
Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 17

5.12.2022

Proprietà isotopiche della corrente adronica
Fattori di forma
CVC e decadimento $\pi^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}_e$

anno accademico 2022-2023

Proprietà isotopiche della corrente adronica

- L'invarianza rispetto ad una trasformazione con $\Lambda \neq 0$ porta alla corrente (di Isospin) conservata

$$\hat{\mathbf{J}}^\mu = \hat{\bar{\Psi}} \gamma^\mu \frac{\vec{\tau}}{2} \hat{\Psi} \quad \vec{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{pmatrix}$$

- La corrente definita è un oggetto complicato
 - È un operatore vettoriale (nel senso di Lorentz) rispetto all'indice μ
 - È un operatore vettoriale (nello spazio dell'isospin) rispetto all'indice i degli operatori di Pauli τ_i
- $\mathbf{J}^\mu$ è conservata: per ogni componente i si definiscono le cariche isotopiche

$$\hat{\mathbf{T}} = \int \hat{\mathbf{J}}^0(x) d^3\mathbf{r} = \int \hat{\bar{\Psi}} \gamma^0 \frac{\vec{\tau}}{2} \hat{\Psi} d^3\mathbf{r}$$

$$\hat{\mathbf{T}} = \int \hat{\bar{\Psi}} \gamma^0 \frac{\vec{\tau}}{2} \hat{\Psi} d^3\mathbf{r}$$

- Gli operatori T_i appena definiti
 - Sono operatori come gli operatori di campo Ψ
 - Agiscono sugli stati dello spazio di Fock (in particolare sul vuoto)
 - Gli stati hanno adesso anche il grado di libertà isospin
 - T_i possono essere espressi tramite operatori di creazione e distruzione
- Si possono verificare le seguenti regole di commutazione

$$[\hat{T}_i, \hat{T}_j] = i\epsilon_{ijk} \hat{T}_k$$

$$[\hat{\mathbf{T}}, \hat{\Psi}] = -\frac{\vec{\tau}}{2} \hat{\Psi} \quad [\hat{\mathbf{T}}, \hat{\Psi}^\dagger] = \hat{\Psi}^\dagger \frac{\vec{\tau}}{2}$$



Proprietà isotopiche della corrente adronica

- Consideriamo adesso la corrente di isospin

$$J_m^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\tau_m}{2} \Psi$$

- Dall'ultima relazione della diapositiva precedente si può ricavare

$$[T_l, J_m^\mu] = i\epsilon_{lmk} J_k^\mu$$

- In analogia a quanto si fa nella teoria del momento angolare (o dello spin isotopico) si possono definire gli operatori

$$J_+^\mu = J_1^\mu + iJ_2^\mu \quad J_-^\mu = J_1^\mu - iJ_2^\mu \quad J_-^\mu = J_+^{\dagger\mu}$$

- Utilizzando le regole di commutazione precedenti si ottiene

$$[T_3, J_+^\mu] = +J_+^\mu$$

$$[T_3, J_-^\mu] = -J_-^\mu$$

- Notiamo che le ultime relazioni trovate sono formalmente identiche a quelle della diapositiva 461
 - La differenza è la sostituzione dell'operatore carica elettrica Q con l'operatore T_3
- Questa circostanza suggerisce che possa esistere una relazione fra la corrente debole carica $J^\dagger$ e la corrente di isospin J^+

Proprietà isotopiche della corrente adronica

- Gli operatori dello spazio isotopico sono classificati secondo le loro proprietà di trasformazione sotto l'azione di un operatore U di $SU(2)$

$$\hat{U} = \exp[i\Lambda \cdot \mathbf{T}]$$

- Operatori isoscalari: ad esempio il numero barionico

$$\hat{B} = \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} d^3\mathbf{r}$$

- Infatti

$$\hat{B}' = e^{i\Lambda \cdot \mathbf{T}} \hat{B} e^{-i\Lambda \cdot \mathbf{T}} = \int e^{i\Lambda \cdot \mathbf{T}} \hat{\Psi}^\dagger e^{-i\Lambda \cdot \mathbf{T}} e^{i\Lambda \cdot \mathbf{T}} \hat{\Psi} e^{-i\Lambda \cdot \mathbf{T}} d^3\mathbf{r}$$

$$e^{i\Lambda \cdot \mathbf{T}} \hat{\Psi} e^{-i\Lambda \cdot \mathbf{T}} = e^{i\Lambda \cdot \tau/2} \hat{\Psi} \quad = \int \hat{\Psi}^\dagger e^{-i\Lambda \cdot \tau/2} e^{i\Lambda \cdot \tau/2} \hat{\Psi} d^3\mathbf{r} = \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} d^3\mathbf{r} = \hat{B}$$

- Operatori isospinoriali: ad esempio il campo Ψ
- Si può dimostrare che Ψ si trasforma come un isospinore

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Psi}' = e^{i\Lambda \cdot \mathbf{T}} \hat{\Psi} e^{-i\Lambda \cdot \mathbf{T}} = e^{i\Lambda \cdot \tau/2} \hat{\Psi}$$

$$\hat{\Psi}' = e^{i\Lambda \cdot \tau/2} \hat{\Psi}$$

- Operatori isovettoriali: ad esempio la corrente

$$\mathbf{J}^\mu = \hat{\bar{\Psi}} \gamma^\mu \frac{\vec{\tau}}{2} \hat{\Psi}$$

- La verifica che sia un isovettore è più complicata
- Si può verificare[†] che per Λ infinitesimo

$$\Psi' = e^{i\Lambda \cdot \mathbf{T}} \mathbf{J}^\mu e^{-i\Lambda \cdot \mathbf{T}} \approx \bar{\Psi} \gamma_\mu \frac{\vec{\tau}}{2} \Psi + \Lambda \times \bar{\Psi} \gamma_\mu \frac{\vec{\tau}}{2} \Psi$$

- [†]Bernstein, Elementary Particles and their currents, W.H. Freeman & Company (1968)

