore

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{8} \frac{g^2}{q^2 - M_W^2 + i\varepsilon} j_1^\mu \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{M_W^2} \right) j_2^\nu$$

$$j_1^\mu = \bar{v}_{k_i} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u_{p_i}$$

$$j_2^\mu = \bar{u}_{k_f} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v_{p_f}$$

- Consideriamo prima il pezzo del propagatore che contiene i termini $q_\mu q_\nu$

- Ricordiamo che $q = k_i + p_i = k_f + p_f$

- Calcoliamo il contributo della prima corrente[†]

$$\begin{aligned} q_\mu j_1^\mu &= \bar{v}_{k_i} \gamma^\mu (k_i + p_i)_\mu (1 - \gamma^5) u_{p_i} = \bar{v}_{k_i} (\not{k}_i + \not{p}_i) (1 - \gamma^5) u_{p_i} \\ &= m_e \bar{v}_{k_i} (1 + \gamma^5) u_{p_i} - m_\nu \bar{v}_{k_i} (1 - \gamma^5) u_{p_i} \end{aligned}$$

$$\bar{v}_{k_i} \not{k}_i = -m_\nu \bar{v}_{k_i}$$

$$\not{p}_i u_{p_i} = m_e u_{p_i}$$

- Un risultato analogo per la seconda corrente

$$q_\nu j_2^\nu = m_e \bar{v}_{k_f} (1 - \gamma^5) u_{p_f} - m_\nu \bar{v}_{k_f} (1 + \gamma^5) u_{p_f}$$

- In definitiva i contributi sono proporzionali a termini $(a, b = e, \nu)$

$$\frac{m_a m_b}{M_W^2}$$

- Sono contributi trascurabili

- Osservazioni

- La corrente debole non è conservata

- Sarebbe conservata per masse nulle

- [†]Vedi Aitchison, Hey - Gauge Theories in particle physics 3° ed. - §21.3



Il modello Bosone Vettoriale Intermedio (IVB)

- Consideriamo il termine proporzionale a $g_{\mu\nu}$
- La costante g introdotta gioca il ruolo della carica e
- Consideriamo il limite di momento trasferito trascurabile

$$\mathfrak{M} = -\frac{g^2}{8} \frac{j_1^\mu g_{\mu\nu} j_2^\nu}{q^2 - M_W^2 + i\varepsilon}$$

$$q^2 \ll M_W^2$$

- In questo limite l'ampiezza diventa

$$\mathfrak{M} = \frac{g^2}{8M_W^2} j_1^\mu j_{2\mu} \quad \text{da confrontare con} \quad \mathfrak{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} j_1^\mu j_{2\mu}$$

- Si arriva pertanto alla identificazione

$$G = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{g^2}{q^2 - M_W^2} \xrightarrow{q^2 \rightarrow 0} \sqrt{2} \frac{g^2}{8M_W^2}$$

- Concludiamo che al primo ordine dello sviluppo perturbativo i risultati trovati con l'interazione corrente-corrente posso essere generalizzati al modello IVB semplicemente sostituendo G con l'espressione contenente il propagatore
- In particolare la sezione d'urto $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$

$$\sigma = \frac{G^2 s}{3\pi} \longrightarrow \sigma = \frac{g^4 s}{3 \cdot 32\pi (s - M_W^2)^2}$$

- Non è più divergente nel limite di alta energia
- La divergenza per $s = M_W^2$ è apparente
- Abbiamo trascurato Γ_W

Il modello Bosone Vettoriale Intermedio (IVB)

- Analogamente per un processo in canale t
- Calcoliamo il momento trasferito
 - Trascuriamo le masse dei fermioni

$$q^2 = (k_i - k_f)^2 \approx -2k_i \cdot k_f \approx -2E_i E_f (1 - \cos \theta)$$

$$E_i \approx E_f \approx \frac{\sqrt{s}}{2} \quad q^2 = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta)$$

