
Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 16

29.11.2022

Proiezioni chirali

Correnti chirali - Universalità –

Decadimento del leptone $\mu^- \rightarrow e^- \nu_e \nu_\mu$

Decadimento $\pi^- \rightarrow l^- \nu_l$

Decadimento $\tau^- \rightarrow \pi^- \nu_\tau$

anno accademico 2022-2023

Proiezioni Chirali

- Esaminiamo in maggiore dettaglio la corrente leptonica

$$l^\mu(x) = \bar{\psi}_e(x) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_\nu(x)$$

- L'elemento di matrice di $l^\mu(0)$ fra il vuoto e lo stato $|e^- \bar{\nu}_e\rangle$ è

$$\langle e^- \bar{\nu}_e | l^\mu(0) | 0 \rangle = \bar{u}_{p_e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v_{p_\nu}$$

- Abbiamo già calcolato l'elemento di matrice di un operatore simile nel caso del decadimento β (slide 289)
- Ci chiediamo cosa implica la presenza della matrice $1 - \gamma^5$
 - In particolare cosa implica per l'elettrone
 - Abbiamo visto che nel decadimento β gli elettroni sono polarizzati
- Trasportiamo la matrice $1 - \gamma^5$ a sinistra

$$\begin{aligned} \bar{u}_{p_e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v_{p_\nu} &= \bar{u}_{p_e} (1 + \gamma^5) \gamma^\mu v_{p_\nu} = u_{p_e}^\dagger \gamma^0 (1 + \gamma^5) \gamma^\mu v_{p_\nu} \\ &= u_{p_e}^\dagger (1 - \gamma^5) \gamma^0 \gamma^\mu v_{p_\nu} = [(1 - \gamma^5) u_{p_e}]^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu v_{p_\nu} = \overline{[(1 - \gamma^5) u_{p_e}]} \gamma^\mu v_{p_\nu} \end{aligned}$$

- Dimostriamo adesso che l'applicazione di $1 - \gamma^5$ allo spinore $u(p)$ produce un elettrone con polarizzazione β
 - β è la velocità dell'elettrone

Proiezioni Chirali

- Ricordiamo la definizione dell'operatore elicità

$$\hat{h}(\hat{\mathbf{n}}) = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$$

- Nel seguito utilizzeremo la rappresentazione di Dirac

- In questa rappresentazione l'operatore $\boldsymbol{\Sigma}$ è

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

- Consideriamo gli spinori u_+ e u_-

$$u_+ = N \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi_+}{E + m} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \frac{p \chi_+}{E + m} \end{pmatrix} \quad u_- = N \begin{pmatrix} \chi_- \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi_-}{E + m} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \chi_- \\ \frac{-p \chi_-}{E + m} \end{pmatrix} \quad N = \sqrt{E + m}$$

- $\chi_{\pm}$ sono spinori bidimensionali autovettori di $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$

- Si verifica facilmente che gli spinori $u_{\pm}$ sono autostati dell'elicità

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \chi_{\pm} = \pm \chi_{\pm}$$

- Infatti

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} u_+ = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \frac{p \chi_+}{E + m} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \chi_+ \\ \frac{p \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \chi_+}{E + m} \end{pmatrix} = +N \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \frac{p \chi_+}{E + m} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} u_+ = +u_+$$

e analogamente

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} u_- = -u_-$$

- In definitiva, per $\lambda = \pm 1$

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} u_{\lambda} = \lambda u_{\lambda}$$



Proiezioni Chirali

- Il risultato precedente significa che $u_{\pm}$ rappresentano spinori completamente polarizzati ($\wp = 100\%$)
 - u_+ è uno spinore con polarizzazione 100% in direzione parallela a $\mathbf{p}$
 - u_- è uno spinore con polarizzazione 100% in direzione antiparallela a $\mathbf{p}$
- Consideriamo adesso un arbitrario spinore nella rappresentazione di Dirac (non necessariamente normalizzato)

$$u(p) = N \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi}{E + m} \end{pmatrix}$$

$$u_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) u$$

$$u_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) u$$

- Definiamo le proiezioni chirali u_R e u_L
 - Ricordiamo la forma di γ^5 nella rappresentazione di Dirac

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad 1 - \gamma^5 = \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \quad 1 + \gamma^5 = \begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix}$$

- Otteniamo

$$u_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) u(p) = \frac{N}{2} \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi}{E + m} \end{pmatrix} = \frac{N}{2} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m}\right) \chi \\ -\left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m}\right) \chi \end{pmatrix}$$

- Notiamo che le componenti superiori dello spinore e quelle inferiori non sono più indipendenti

Proiezioni Chirali

- Lo spinore u_L non è un autostato dell'operatore elicità h
 - Si può verificare facilmente che il valore medio dell'elicità è

$$\langle h \rangle_L = \frac{\langle u_L | \hat{h} | u_L \rangle}{\langle u_L | u_L \rangle} = -\frac{p}{E} = -\beta$$