Proprietà isotopiche della corrente adronica

- Discutiamo adesso l'importante relazione

$$\frac{\hat{Q}}{e} = \frac{\hat{B}}{2} + \hat{T}_3$$

- Consideriamo l'operatore B

$$\hat{B} = \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} d^3\mathbf{r}$$

$$\hat{B} = \int \begin{pmatrix} \psi_p^\dagger & \psi_n^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} d^3\mathbf{r} = \int (\psi_p^\dagger \psi_p + \psi_n^\dagger \psi_n) d^3\mathbf{r}$$

$$\hat{B} = (\hat{N}_p - \hat{N}_{\bar{p}} + \hat{N}_n - \hat{N}_{\bar{n}})$$

- Consideriamo adesso l'operatore T_3

$$\hat{T} = \int \hat{\Psi} \gamma^0 \frac{\tau}{2} \hat{\Psi} d^3\mathbf{r}$$

$$\begin{aligned} \hat{T}_3 &= \frac{1}{2} \int \hat{\Psi} \gamma^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{\Psi} d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{\Psi} d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int \begin{pmatrix} \psi_p^\dagger & \psi_n^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} d^3\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{2} \int (\psi_p^\dagger \psi_p - \psi_n^\dagger \psi_n) d^3\mathbf{r} \end{aligned}$$

- In definitiva

$$\hat{T}_3 = \frac{\hat{N}_p - \hat{N}_{\bar{p}}}{2} - \frac{\hat{N}_n - \hat{N}_{\bar{n}}}{2}$$

Proprietà isotopiche della corrente adronica

- Per finire possiamo definire la carica elettrica del sistema (in unità di e) come il numero di protoni

$$N_p = \int \psi_p^\dagger \psi_p d^3\mathbf{r} = \int \begin{pmatrix} \psi_p^\dagger & \psi_n^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix} \hat{\Psi} d^3\mathbf{r}$$

$$\boxed{\frac{\hat{Q}}{e} = \int \hat{\Psi} \gamma^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \hat{\Psi} d^3\mathbf{r}}$$

- Abbiamo utilizzato le seguenti matrici 2×2

$$\hat{Q} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{B} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{T}_3 \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Ovviamente si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Utilizzando la relazione precedente si trova

$$\boxed{\frac{\hat{Q}}{e} = \frac{\hat{B}}{2} + \hat{T}_3}$$

Proprietà isotopiche della corrente adronica

- Ritorniamo adesso alle considerazioni fatte nella diapositiva **466**
 - Avevamo visto le regole di commutazione

$$[T_3, J_+^\mu] = +J_+^\mu \qquad [T_3, J_-^\mu] = -J_-^\mu$$

- Abbiamo appena visto che $\frac{\hat{Q}}{e} = \frac{\hat{B}}{2} + \hat{T}_3$
 - Dato che la corrente conserva il numero barionico, B commuta con la corrente e quindi possiamo sostituire Q a T_3 nelle regole di commutazione

$$[Q, J_+^\mu] = +J_+^\mu$$

$$[Q, J_-^\mu] = -J_-^\mu$$

Confrontare con
diapositiva 466

- Tutto ciò ci permette di dire che la corrente adronica carica $J^{\dagger\alpha}$ ha evidenti somiglianze con un operatore nello spazio di isospin con le proprietà di un operatore di innalzamento o di abbassamento
 - La corrente $J^{\dagger\alpha} \equiv J_+^\alpha$ che induce, ad esempio, transizioni $n \rightarrow p$
 - La corrente $J^\alpha \equiv J_-^\alpha$ che induce, ad esempio, transizioni $p \rightarrow n$
 - Assumiamo pertanto che gli stati iniziale e finale siano elementi di un spazio isotopico

$$|p\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \qquad |n\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

La corrente adronica

- Studiamo ora il comportamento generale della corrente adronica in relazione alle sue proprietà di trasformazione per il gruppo di Lorentz
- Consideriamo un elemento di matrice della corrente fra uno stato iniziale e uno stato finale $|i\rangle$ ed $|f\rangle$

$$\langle f | h^\alpha(x) | i \rangle$$
 - Ad esempio nel decadimento β del neutrone $i = n \quad f = p \quad \langle p | h^\alpha(x) | n \rangle$
 - Oppure nel decadimento β del pione $i = \pi^- \quad f = \pi^0 \quad \langle \pi^0 | h^\alpha(x) | \pi^- \rangle$
- Innanzitutto la teoria deve essere invariante per traslazioni
- L'invarianza per traslazioni (P^μ generatori delle traslazioni) implica che si possa scrivere

$$h^\alpha(x) = e^{+i\hat{P}\cdot x} h^\alpha(0) e^{-i\hat{P}\cdot x} \quad \langle f | h^\alpha(x) | i \rangle = e^{iq\cdot x} \langle f | h^\alpha(0) | i \rangle \quad q^\mu = p_f^\mu - p_i^\mu$$

- Consideriamo adesso l'elemento di matrice

$$\langle f | h^\alpha(0) | i \rangle$$

- Abbiamo già notato che ha una componente polare e una assiale

$$\langle f | h^\alpha(0) | i \rangle = \langle f | \mathcal{V}^\alpha(0) | i \rangle - \langle f | \mathcal{A}^\alpha(0) | i \rangle$$

La corrente adronica: Fattori di Forma

- Nella trattazione del decadimento β abbiamo utilizzato il risultato (diap. **294**)

$$\langle p | \bar{\psi}_p \Gamma^\mu \psi_n | n \rangle = \bar{u}_{p_p} \Gamma^\mu u_{p_n} e^{iq \cdot x}$$

- Questo risultato vale solo per particelle puntiformi (senza struttura)
- Non è adeguato per calcoli precisi con adroni
 - Nel caso degli adroni occorre ricorrere a parametrizzazioni che superino la nostra incapacità di calcolare esattamente gli elementi di matrice in presenza dell'interazione forte
- Sulla base di considerazioni di invarianza relativistica si può scrivere la forma più generale che devono avere gli elementi di matrice
- Nel caso di fermioni (ad esempio neutrone $\rightarrow$ protone)



$$\langle p | V_\mu^\dagger | n \rangle = \bar{u}(p_f) \left[g_V \gamma_\mu + f_V \frac{i\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2m} + h_V \frac{q_\mu}{2m} \right] u(p_i)$$

$$\langle p | A_\mu^\dagger | n \rangle = \bar{u}(p_f) \left[g_A \gamma_\mu \gamma^5 + f_A \frac{i\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{2m} \gamma^5 + h_A \frac{q_\mu}{2m} \gamma^5 \right] u(p_i)$$

- Le quantità g_X, f_X, h_X sono funzioni scalari dell'unica quantità cinematica scalare non banale: $q^2 = (p_f - p_i)^2$
- Notiamo che per particelle senza struttura $f_X = h_X = 0$ e $g_X = 1$