- Il propagatore diventa

$$\frac{1}{q^2 - M_W^2} = \frac{2}{-s(1 - \cos \theta) - 2M_W^2}$$

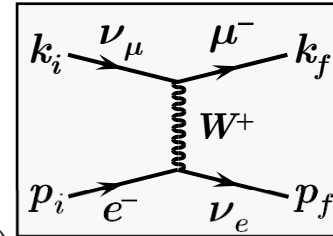
- La sezione d'urto diventa pertanto

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{g^4 s}{32\pi^2} \frac{1}{[s(1 - \cos \theta) + 2M_W^2]^2}$$

- Osserviamo che per piccoli momenti trasferiti la sezione d'urto è di nuovo quella calcolata nel modello di Fermi
- Il limite di alta energia non è più divergente

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \xrightarrow{s \ll M_W^2} \frac{G^2 s}{4\pi^2}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{g^4 s}{4\pi^2} \frac{4\alpha}{[s(1 - \cos \theta) + 2M_W^2]^2} \xrightarrow{s \gg M_W^2} \frac{g^4}{32\pi^2} \frac{1}{s(1 - \cos \theta)^2}$$



$$G = \sqrt{2} \frac{g^2}{8M_W^2}$$

Difficoltà del modello IVB

- Purtroppo, nonostante l'apparente successo, il modello IVB non è ancora una soluzione soddisfacente

- Esistono diagrammi di ordine superiore con più propagatori

- La particella $W^\pm$ introdotta può partecipare a reazioni in cui è reale (non virtuale)

$$k_i + p_i = k_f + p_f \quad k_i - k_f = p_f - p_i \equiv P$$

- Questi diagrammi divergono in modo non rinormalizzabile

- L'ampiezza del secondo diagramma è

$$\mathfrak{M}_{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{g^2}{8} \varepsilon_\mu^*(p_f, \lambda_1) \varepsilon_\nu^*(k_f, \lambda_2) \bar{v}(p_i, s_i) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \frac{\not{k}_i - \not{k}_f + m_e}{(k_i - k_f)^2 - m_e^2} \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u(k_i, s_i)$$

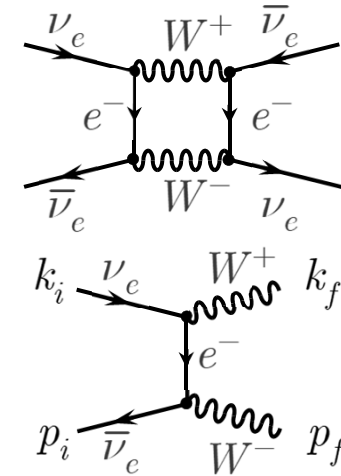
- Abbiamo indicato esplicitamente le polarizzazioni λ_1 e λ_2 dei bosoni W

- Possono essere anche le polarizzazioni longitudinali $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3$ (vedi diapositiva 532) nel limite di alta energia

$$\varepsilon(k, 3) \equiv \varepsilon_3(k) = \frac{1}{M_W} \left(|\mathbf{k}|, \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} k_0 \right) = \frac{(k_0, \mathbf{k})}{M_W} + \frac{M_W(-1, \hat{\mathbf{k}})}{(k_0 + |\mathbf{k}|)} \rightarrow \frac{(k_0, \mathbf{k})}{M_W} = \frac{k}{M_W}$$

$$k_0 \gg M_W$$

- Si può verificare che l'ampiezza $\mathfrak{M}_{00}$ diverge nel limite di alta energia $s \rightarrow \infty$



Difficoltà del modello IVB

- Verifichiamo che l'ampiezza calcolata per W con polarizzazione longitudinale diverge nel limite di alta energia dei bosoni

- In questo limite possiamo fare le sostituzioni

$$\varepsilon^\mu \rightarrow \frac{p_f^\mu}{M_W} \quad \varepsilon^\nu \rightarrow \frac{k_f^\nu}{M_W}$$