- Consideriamo adesso u_R

$$u_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)u(p) = \begin{pmatrix} I & I \\ I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \chi}{E + m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m}\right) \chi \\ \left(1 + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m}\right) \chi \end{pmatrix}$$

- Analogamente al caso precedente si può verificare che

$$\langle h \rangle_R = \frac{\langle u_R | \hat{h} | u_R \rangle}{\langle u_R | u_R \rangle} = +\frac{p}{E} = +\beta$$

- Pertanto gli spinori u_L e u_R
 - Non sono autostati dell'operatore elicità
 - Tuttavia rappresentano stati con polarizzazione parziale $\wp = \pm\beta$
 - Notiamo infine che per $\beta \rightarrow 1$ la polarizzazione diventa completa e le due proiezioni chirali diventano autostati dell'elicità

Proiezioni Chirali

- Abbiamo pertanto ritrovato il risultato sulla polarizzazione β che avevamo ottenuto precedentemente con il calcolo esplicito dell'elemento di matrice
- Possiamo quindi interpretare la comparsa della polarizzazione degli elettroni come il risultato della struttura $V-A$ della corrente leptonica
 - L'operatore $1-\gamma^5$ proietta uno spinore arbitrario in uno stato di polarizzazione parziale longitudinale left-handed
- Ribadiamo inoltre che la polarizzazione diventa completa quando $\beta \rightarrow 1$
- Le notazioni u_R e u_L per indicare le proiezioni chirali possono generare confusione
 - Bisogna tenere distinti i concetti di chiralità e elicità
- L'Hamiltoniano delle interazioni deboli contiene le proiezioni chirali

Particelle di massa nulla

- Approfondiamo l'ultimo concetto
 - Ricordiamo l'equazione di Dirac per gli spinori in forma Hamiltoniana

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)u = Eu$$

- Per una particella di massa nulla (es. il neutrino) l'equazione diventa

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} u = pu \qquad \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{p} u = u$$

- Abbiamo scelto la soluzione con energia positiva e usato il fatto che se $m = 0$ allora $E = |\mathbf{p}| = p$
- Utilizziamo adesso la rappresentazione di Dirac

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\alpha} \gamma^5 = \gamma^5 \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

- Moltiplicando per γ^5 l'ultima forma dell'equazione di Dirac otteniamo

$$\gamma^5 \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{p} u = \gamma^5 u \qquad \boxed{\frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{p}}{p} u = \gamma^5 u}$$

Particelle di massa nulla

- Analogamente, ricordando che $(\gamma^5)^2 = I$ otteniamo

$$\frac{\alpha \cdot \mathbf{p}}{p} \gamma^5 \gamma^5 u = u \quad \boxed{\frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{p} \gamma^5 u = u}$$

- Sommiamo l'ultima equazione all'ultima della diapositiva precedente $\frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{p} u = \gamma^5 u$

$$\frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{p} (1 + \gamma^5) u = (1 + \gamma^5) u$$

- Da cui

$$\boxed{\frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{p} u_R = u_R}$$

- Se invece sottraiamo

$$\frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{p} u - \frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{p} \gamma^5 u = \gamma^5 u - u \quad \frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{p} (1 - \gamma^5) u = (\gamma^5 - 1) u$$

- Da cui

$$\boxed{\frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{p} u_L = -u_L}$$

- Pertanto nel caso di massa nulla le proiezioni chirali di una soluzione dell'equazione di Dirac coincidono con gli autostati di elicità

$$\boxed{u_R = u_+}$$

$$\boxed{u_L = u_-}$$

Rappresentazione Chirale delle matrici γ

- La rappresentazione di Dirac delle matrici γ è utile stata per discutere il limite non relativistico dell'equazione di Dirac
- Se si vogliono mettere in evidenza altri aspetti sono più convenienti altre rappresentazioni
 - Ad esempio il limite di alta energia o, equivalentemente, il limite di massa nulla
 - Aspetti legati alla handedness o Chiralità
- In questi casi è conveniente la rappresentazione Chirale o di Weyl[†]

$$\alpha = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix} \quad \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma = \gamma^0 \alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$$
$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \alpha \gamma^5 = \gamma^5 \alpha = \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

- Nella rappresentazione di Weyl si separano le proiezioni chirali R e L degli spinori
- Nella rappresentazione di Dirac si separano le componenti Large e Small legate al limite non relativistico
- [†]Attenzione: la rappresentazione qui riportata è conforme a quella utilizzata nel libro di testo (Aitchison-Hey)
Nel Peskin-Schoeder e nelle notes di Hitoshi Murayama viene utilizzata una convenzione differente