La corrente adronica: Fattori di Forma

- I fattori di forma possono essere estratti da misure di decadimenti deboli in funzione del momento trasferito
 - In particolare abbiamo già visto alcuni risultati per il decadimento β del n
 - Data la piccola differenza di massa fra neutrone e protone il momento trasferito è limitato a valori molto piccoli: $q^2 \approx 0$
 - Nel limite di bassi momenti trasferiti sopravvivono solo i Fattori di Forma g_X

$$\langle p | V_\mu^\dagger | n \rangle \approx \bar{u}(p_f) g_V(0) \gamma_\mu u(p_i) \quad \langle p | A_\mu^\dagger | n \rangle \simeq \bar{u}(p_f) g_A(0) \gamma_\mu \gamma^5 u(p_i)$$

- Confrontando con risultati ottenuti da transizioni di Fermi $0^+ \rightarrow 0^+$

$$G_\beta = G g_V(0) \quad G_\beta = 1.13578 \pm 0.00027 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

- Utilizzando per G il valore ottenuto G_μ dalla vita media del muone

$$G_\mu = 1.16637 \pm 0.00001 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

- Supponendo $G = G_\mu$ otteniamo

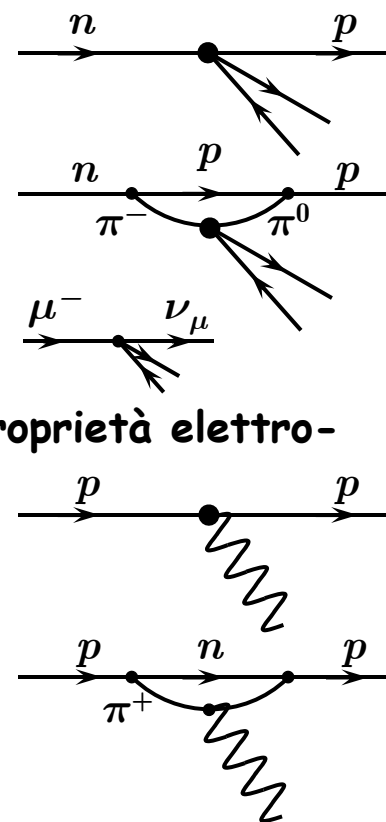
$$g_V(0) = 0.97377 \pm 0.00023$$

- Dagli studi di transizioni di Gamov–Teller si ottiene

$$\frac{g_A(0)}{g_V(0)} = 1.2695 \pm 0.0029$$

La corrente adronica vettoriale

- La cosa più interessante del risultato precedente è che $g_V(0)$ è praticamente 1
 - Significa che a basso momento trasferito la parte vettoriale della corrente adronica si comporta in modo molto simile alla corrente vettoriale del muone
 - L'interazione forte non modifica il decadimento debole
- Questa affermazione merita dei commenti
 - Per il decadimento del neutrone abbiamo calcolato
 - Poiché esiste il decadimento $\pi^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}_e$
 - Dovremmo considerare anche contributi tipo
 - Il fatto che $g_V(0) = 1$ significa che il secondo diagramma non modifica il primo che risulta uguale a quello del decadimento del leptone μ
- Questa circostanza è analoga a quanto succede alle proprietà elettromagnetiche del protone a basso momento trasferito
 - L'interazione elettromagnetica del protone è descritta dal diagramma
 - È identica a quella dell'elettrone (puntiforme)
 - Non è modificata da effetti del tipo indicato dal diagramma



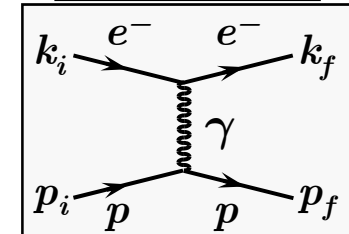
Digressione: la corrente elettromagnetica

- Nel caso dello scattering elastico elettrone - protone il processo è descritto dall'interazione di due correnti tramite un fotone
- L'elemento di matrice della corrente leptonica si può calcolare esattamente perché si possono usare i campi liberi

$$J_{em}^\mu(x) = \bar{\psi}_e(x) \gamma^\mu \psi_e(x)$$

$$\langle k_f | J_{em}^\mu(x) | k_i \rangle = \bar{u}_{k_f} \gamma^\mu u_{k_i} e^{iq \cdot x}$$

$$\mathcal{L}' = e J_{em}^\mu A_\mu$$



$$q = p_f - p_i$$

- Per l'elemento di matrice della corrente adronica bisogna utilizzare una parametrizzazione simile a quanto fatto per l'interazione debole

$$\langle p_f | J_{em}^\mu(x) | p_i \rangle = \bar{u}_{p_f} \left[F_1(q^2) \gamma^\mu + F_2(q^2) \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} + F_3(q^2) q^\mu \right] u_{p_i} e^{iq \cdot x}$$

- Che l'interazione elettromagnetica a basso momento trasferito non sia sensibile alle interazioni forti è espresso dal fatto che

$$F_1(0) = 1$$

- La cancellazione degli effetti dovuti ai diagrammi di ordine superiore nella ridefinizione della carica elettrica (escluso la polarizzazione del vuoto) è una conseguenza della conservazione della corrente elettromagnetica

$$\partial_\mu J_{em}^\mu(x) = 0$$

Digressione: la corrente elettromagnetica

- La conservazione della corrente elettromagnetica implica che $F_3 = 0$

$$\partial_\mu \langle p_f | J_{em}^\mu(x) | p_i \rangle = 0 \quad \partial_\mu \langle p_f | J_{em}^\mu(0) | p_i \rangle e^{iq \cdot x} = q_\mu \langle p_f | J_{em}^\mu(0) | p_i \rangle = 0$$

- Imponendo questa condizione sulla parametrizzazione

$$q_\mu \bar{u}_{p_f} \left[F_1(q^2) \gamma^\mu + F_2(q^2) \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} + F_3(q^2) q^\mu \right] u_{p_i} = 0$$

- Osserviamo che $q_\mu \gamma^\mu = \not{q} = \not{p}_f - \not{p}_i$

- Il primo termine diventa pertanto

$$\bar{u}_{p_f} (\not{p}_f - \not{p}_i) u_{p_i} = \bar{u}_{p_f} (m_p - m_p) u_{p_i} = 0$$

$$\not{p} u_p = m u_p$$

- Il secondo termine è nullo per l'antisimmetria di $\sigma^{\mu\nu}$

- Otteniamo in definitiva

$$q_\mu \bar{u}_{p_f} F_3(q^2) q^\mu u_{p_i} = 0 \quad q^2 F_3(q^2) \bar{u}_{p_f} u_{p_i} = 0 \quad \longrightarrow \quad F_3(q^2) = 0$$