- L'ampiezza diventa ($k_i - k_f = p_f - p_i = P$)

$$\mathfrak{M}_{00} = \frac{g^2}{8M_W^2} \bar{v}(p_i, s_i) \not{p}_f (1 - \gamma^5) \frac{\not{P} + m_e}{P^2 - m_e^2} \not{k}_f (1 - \gamma^5) u(k_i, s_i)$$

- Trascurando le masse dei fermioni possiamo scrivere

$$\boxed{\bar{v}(p_i) \not{p}_i = 0} \quad \bar{v}(p_i) \not{p}_f \rightarrow \bar{v}(p_i) (\not{p}_f - \not{p}_i) \quad \boxed{\not{k}_i u(k_i) = 0} \quad \not{k}_f u(k_i) \rightarrow (\not{k}_f - \not{k}_i) u(k_i)$$

- Introducendo nell'ampiezza (inseriremo alla fine il fattore $\frac{g^2}{8M_W^2}$)

$$\mathfrak{M}_{00} = -\bar{v}(p_i, s_i) \not{P} (1 - \gamma^5) \frac{\not{P}}{P^2} \not{P} (1 - \gamma^5) u(k_i, s_i)$$

$$\not{P} \not{P} = P^2 \quad \longrightarrow \quad \mathfrak{M}_{00} = 2\bar{v}(p_i, s_i) \not{P} (1 - \gamma^5) u(k_i, s_i)$$

$$\boxed{\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_i^\mu P^\nu k_i^\rho P^\sigma = 0}$$

- Utilizzando la tecnica delle tracce calcoliamo il modulo quadrato

$$|\mathfrak{M}_{00}|^2 = 4Tr[\not{p}_i \not{P} (1 - \gamma^5) \not{k}_i (1 + \gamma^5) \not{P}] = 8Tr[\not{p}_i \not{P} (1 - \gamma^5) \not{k}_i \not{P}] = 8Tr[\not{p}_i \not{P} \not{k}_i \not{P}]$$

$$\boxed{|\mathfrak{M}_{00}|^2 = 32[2(p_i \cdot P)(k_i \cdot P) - p_i \cdot k_i P^2]}$$



Difficoltà del modello IVB

$$|\overline{\mathfrak{M}}_{00}|^2 = 32 \left[2(p_i \cdot P)(k_i \cdot P) - p_i \cdot k_i P^2 \right]$$

- Specializziamo nel centro di massa ($m_X = 0$)

$$k_i = (E, 0, 0, E) \quad k_f = (E, E \sin \theta, 0, E \cos \theta)$$

$$p_i = (E, 0, 0, -E) \quad p_f = (E, -E \sin \theta, 0, -E \cos \theta)$$

- Calcoliamo i prodotti scalari

$$p_i \cdot P = p_i \cdot k_i - p_i \cdot k_f = E^2(1 - \cos \theta)$$

$$k_i \cdot P = k_i \cdot k_i - k_i \cdot k_f = -E^2(1 - \cos \theta) \quad p_i \cdot k_i = 2E^2 \quad P^2 = -2E^2(1 - \cos \theta)$$

$$2(p_i \cdot P)(k_i \cdot P) - k_i \cdot k_f P^2 = 2E^4 \sin^2 \theta = \frac{s^2 \sin^2 \theta}{8}$$

- Reintroduciamo il fattore

$$\left(\frac{g^2}{8M_W^2} \right)^2 = \frac{G^2}{2}$$

$$|\overline{\mathfrak{M}}_{00}|^2 = 2G^2 s^2 \sin^2 \theta$$

$$\frac{d\Phi_2}{F} = \frac{1}{4s} \frac{d\Omega}{(4\pi)^2}$$

- Per la sezione d'urto, trascuriamo le masse e usiamo le formule usate per la reazione $\nu_e + e^-$ (dia. 519)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G^2 s \sin^2 \theta}{2(4\pi)^2} \quad \sigma = \frac{G^2 s}{3 \cdot 4\pi}$$

- Osserviamo che la sezione d'urto diverge
- Gli stati longitudinali causano divergenze