Rappresentazione Chirale

- Studiamo l'equazione di Dirac nella rappresentazione chirale

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi = E \psi$$

- Utilizziamo la rappresentazione chirale e la rappresentazione a blocchi dello spinore

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix}$$

- L'equazione diventa

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} - E \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = -m \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix}$$

- L'equazione matriciale corrisponde alle due equazioni accoppiate

$$\begin{array}{lll} \sigma \cdot \mathbf{p} \chi - E \chi = -m \phi & \text{nella rappresentazione di} & \sigma \cdot \mathbf{p} \phi - E \chi = -m \chi \\ \sigma \cdot \mathbf{p} \phi + E \phi = +m \chi & \text{Dirac avevamo trovato} & \sigma \cdot \mathbf{p} \chi - E \phi = +m \phi \end{array}$$

- Un aspetto interessante è che nel limite di massa nulla $m = 0$
 - Nella rappresentazione di Weyl le equazioni per χ e ϕ si disaccoppiano
 - Nella rappresentazione di Dirac le due equazioni rimangono accoppiate anche nel caso limite di massa nulla

Particelle di massa nulla

- Nel caso di massa nulla le equazioni diventano ($E = |\mathbf{p}| = p$ $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p} / p$)

$$\sigma \cdot \mathbf{p} \chi - E \chi = 0$$

$$\sigma \cdot \mathbf{p} \phi + E \phi = 0$$



$$\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \chi = +\chi$$

$$\sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \phi = -\phi$$

- Vediamo pertanto che i due spinori bidimensionali χ e ϕ sono autostati dell'elicità
- Inoltre nella rappresentazione chirale i due operatori di proiezione diventano

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Applicando i due operatori allo spinore generico

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix}$$

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \psi = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix}$$

- Notiamo infine che i due spinori ψ_L e ψ_R sono anche autovettori dell'operatore γ^5 (operatore chiralità) con autovalori $+1$ e -1

$$\gamma^5 \psi_R = +\psi_R$$

$$\gamma^5 \psi_L = -\psi_L$$

- Abbiamo già notato che per $m = 0$ chiralità ed elicità coincidono
- Per una massa non nulla sono due proprietà differenti
 - Elicità $\rightarrow$ polarizzazione completa Chiralità $\rightarrow$ polarizzazione parziale $\wp = \beta$

Proiezioni chirali

- La separazione delle due componenti è specifica delle rappresentazioni chirali
- Tuttavia molte delle altre proprietà viste sono indipendenti dalla massa e dalla rappresentazione

- Si possono definire due proiettori

$$\hat{P}_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \quad \hat{P}_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \quad \hat{P}_R \hat{P}_L = 0 \quad \hat{P}_R + \hat{P}_L = \hat{I}$$

- Si può sempre scomporre uno spinore in due componenti chirali $\psi = \psi_L + \psi_R$

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi = \hat{P}_R\psi \quad \psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi = \hat{P}_L\psi$$

- Le due componenti chirali di ψ sono autovettori di γ^5

$$\gamma^5\psi_R = \frac{1}{2}\gamma^5(1 + \gamma^5)\psi = \frac{1}{2}(\gamma^5 + 1)\psi = +\psi_R$$

$$\gamma^5\psi_L = \frac{1}{2}\gamma^5(1 - \gamma^5)\psi = \frac{1}{2}(\gamma^5 - 1)\psi = -\psi_L$$

- In generale le due componenti non sono soluzioni dell'equazione di Dirac

- Osserviamo che, dato che $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$, $P_R\gamma^\mu = \gamma^\mu P_L$ e $P_L\gamma^\mu = \gamma^\mu P_R$

- Pertanto se $(\not{p} - m)\psi = 0 \Rightarrow (\not{p} - m)\psi_R = (\not{p} - m)\hat{P}_R\psi = (\hat{P}_L\not{p} - \hat{P}_Rm)\psi \neq 0$

- Analogamente per l'altra componente

- Tuttavia se $m = 0$ le due componenti sono soluzioni dell'equazione di Dirac

$$\not{p}\psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \not{p}\psi_R = \not{p}\hat{P}_R\psi = \hat{P}_L\not{p}\psi = 0$$