- L'elemento di matrice della corrente elettromagnetica del protone è pertanto

$$\langle p_f | J_{em}^\mu(0) | p_i \rangle = \bar{u}_{p_f} \left[F_1(q^2) \gamma^\mu + F_2(q^2) \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u_{p_i}$$

- Gli esperimenti di scattering elastico $e p \rightarrow e p$ permettono di misurare i fattori di forma F_1 e F_2 in funzione del momento trasferito q^2

Digressione: la corrente elettromagnetica

- Per una particella puntiforme che obbedisce all'equazione di Dirac
 - Il Fattore di Forma F_1 è costante (non dipende da q^2) ed è uguale a 1
 - Il Fattore di Forma F_2 è sempre nullo
- Occorre tenere presente che il fattore F_2 rappresenta una interazione di momento magnetico aggiuntiva
 - La corrente vettoriale $\bar{u}_f \gamma^\mu u_i$ contiene già una interazione di tipo magnetico
 - Lo abbiamo visto nel limite di bassa energia
 - Lo si può vedere esplicitamente con la Scomposizione di Gordon della corrente vettoriale

$$\bar{u}_f \gamma^\mu u_i = \frac{1}{2m} \bar{u}_f \left[(p_f + p_i)^\mu + i\sigma^{\mu\nu} (p_f - p_i)_\nu \right] u_i$$

- Dal momento che F_2 descrive una interazione di momento magnetico aggiuntiva viene detta "Momento Magnetico Anomalo"
 - In particolare il suo valore a momento trasferito nullo $\kappa = F_2(0)$
 - In alcuni articoli o testi si fa la sostituzione $F_2 \rightarrow \kappa F_2$ con $F_2(0) = 1$ e κ è il momento magnetico anomalo

Scomposizione di Gordon

- La scomposizione di Gordon mette in evidenza i due termini di interazione di una particella di Dirac

$$\bar{u}_f \gamma^\mu u_i = \frac{1}{2m} \bar{u}_f \left[(p_f + p_i)^\mu + i\sigma^{\mu\nu} (p_f - p_i)_\nu \right] u_i$$

- L'interazione di una particella senza spin
- L'interazione dovuta al momento magnetico
- Per dimostrare la relazione sviluppiamo il secondo termine

$$\begin{aligned} \bar{u}_f \sigma^{\mu\nu} (p_f - p_i)_\nu u_i &= \frac{i}{2} \bar{u}_f (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) (p_f - p_i)_\nu u_i \\ &= \frac{i}{2} \bar{u}_f (\gamma^\mu \gamma^\nu p_{f\nu} - \cancel{p_f} \gamma^\mu - \gamma^\mu \cancel{p_i} + \gamma^\nu \gamma^\mu p_{i\nu}) u_i \\ &= -im \bar{u}_f \gamma^\mu u_i + \frac{i}{2} \bar{u}_f (\gamma^\mu \gamma^\nu p_{f\nu} + \gamma^\nu \gamma^\mu p_{i\nu}) u_i \end{aligned}$$

$\bar{u}_f \cancel{p_f} = m \bar{u}_f$
 $\cancel{p_i} u_i = m u_i$

- Dalle regole di commutazione delle matrici γ^μ

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \rightarrow \gamma^\mu \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu$$

- Utilizzando la relazione per i due termini otteniamo

$$\bar{u}_f \sigma^{\mu\nu} (p_f - p_i)_\nu u_i = -im \bar{u}_f \gamma^\mu u_i + \frac{i}{2} \bar{u}_f (2g^{\mu\nu} p_{f\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu p_{f\nu} + 2g^{\mu\nu} p_{i\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu p_{i\nu}) u_i$$

Scomposizione di Gordon

$$\begin{aligned}\bar{u}_f \sigma^{\mu\nu} (p_f - p_i)_\nu u_i &= -im\bar{u}_f \gamma^\mu u_i + \frac{i}{2} \bar{u}_f (2g^{\mu\nu} p_{f\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu p_{f\nu} + 2g^{\mu\nu} p_{i\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu p_{i\nu}) u_i \\ &= -im\bar{u}_f \gamma^\mu u_i + \frac{i}{2} \bar{u}_f (2p_f^\mu - \not{p}_f \gamma^\mu + 2p_i^\mu - \gamma^\mu \not{p}_i) u_i\end{aligned}$$

- Applicando ancora una volta l'equazione di Dirac otteniamo

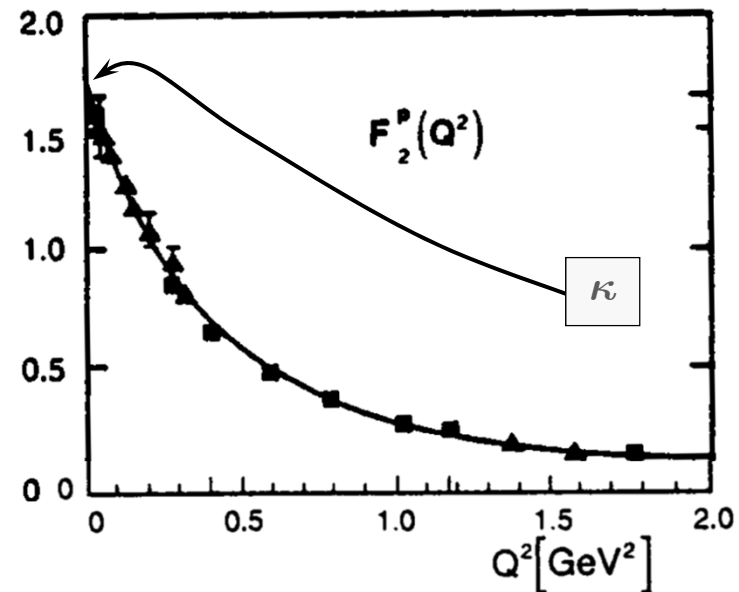
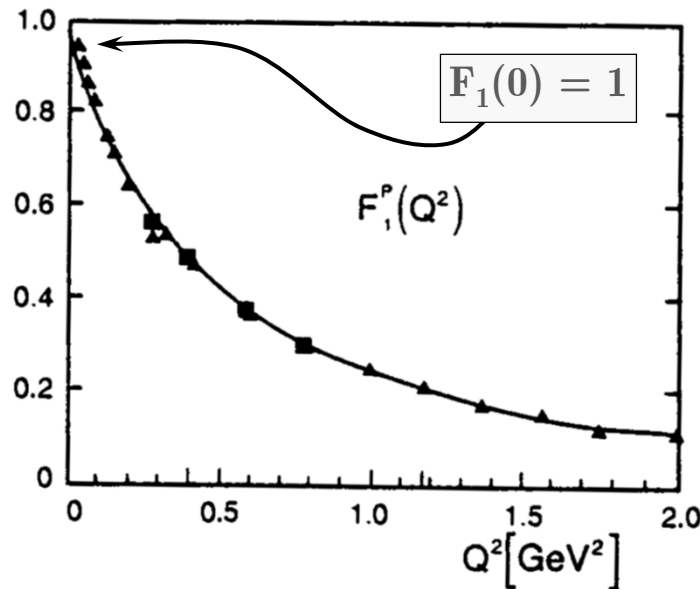
$$\bar{u}_f \sigma^{\mu\nu} (p_f - p_i)_\nu u_i = -i2m\bar{u}_f \gamma^\mu u_i + i\bar{u}_f (p_f^\mu + p_i^\mu) u_i$$