Proiezioni chirali e antiparticelle

- Discutiamo adesso le proiezioni chirali degli spinori v associati alle soluzioni con energia negativa
- Abbiamo già notato che l'associazione dell'elicità fisica $+1$ agli autovalori dell'operatore $\Sigma \cdot \mathbf{p}$ è opposta a quella degli spinori u
 - Va comunque ricordato che la polarizzazione calcolata con l'elemento di matrice ha sempre il segno corretto, sia che si producano particelle (ad esempio e^-) o antiparticelle (ad esempio e^+)
- I proiettori di spin covarianti sono stati costruiti in modo da tenere conto dell'inversione di segno
- Analogamente a quanto succede per l'elicità risulta anche invertito il segno della polarizzazione associata alle proiezioni chirali L e R
- Questo aspetto è evidente nel caso di particelle di massa nulla
- Consideriamo ancora l'equazione di Dirac nella rappresentazione chirale

$$\sigma \cdot \mathbf{p} \chi - p_0 \chi = 0 \quad \text{nel caso di soluzione con} \quad \sigma \cdot \mathbf{p} \chi + E \chi = 0$$

$$\sigma \cdot \mathbf{p} \phi + p_0 \phi = 0 \quad \text{energia negativa } p_0 = -E \quad \sigma \cdot \mathbf{p} \phi - E \phi = 0$$

- Pertanto, per le soluzioni di energia negativa, le relazioni diventano

$$\begin{array}{ll} \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \chi = +\chi & \text{diventano} \quad \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \chi = -\chi \\ \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \phi = -\phi & \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}} \phi = +\phi \end{array}$$

Per le antiparticelle l'elicità delle proiezioni (spinori χ e ϕ) è scambiata

Proiezioni chirali e antiparticelle

- La conseguenza fisica di quanto detto è che nel decadimento β
 - Le particelle sono emesse con polarizzazione $-\beta_e$
 - Le antiparticelle sono emesse con polarizzazione $+\beta_\nu$
- Per finire osserviamo che nel decadimento β l'elicità dell'antineutrino è sempre right-handed (vedi diapositiva **416** e seguente)
- Ricordiamo l'elemento di matrice

$$\langle e^- \bar{\nu}_e | l^\mu(0) | 0 \rangle = \bar{u}_{p_e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v_{p_\nu}$$

- Lo spinore v si può scomporre

$$v = v_L + v_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)v + \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)v$$

- Calcoliamo l'effetto dell'operatore $1 - \gamma^5$ presente nell'elemento di matrice

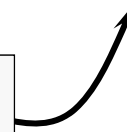
$$(1 - \gamma^5)v = (1 - \gamma^5) \left[\frac{1}{2}(1 + \gamma^5) + \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \right] v$$

Sopravvive solo v_L

$$= \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)(1 - \gamma^5)v + \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\cancel{(1 + \gamma^5)}v = (1 - \gamma^5)v_L$$

- Pertanto nel decadimento β
 - L'elicità dell'antineutrino è sempre RH
 - L'elicità del neutrino è sempre LH

• Chiralità L
• Elicità $RH (+)$

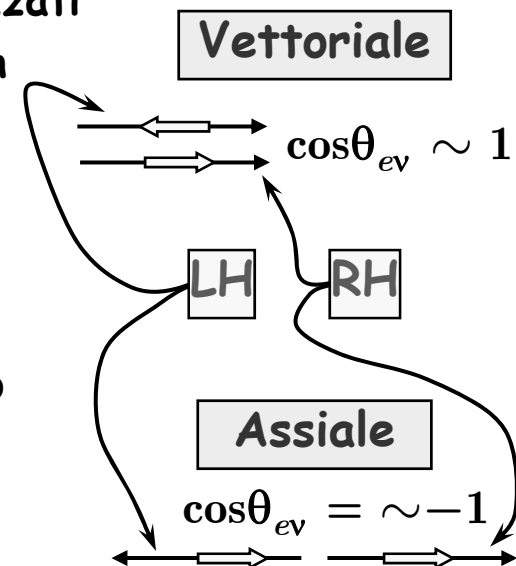


Violazione della parità e momento angolare

- Abbiamo visto che la presenza dell'operatore $1-\gamma^5$ determina una polarizzazione nei leptoni prodotti nel decadimento β
 - Fermioni left-handed
 - Antifermioni right-handed
- Questa circostanza ci permette di dare un'interpretazione interessante dei risultati sulle correlazioni angolari nel decadimento β

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

- La correlazione angolare è una conseguenza della conservazione del momento angolare e del fatto che i due leptoni sono polarizzati
- Abbiamo infatti visto che le transizioni di Fermi non cambiano il momento angolare del nucleo
 - I leptoni pertanto sono in uno stato di singoletto e il momento angolare emesso è $S = 0$
- Per le transizioni di Gamov-Teller invece il momento angolare nucleare varia di una unità
 - I leptoni sono adesso in uno stato di tripletto e il momento angolare emesso è $S = 1$



Le Correnti chirali Left-Handed

- Ci sono altre osservazioni che si possono fare sulla corrente

$$J^\mu = \bar{\psi}_a \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_b$$

- Osserviamo che

$$\frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{4}(1 - 2\gamma^5 + (\gamma^5)^2) = \frac{1}{4}(2 - 2\gamma^5) = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)}$$

- Possiamo pertanto scrivere

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_a \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_b &= 2\bar{\psi}_a \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \psi_b = 2\bar{\psi}_a \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \psi_b \\ &= 2\bar{\psi}_a \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \psi_b = 2\psi_a^\dagger \gamma^0 \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \psi_b \\ &= 2\psi_a^\dagger \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \gamma^0 \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \psi_b = 2 \left[\frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \psi_a \right]^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \psi_b \end{aligned}$$

Le Correnti chirali Left-Handed

$$J^\mu = 2 \left[\frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi_a \right]^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi_b$$

- Introduciamo le proiezioni chirali Left degli operatori di campo

$$\psi_L = \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi$$

- Inserendo nella corrente abbiamo

$$J^\mu = 2 [\psi_{aL}]^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi_{bL} = 2 \bar{\psi}_{aL} \gamma^\mu \psi_{bL}$$

$$J^\mu = 2 \bar{\psi}_{aL} \gamma^\mu \psi_{bL}$$

- Pertanto un altro modo di sintetizzare i risultati sperimentali sui decadimenti deboli è

- Solo le proiezioni chirali Left dei fermioni partecipano ai decadimenti deboli

chiralità non elicità

- Attenzione, solo per le correnti cariche mediate dai bosoni $W^\pm$

- Nel modello standard questa affermazione si traduce nel limitare il gruppo di simmetria $SU(2)$ dell'isospin debole alle componenti LH dei campi

$SU(2)_L$

Le Correnti chirali Left-Handed

- Per finire una interessante osservazione dovuta a Feynman e Gell-Man
 - Se solo le proiezioni chirali LH dei campi partecipano all'interazione debole allora i tipi possibili di interazione sono solamente V e A
- Infatti nella corrente i vari tipi operatore compaiono nella forma

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \Gamma_X \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \quad \text{NB: } \bar{\psi}_L = \bar{\psi} \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)$$

- Questa espressione si annulla per $X = S, T$ (scalare e tensore)

- $X = S: \Gamma_X = I$

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{4}(1 - (\gamma^5)^2) = \frac{1}{4}(1 - 1) = 0$$

- $X = T: \Gamma_T = \gamma^\mu \gamma^\nu$

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \gamma^\mu \gamma^\nu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{4}(1 + \gamma^5)(1 - \gamma^5) \gamma^\mu \gamma^\nu = 0$$

- Viceversa, per $X = V$ e $X = A$ gli operatori non si annullano

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \neq 0$$

$$\frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \gamma^5 \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{2} \gamma^5 (1 + \gamma^5) \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{4}(1 + \gamma^5)^2 \gamma^\mu \neq 0$$



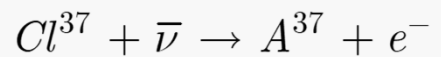
Il neutrino

- Abbiamo visto che la forma $V-A$ della interazione implica
 - Che i fermioni siano sempre left-handed
 - Che gli antifermioni siano sempre right-handed
- Dal momento che la massa del neutrino è nulla, una volta prodotto con una data polarizzazione questa sarà mantenuta per sempre
 - La velocità del neutrino è c l'elicità è la stessa in ogni sistema di riferimento
- Inoltre il neutrino interagisce solo per interazione debole e quindi solo se è left-handed
 - È legittimo quindi chiedersi se il neutrino right-handed esista o meno
 - Stesso discorso per l'antineutrino left-handed
- L'equazione di Dirac descrive i fermioni con una funzione a 4 componenti
 - 2 componenti per i due stati di polarizzazione della particella
 - 2 componenti per i due stati di polarizzazione dell'antiparticella
 - Dal momento che il neutrino e l'antineutrino necessitano di un solo stato di polarizzazione, lo spinore di Dirac per il neutrino è ridondante
 - Date le due proiezioni chirali u_L e u_R è possibile che u_R sia l'antineutrino ?
 - In questo caso particella e antiparticella coinciderebbero

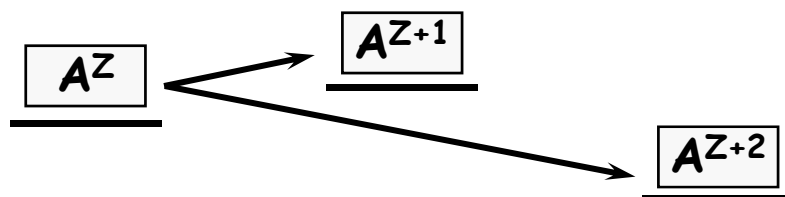


Il neutrino

- Se il neutrino e l'antineutrino fossero la stessa particella allora dovrebbe esistere la reazione



- Questa transizione è stata cercata utilizzando gli antineutrini prodotti da un reattore
 - La ricerca condotta da Davis ha portato a risultati negativi
- Altre possibilità di verifica sono offerte dal cosiddetto decadimento doppio β
- Se esistono 3 stati nucleari isobarici nelle relazioni di massa indicate