- Ridisponendo i termini otteniamo la scomposizione di Gordon della corrente vettoriale

$$\bar{u}_f \gamma^\mu u_i = \frac{1}{2m} \bar{u}_f \left[(p_f + p_i)^\mu + i\sigma^{\mu\nu} (p_f - p_i)_\nu \right] u_i$$

I Fattori di Forma del protone

- Ritorniamo ai fattori di forma elettromagnetici
 - Le figure riportano i due fattori di forma del protone[†]



$$\mu_p = (1 + \kappa) \frac{e}{2m_p}$$

$$1 + \kappa = 2.792\,847\,351 \pm 0.000\,000\,028$$

misure di NMR

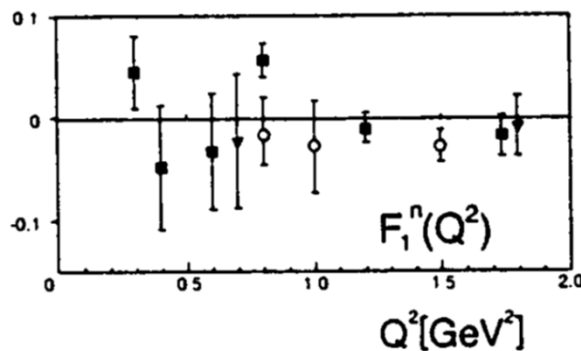
- [†] Borkowski et al Nucl. Phys. 93 (1975) p. 461
 Thomas A., Weise W. - The structure of the nucleon p. 11-12 - John Wiley and Sons 2001

I Fattori di Forma del protone

- Una analisi analoga può essere fatta per il neutrone

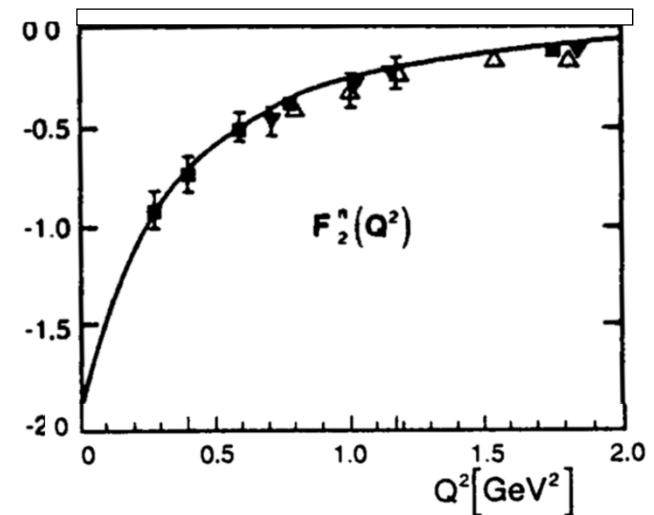
$$\langle p_f | J_{em}^\mu(0) | p_i \rangle = \bar{u}_{p_f} \left[F_1^n(q^2) \gamma^\mu + F_2^n(q^2) \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u_{p_i}$$

- Le figure mostrano i risultati di esperimenti $e n \rightarrow e n$ che permettono di misurare i fattori di forma in funzione del momento trasferito q^2



$$F_1^n(q^2) \approx 0$$

$$\mu_n = -1.9130427 \pm 0.0000005 \frac{e}{2m_p}$$



- Misure dei Fattori di Forma del neutrone mostrano una complessa struttura di cariche e correnti
 - Il neutrone si comporta come se avesse un nucleo positivo e una superficie negativa (con la carica totale ovviamente nulla): $n \rightarrow p + \pi^- \rightarrow n$

Corrente elettromagnetica e isospin

- Il formalismo precedente può essere unificato utilizzando gli isospinori Ψ per descrivere protoni e neutroni

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

- Per il protone possiamo scrivere la corrente vettoriale come

$$j_p^\mu = \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_p = \begin{pmatrix} \psi_p & \psi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \gamma^\mu \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

- La matrice 2×2 può essere riscritta utilizzando le matrici di Pauli τ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1 + \tau_3}{2}$$

- Otteniamo pertanto

$$j_p^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{1 + \tau_3}{2} \Psi$$

- Occorre tenere presente che gli operatori γ^μ e $(1 + \tau_3)/2$ operano in spazi differenti e quindi la loro posizione relativa non è essenziale
- Pertanto, nello spazio dell'isospin, la corrente del protone è la somma di due termini

$$j_p^\mu = j_S^\mu + j_3^\mu$$

- La corrente j_S^μ è un isoscalare

$$j_S^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu 1 \Psi$$

- La corrente j_3^μ è la componente 3 dell'isovettore

$$\mathbf{j}_V^\mu = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \vec{\tau} \Psi$$

Corrente elettromagnetica e isospin

- Analogamente per il neutrone

$$j_n^\mu = j_S^\mu - j_3^\mu$$

- Per tutte le correnti introdotte possiamo introdurre i fattori di forma

$$\langle p_f | j_X^\mu(0) | p_i \rangle = \bar{u}_{p_f} \left[F_1^X(q^2) \gamma^\mu + F_2^X(q^2) \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] T u_{p_i}$$

- A seconda dei casi la corrente J_X , gli spinori u e la matrice T sono

- Per $X = n, p$

- La corrente J_X è un operatore nello spazio degli spinori u_n, u_p
- La matrice T non è presente

- Per $X = S, V$

- La corrente J_X è anche un operatore nello spazio degli isospinori $u = \begin{pmatrix} u_p \\ u_n \end{pmatrix}$
- T è una delle due matrici 2×2
 - O la matrice identità $I(S)$
 - O la matrice $\tau_3(V)$