- Allora non è permesso energeticamente il decadimento

$$A^Z \not\rightarrow A^{Z+1} + e^{-} + \bar{\nu}$$

- Avviene invece la transizione del secondo ordine (molto rara) in cui due neutroni decadono

$$A^Z \rightarrow A^{Z+2} + e^{-} + \bar{\nu} + e^{-} + \bar{\nu}$$

Il neutrino

- Se però non esistesse distinzione fra il neutrino e l'antineutrino
 - Allora sarebbe possibile la reazione

$$A^Z \rightarrow A^{Z+1} + e^- + \nu \quad A^{Z+1} + \nu \rightarrow A^{Z+2} + e^-$$

- Lo stato intermedio è virtuale.
- La reazione completa sarebbe

$$A^Z \rightarrow A^{Z+2} + e^- + e^-$$

- Il decadimento con due neutrini è stato osservato
- Il decadimento senza neutrini non è mai stato osservato
 - Il neutrino e l'antineutrino sono pertanto distinti
- Se il decadimento doppio β venisse osservato occorrerebbe descrivere il neutrino con uno spinore di Majorana
 - Un formalismo che non distingue fra particelle e antiparticelle
 - Si ottiene con opportune combinazioni di operatori di creazione e distruzione di particelle e antiparticelle



Universalità

- Nel 1935 Yukawa predisse l'esistenza di una particella con massa dell'ordine di 100 MeV che doveva essere il quanto dell'interazione forte
 - Una particella di massa simile fu scoperta nel 1938 da Neddermeyer e Anderson nello studio dei raggi cosmici
- Nel 1945 Conversi, Pancini e Piccioni giunsero alla conclusione che la particella non poteva essere il quanto della interazione forte
 - Nel 1947 Muirhead, Lattes e Occhialini scoprirono la catena di decadimento

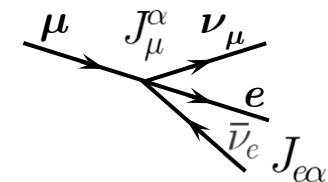
$$\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$$

- Nel 1949 Steinberger scoprì che il muone decade in 3 particelle leggere
 - Oggi sappiamo che

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$

- Da questo momento in poi nasce l'idea che l'interazione di Fermi possa spiegare molti decadimenti
 - In particolare, il decadimento del muone può essere spiegato con il diagramma
 - Vale a dire in modo analogo al decadimento β tramite l'interazione delle correnti dell'elettrone e del muone

Universalità



Universalità

- Occorre pertanto introdurre una corrente per il muone analoga a quella dell'elettrone

$$\hat{J}^\alpha(e) = \bar{\psi}_e \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e} \qquad \hat{J}^\alpha(\mu) = \bar{\psi}_\mu \gamma^\alpha (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_\mu}$$

- La corrente leptonica totale è

$$\hat{L}^\alpha = \hat{J}^\alpha(e) + \hat{J}^\alpha(\mu)$$

- Analogamente a quanto già visto la corrente $J^\alpha(\mu)$
 - Crea un muone μ^- o distrugge un antimuone μ^+ con il campo $\bar{\psi}_\mu$
 - Distrugge un neutrino ν_μ o crea un antineutrino $\bar{\nu}_\mu$ con il campo ψ_{ν_μ}
- Per descrivere la reazione $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ dobbiamo
 - Distruggere un muone e creare un neutrino
 - Abbiamo bisogno della corrente $(J^\alpha(\mu))^\dagger$

- Possiamo pertanto scrivere l'Hamiltoniana di interazione come

$$\mathcal{H}' = \frac{G_\mu}{\sqrt{2}} L_\alpha^\dagger L^\alpha$$

- Gli operatori necessari per l'elemento di matrice vengono automaticamente selezionati dagli stati iniziale e finale (a meno di costanti di normalizzazione e spinori)

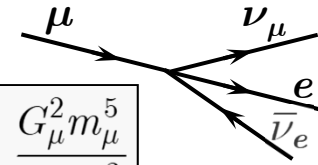
$$|i\rangle = |\mu^-\rangle = a_\mu^\dagger |0\rangle \qquad |f\rangle = |e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e\rangle = a_e^\dagger a_{\nu_\mu}^\dagger b_{\nu_e}^\dagger |0\rangle$$

Il decadimento del leptone μ

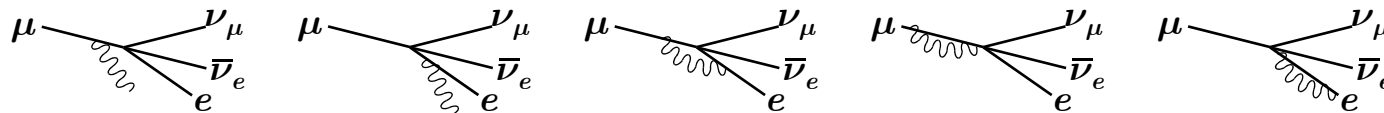
- Il decadimento del muone è descritto dal diagramma

- La vita media può essere calcolata con le stesse tecniche utilizzate per il calcolo della vita media del neutrone (si può assumere $m_e = 0$)

$$\Gamma = \frac{1}{\tau_\mu} = \frac{G_\mu^2 m_\mu^5}{192\pi^3}$$



- La misura della vita media del leptone μ è molto precisa e permette pertanto una determinazione molto accurata della costante di accoppiamento
 - Per distinguersela da quella ricavata dal decadimento β la chiamiamo G_μ
- Per poter trarre beneficio della precisione della misura sperimentale occorre tenere conto delle correzioni radiative elettromagnetiche
- Le correzioni radiative elettromagnetiche sono descritte dai diagrammi



- Tenendo conto di correzioni $O(\alpha^2)$ e con $m_e \neq 0$ si ottiene[†]

$$\frac{1}{\tau_\mu} = \frac{G_\mu^2 m_\mu^5}{192\pi^3} f\left(\frac{m_e^2}{m_\mu^2}\right) \left[1 + \frac{\alpha(m_\mu^2)}{2\pi} \left(\frac{25}{4} - \pi^2 \right) \right]$$

$$G_\mu = 1.16637 \pm 0.00001 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

$$G_\beta = 1.13578 \pm 0.00027 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

- La quasi identità fra G_μ e G_β è una forte indicazione che la stessa interazione descrive i decadimenti del neutrone n e del muone μ

- [†] Erler, Langacker PDG 2006 J. Phys. G 33 pag. 120

Universalità

- Altri processi che possono essere spiegati con estensioni dell'Hamiltoniana del decadimento β che abbiamo studiato

- Decadimenti e urti completamente leptonici

$$\begin{aligned}\mu^- &\rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e & \tau^- &\rightarrow e^- + \nu_\tau + \bar{\nu}_e & \nu_e + e^- &\rightarrow \nu_e + e^- \\ \tau^- &\rightarrow \mu^- + \nu_\tau + \bar{\nu}_\mu\end{aligned}$$

- Decadimenti e urti semi-leptonici senza variazione di Stranezza

$$\begin{aligned}n &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e & \pi^- &\rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e & \pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\ \Sigma^\pm &\rightarrow \Lambda + l^\pm + \nu_l & \nu_\mu + N &\rightarrow \mu^- + X & \tau^- &\rightarrow \pi^- + \nu_\tau\end{aligned}$$

- Decadimenti semi-leptonici con variazione di Stranezza

$$K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad K^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e \quad \Lambda^0 \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

- Decadimenti totalmente adronici con variazione di Stranezza

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^- \quad \Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0 \quad K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

- Tutti questi decadimenti sono stati studiati con successo e hanno confermato la validità della interazione fra le due correnti

La corrente adronica

- Nello studio del decadimento beta abbiamo utilizzato l'operatore corrente adronica

$$\hat{J}^\mu(h) = \bar{\hat{\psi}}_n \gamma^\mu (1 - \kappa \gamma^5) \hat{\psi}_p$$

- Ne abbiamo calcolato l'elemento di matrice fra due stati (il neutrone iniziale e il protone finale)
- Abbiamo inoltre notato che il fattore κ diverso da 1 è dovuto al fatto che gli adroni non sono puntiformi
 - Pertanto occorre tenere conto dell'interazione forte
- Nello studio delle correnti degli adroni risulta conveniente utilizzare una corrente $\hat{\mathcal{J}}^\mu$ generica (non definita esplicitamente)
 - È un operatore vettoriale (nel senso di Lorentz)
 - Dagli esperimenti abbiamo visto che deve avere una parte vettoriale e una assiale

$$\hat{\mathcal{J}}^\mu = \hat{V}^\mu + \hat{A}^\mu$$

- Gli esperimenti ci dicono quali regole di selezione deve riprodurre

La corrente adronica

- Per il calcolo delle quantità osservabili occorre calcolare l'elemento di matrice dell'operatore fra stati di particelle
 - Ad esempio, nel caso del decadimento β del neutrone si ha

$$\left\langle p, k_p, s_p \mid \hat{\mathcal{J}}^\mu \mid n, k_n, s_n \right\rangle = F^\mu(k_p, s_p, k_n, s_n)$$