- Si hanno ovviamente le seguenti relazioni

$$F_{1,2}^S = \frac{1}{2} (F_{1,2}^p + F_{1,2}^n)$$

$$F_{1,2}^V = \frac{1}{2} (F_{1,2}^p - F_{1,2}^n)$$

Il Fattore di Forma del mesone $\pi^\pm$

- Richiamiamo alcuni risultati relativi al campo complesso $\hat{\phi}$ soluzione della equazione di Klein-Gordon
 - Descrive una particella puntiforme di spin zero $s^\pm$
 - La corrente elettromagnetica è data da

$$\hat{j}_{em}^\mu = ie \left[\hat{\phi}^\dagger \partial^\mu \hat{\phi} - (\partial^\mu \hat{\phi}^\dagger) \hat{\phi} \right]$$

- Consideriamo adesso gli stati di particella singola $|s^+, p\rangle = \sqrt{2E} \hat{a}_p^\dagger |0\rangle$
- Utilizzando l'espansione in operatori di creazione e distruzione per il campo $\hat{\phi}$ è facile calcolare l'elemento di matrice della corrente elettromagnetica

$$\langle s^+, p_f | \hat{j}_{em}^\mu(x) | s^+, p_i \rangle = e (p_i^\mu + p_f^\mu) e^{-i(p_i - p_f) \cdot x}$$

- Anche nel caso del mesone π l'interazione forte modifica l'elemento di matrice
- Considerazioni di invarianza relativistica portano a concludere che
 - L'elemento di matrice può dipendere solo dai 4-vettori p_i e p_f
 - L'elemento di matrice contiene funzioni scalari (invarianti) della variabile q^2
 - Invece che i due 4-vettori p_i e p_f è conveniente utilizzare la loro somma e la loro differenza

$$q^\mu = p_i^\mu - p_f^\mu$$

$$P^\mu = p_i^\mu + p_f^\mu$$

Il Fattore di Forma del $\pi^\pm$

- Pertanto l'elemento di matrice si può scrivere

$$\langle \pi^+, p_f | \hat{j}_{\text{em}}^\mu(x) | \pi^+, p_i \rangle = e \left[F_\pi(q^2) P^\mu + G_\pi(q^2) q^\mu \right] e^{-iq \cdot x}$$

- Una ulteriore semplificazione deriva dalla conservazione della corrente elettromagnetica

$$\partial_\mu \langle f | \hat{j}_{\text{em}}^\mu(x) | i \rangle = 0$$

- Osserviamo che l'elemento di matrice dipende da x solo attraverso l'esponenziale e pertanto

$$\partial_\mu \langle f | \hat{j}_{\text{em}}^\mu(x) | i \rangle = 0 \rightarrow q_\mu \langle f | \hat{j}_{\text{em}}^\mu(x) | i \rangle = 0$$

- Sostituendo

$$F_\pi(q^2) q_\mu P^\mu + G_\pi(q^2) q_\mu q^\mu = 0$$

- Si verifica facilmente che $q_\mu P^\mu = 0$ e quindi

$$q^2 G_\pi(q^2) = 0 \quad \longrightarrow \quad G_\pi(q^2) = 0$$

- In definitiva otteniamo

$$\langle \pi^+, p_f | \hat{j}_{\text{em}}^\mu(x) | \pi^+, p_i \rangle = e F_\pi(q^2) (p_i^\mu + p_f^\mu) e^{-iq \cdot x}$$

- La funzione $F_\pi(q^2)$ è il fattore di forma elettromagnetico del pione

- Per una particella scalare puntiforme $F_s(q^2) = 1$

$$\langle s^+, p_f | \hat{j}_{\text{em}}^\mu(x) | s^+, p_i \rangle = e (p_i^\mu + p_f^\mu) e^{-iq \cdot x}$$

Il Fattore di Forma del $\pi^\pm$

- Il fattore di forma del π^+ si può misurare in vari modi
 - Mediante la fotoproduzione di pioni con fotoni reali o virtuali

$$e^- p \rightarrow e^- n \pi^+$$

- Mediante lo scattering di pioni su elettroni

$$\pi^- e^- \rightarrow \pi^- e^-$$

- Calcoliamo il momento trasferito q^2

$$q^2 = (k_i - k_f)^2 = m_\pi^2 + m_\pi^2 - 2E_i E_f + 2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f$$

- In queste reazioni il momento trasferito è sempre negativo

- Si dice che q^2 è space-like

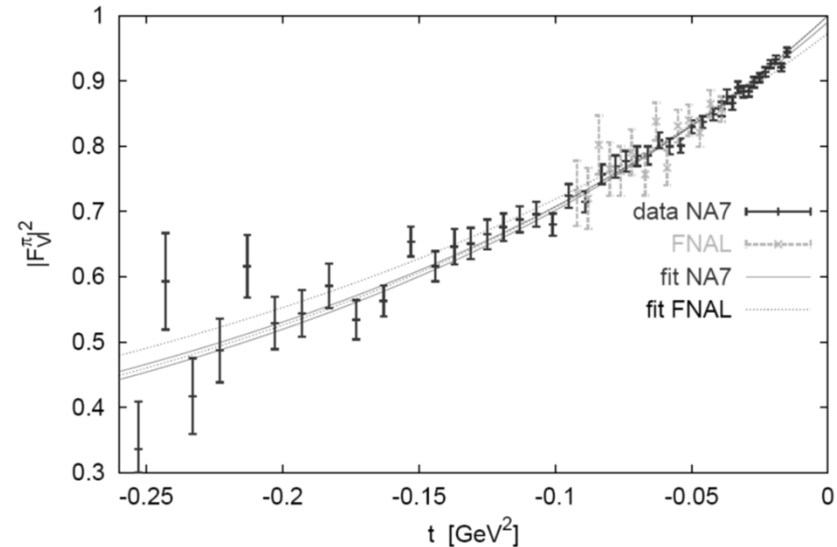
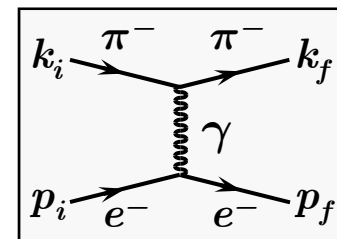
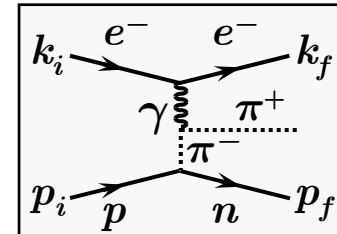
- Il valore massimo $q^2 = 0$ si ha per

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f$$

- La figura mostra la compilazione dei dati di due esperimenti

- I risultati sono compatibili con

$$F_\pi(0) = 1$$



La corrente debole adronica

- Da quanto fin qui esposto, in particolare richiamiamo la diapositiva 474, risulta evidente che la componente vettoriale della corrente debole adronica ha molte analogie con la componente isovettoriale della corrente elettromagnetica
 - Entrambe le correnti sono “insensibili” alle correzioni radiative forti
 - Il fattore di forma relativo tende a 1 per $q^2 \rightarrow 0$
 - È possibile che anche la componente vettoriale della corrente debole sia conservata
- Queste analogie risultano implicite se si fanno le seguenti assunzioni
 - Il nucleone è descritto da un campo isospinoriale
 - La teoria è invariante per trasformazioni globali di isospin SU(2)
 - Esistono 3 correnti conservate J_1, J_2, J_3
 - Alle 3 correnti corrispondono 3 cariche T_1, T_2, T_3
 - La componente isovettoriale della corrente adronica elettromagnetica è la corrente J_3

$j_V^\alpha = J_3^\alpha$
 - La componente vettoriale della corrente debole adronica è la corrente $J_1 + iJ_2$

$J^{\dagger\alpha} = J_1^\alpha + iJ_2^\alpha$
- Questa ipotesi fu proposta da Gell-Mann e Feynman e prende il nome di
 - Conserved Vector Current o, in breve, CVC

Il decadimento “ β ” del pione carico π^-

- Come applicazione della ipotesi CVC calcoliamo la larghezza del decadimento

$$\pi^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}_e$$

$$\frac{\Gamma_{\pi^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}_e}}{\Gamma_{\pi^- \rightarrow all}} = 1.036 \times 10^{-8}$$

- È un decadimento raro dato il piccolo volume dello spazio delle fasi dovuto al piccolo Q valore del decadimento
- È tuttavia molto interessante perché consente una verifica della CVC
- L'ampiezza del decadimento è data da

$$\mathfrak{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} \langle \pi^0 | J_+^\mu | \pi^- \rangle \bar{u}_e \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v_\nu$$

- Dobbiamo calcolare l'elemento di matrice adronico
- Innanzitutto, per l'invarianza relativistica, l'elemento di matrice può dipendere solo dai 4-vettori p_i e p_f

$$\langle \pi^0 | J_+^\mu | \pi^- \rangle = a p_i^\mu + b p_f^\mu$$

- Sappiamo inoltre che la corrente ha una parte polare e una assiale

$$\langle \pi^0 | J_+^\mu | \pi^- \rangle = \langle \pi^0 | V_+^\mu | \pi^- \rangle + \langle \pi^0 | A_+^\mu | \pi^- \rangle$$

Il decadimento “ β ” del pione carico π^-

- Dimostriamo adesso che solo la parte vettoriale V^+ della corrente può contribuire all'elemento di matrice

- Consideriamo le proprietà di trasformazione per inversione spaziale $\mathbb{P}$ (ricordiamo che $\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}$ e $\mathbb{P}|\pi, \mathbf{p}\rangle = -|\pi, -\mathbf{p}\rangle$)

- Per la componente temporale abbiamo

$$\begin{aligned} \langle \pi^0, \mathbf{p}_f | V_+^0 | \pi^-, \mathbf{p}_i \rangle &= \langle \pi^0, \mathbf{p}_f | \mathbb{P} \mathbb{P} V_+^0 \mathbb{P} \mathbb{P} | \pi^-, \mathbf{p}_i \rangle & \boxed{\mathbb{P} V_+^0 \mathbb{P} = V_+^0} \\ &= \langle \pi^0, -\mathbf{p}_f | V_+^0 | \pi^-, -\mathbf{p}_i \rangle \end{aligned}$$

- Per la componente spaziale

$$\langle \pi^0, \mathbf{p}_f | \mathbf{V}_+ | \pi^-, \mathbf{p}_i \rangle = -\langle \pi^0, -\mathbf{p}_f | \mathbf{V}_+ | \pi^-, -\mathbf{p}_i \rangle \quad \boxed{\mathbb{P} \mathbf{V}_+ \mathbb{P} = -\mathbf{V}_+}$$

- In modo analogo per la parte assiale dell'elemento di matrice si ottiene

$$\langle \pi^0, \mathbf{p}_f | A_+^0 | \pi^-, \mathbf{p}_i \rangle = -\langle \pi^0, -\mathbf{p}_f | A_+^0 | \pi^-, -\mathbf{p}_i \rangle \quad \boxed{\mathbb{P} A_+^0 \mathbb{P} = -A_+^0}$$

$$\langle \pi^0, \mathbf{p}_f | \mathbf{A}_+ | \pi^-, \mathbf{p}_i \rangle = \langle \pi^0, -\mathbf{p}_f | \mathbf{A}_+ | \pi^-, -\mathbf{p}_i \rangle \quad \boxed{\mathbb{P} \mathbf{A}_+ \mathbb{P} = \mathbf{A}_+}$$

- Nella diapositiva precedente abbiamo visto che per motivi di invarianza

$$\langle \pi^0 | J_+^\mu | \pi^- \rangle = a p_i^\mu + b p_f^\mu$$

- Solo l'elemento di matrice vettoriale si comporta come un 4-vettore
- Analogamente si potrebbe dimostrare che per $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ contribuisce solo A_+

Il decadimento “ β ” del pione carico π^-

- Utilizziamo adesso l'ipotesi CVC per calcolare l'elemento di matrice

$$\langle \pi^0 | J_+^\mu | \pi^- \rangle = \langle \pi^0 | V_+^\mu | \pi^- \rangle$$

- L'ipotesi CVC consiste nell'assumere che le correnti deboli cariche e la corrente elettromagnetica siano correnti di isospin V_1, V_2, V_3
- In particolare
 - La componente isovettoriale della corrente elettromagnetica è V_3
 - Per la corrente debole $V_+ = V_1 + i V_2$ ($V_- = V_1 - i V_2$)
- Nella diapositiva 466 (con l'identificazione $J = V$) abbiamo visto che le cariche J e le correnti V_i soddisfano le seguenti regole di commutazione

$$[T_l, V_m^\mu] = i\epsilon_{lmk} V_k^\mu$$

- In particolare

$$[T_1, V_3] = i\epsilon_{132} V_2 = -i V_2 \quad [T_2, V_3] = i\epsilon_{231} V_1 = i V_1$$

- Dalle due relazioni precedenti si ottiene

$$[T_1, V_3] + i[T_2, V_3] = -i V_2 - V_1 = -V_+ = [T_1 + iT_2, V_3] = [T_+, V_3]$$

- In conclusione

$$[V_3, T_+] = V_+$$

Il decadimento “ β ” del pione carico π^-

$$[V_3, T_+] = V_+$$

- Questa regola ci permette di trovare una relazione fra
 - L'elemento di matrice del decadimento β del π^-
 - L'elemento di matrice della corrente elettromagnetica del π^-
- Il π^- e il π^0 sono due autostati $|T, T_3\rangle$ dell'isospin

$$|\pi^-\rangle = |1, -1\rangle \quad |\pi^0\rangle = |1, 0\rangle$$

- Otteniamo pertanto

$$\langle \pi^0 | V_+^\mu | \pi^- \rangle = \langle 1, 0 | V_+^\mu | 1, -1 \rangle = \langle 1, 0 | [V_3, T_+] | 1, -1 \rangle$$

$$= \langle 1, 0 | V_3 T_+ - T_+ V_3 | 1, -1 \rangle = \langle 1, 0 | V_3 T_+ | 1, -1 \rangle - \langle 1, 0 | T_+ V_3 | 1, -1 \rangle$$

- Sfruttiamo le proprietà degli operatori di innalzamento e abbassamento

$$T_+ |T, T_3\rangle = \sqrt{(T - T_3)(T + T_3 + 1)} |T, T_3 + 1\rangle \quad T_+ |1, -1\rangle = \sqrt{2} |1, 0\rangle$$

$$T_- |T, T_3\rangle = \sqrt{(T + T_3)(T - T_3 + 1)} |T, T_3 - 1\rangle \quad T_- |1, 0\rangle = \sqrt{2} |1, -1\rangle$$

- Introducendo nell'elemento di matrice

$$\langle 1, 0 | V_3 T_+ | 1, -1 \rangle - \langle 1, 0 | T_+ V_3 | 1, -1 \rangle = \sqrt{2} \langle 1, 0 | V_3 | 1, 0 \rangle - \sqrt{2} \langle 1, -1 | V_3 | 1, -1 \rangle$$

Il decadimento “ β ” del pione carico π^-

- Utilizzando l'ipotesi CVC abbiamo pertanto ottenuto

$$\langle \pi^0 | V_+^\mu | \pi^- \rangle = \sqrt{2} \langle \pi^0 | V_3 | \pi^0 \rangle - \sqrt{2} \langle \pi^- | V_3 | \pi^- \rangle$$

- Ricordiamo inoltre che l'ipotesi CVC identifica V_3 con la corrente elettromagnetica j_{em}
- Un'ultima semplificazione si ottiene dalla proprietà della corrente elettromagnetica rispetto all'operatore di coniugazione di carica $C = C^{-1} = C^\dagger$

$$C^{-1} j_{\text{em}}^\mu C = -j_{\text{em}}^\mu$$

- Questa relazione dice semplicemente che il segno del campo elettromagnetico dipende dal segno della carica elettrica della particella
- Inoltre il π^0 è un autostato di C con autovalore $+1$ $C|\pi^0\rangle = +|\pi^0\rangle$
- Otteniamo pertanto

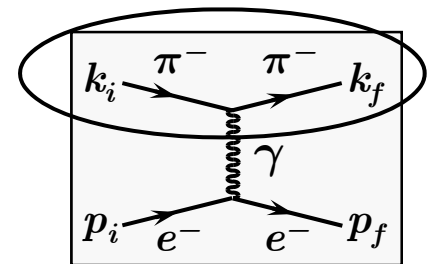
$$\langle \pi^0 | j_{\text{em}}^\mu | \pi^0 \rangle = \langle \pi^0 | C^\dagger j_{\text{em}}^\mu C | \pi^0 \rangle = -\langle \pi^0 | j_{\text{em}}^\mu | \pi^0 \rangle$$

- Da cui

$$\langle \pi^0 | j_{\text{em}}^\mu | \pi^0 \rangle = 0$$

- Pertanto l'elemento di matrice del decadimento β del π^- è

$$\langle \pi^0 | V_+^\mu | \pi^- \rangle = -\sqrt{2} \langle \pi^- | j_{\text{em}}^\mu | \pi^- \rangle$$



Il decadimento “ β ” del pione carico π^-

$$\langle \pi^0 | V_+^\mu | \pi^- \rangle = -\sqrt{2} \langle \pi^- | j_{\text{em}}^\mu | \pi^- \rangle$$

- Pertanto che l'elemento di matrice adronico della corrente debole può essere calcolato a partire dall'elemento di matrice della corrente elettromagnetica

$$\langle \pi^\pm, p_f | j_{\text{em}}^\mu(0) | \pi^\pm, p_i \rangle = F_\pi(q^2)(p_i^\mu + p_f^\mu)$$

- Il Q valore del decadimento è molto piccolo

$$Q = m_{\pi^-} - m_{\pi^0} - m_e = 139.570 - 134.977 - 0.511 = 4.082 \text{ MeV}$$

- La massima quantità di moto è di appena 4 MeV

$$q_{\text{max}}^2 = m_{\pi^-}^2 + m_{\pi^0}^2 - 2E_i E_f + 2\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f = m_{\pi^-}^2 + m_{\pi^0}^2 - 2m_{\pi^-} E_{\pi^0}$$

$$\mathbf{p}_i = 0$$

- Introducendo i valori numerici vediamo che $q^2 \approx (m_{\pi^-} - m_{\pi^0})^2$

$$E_{\pi^0} \approx m_{\pi^0}$$

$$q_{\text{max}}^2 = 4.626 \text{ MeV}^2 = 4.626 \times 10^{-6} \text{ GeV}^2 \simeq 0$$

- È possibile pertanto trascurare la dipendenza da q^2 e assumere $F_\pi(q^2) = 1$

- Pertanto

$$\langle \pi^0 | V_+^\mu | \pi^- \rangle = -\sqrt{2}(p_i^\mu + p_f^\mu)$$

- Il calcolo è a questo punto semplice ed è lasciato come esercizio

$$\Gamma_{\pi^0 e \nu} = \frac{G_\beta^2}{30\pi^3} (m_{\pi^-} - m_{\pi^0})^5$$

da confrontare con $\Gamma_{l\nu} = \frac{G_\beta^2}{8\pi} f_\pi^2 m_l^2 m_\pi \left(1 - \frac{m_l^2}{m_\pi^2}\right)^2$