- Le funzioni F^μ sono un insieme di c-numbers (non sono operatori)
- A seconda del tipo di accoppiamento ipotizzato le funzioni F^μ hanno uno (o più, o zero) indici di Lorentz
 - In dipendenza dalla natura degli stati (iniziale e finale) le funzioni F^μ hanno come argomenti 4-momenti e variabili di spin
- Complessivamente hanno ben precise proprietà di trasformazione per trasformazioni di Lorentz
- Utilizzando le proprietà di invarianza (di Lorentz) e le regole di selezione si può scrivere la forma più generale dell'elemento di matrice e confrontarlo con i dati sperimentali per determinare le parti incognite (ad esempio l'origine del fattore $\kappa \approx 1.26$)

Il decadimento $\pi^- \rightarrow l^- \nu_l$

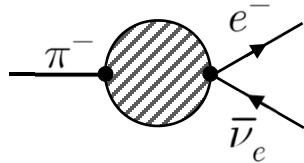
- Il mesone π predetto da Yukawa e scoperto da Neddermeyer e Anderson è l'adrone più leggero
- Non può decadere tramite interazione forte
- Decade tramite interazione debole

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

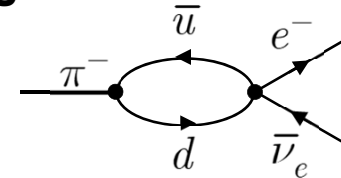
$$\pi^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$$

$$\pi^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \bar{\nu}_e$$

- Il decadimento è rappresentato schematicamente dal diagramma



Nell'ambito del modello a quark
il pione è uno stato legato



- Nel diagramma con i quark
 - Non è nota la struttura dello stato legato
 - I quark interagiscono tramite gluoni (QCD): non trattabile perturbativamente
- Si ipotizza una interazione corrente-corrente fra la corrente leptonica e la generica corrente adronica $\mathcal{J}^\mu$

$$\mathcal{H}' = \frac{G}{\sqrt{2}} (\mathcal{J}^\mu)^\dagger L_\mu$$

- Lo stato iniziale e lo stato finale sono $|i\rangle = |\pi^-\rangle$ $|f\rangle = |l^- \bar{\nu}_l\rangle$

Il decadimento $\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$

- L'elemento di matrice è $\langle f | \mathcal{H}' | i \rangle = \langle l^- \bar{\nu}_l | \mathcal{H}' | \pi^- \rangle$
 - Per gli adroni si passa da uno stato con un pione allo stato vuoto
 - Nel caso del decadimento β si passa dal neutrone al protone
 - Per i leptoni, come nel caso del decadimento β si passa da uno stato vuoto allo stato con due leptoni
- Si può procedere come nel caso del decadimento β per giungere alla seguente espressione per l'ampiezza

$$\mathfrak{M} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} \langle 0 | \mathcal{J}^\mu(0) | \pi^- \rangle \langle l^- \bar{\nu}_l | L_\mu(0) | 0 \rangle$$

- La parte leptonica è identica a quanto visto per il decadimento β

$$\langle l^- \bar{\nu}_l | L^\mu(0) | 0 \rangle = \bar{u}_l(k_l) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v_\nu(k_\nu)$$
- Consideriamo la parte adronica
 - Deve essere proporzionale a p^μ , il 4-momento del pione $\langle 0 | \mathcal{J}^\mu(0) | \pi^- \rangle = f p^\mu$
 - La costante di proporzionalità deve essere una funzione invariante
 - Può dipendere solo da quantità invarianti: $p^2 = m^2$
- Pertanto $f(p^2) = f_\pi$ è una costante

$$\langle 0 | \mathcal{J}^\mu(0) | \pi^- \rangle = f_\pi p^\mu$$

Il decadimento $\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$

$$\langle 0 | \mathcal{J}^\mu(0) | \pi^- \rangle = f_\pi p^\mu$$

- Per la conservazione del 4-momento totale abbiamo $p^\mu = k_l^\mu + k_\nu^\mu$
- La quantità f_π è una costante che dipende dalla natura del mesone che decade e ha le dimensioni di una energia
- L'elemento di matrice diventa pertanto

$$\mathfrak{M} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} f_\pi \bar{u}_l(k_l) p^\mu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v_\nu(k_\nu)$$

$$p^\mu \gamma_\mu = \not{p} = \not{k}_l + \not{k}_\nu$$

- Si può ulteriormente semplificare ricordando che

$$(\not{k} - m)u = 0$$

$$\bar{u}(\not{k} - m) = 0$$

$$(\not{k} + m)v = 0$$

$$\bar{v}(\not{k} + m) = 0$$

- Pertanto

$$\mathfrak{M} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} f_\pi \underbrace{\bar{u}_l(k_l)}_{m_l \bar{u}_l} (\not{k}_l + \underbrace{\not{k}_\nu}_{\not{k}_\nu v_\nu = 0}) (1 - \gamma^5) v_\nu(k_\nu) = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} f_\pi \underbrace{m_l}_{\uparrow} \bar{u}_l(k_l) (1 - \gamma^5) v_\nu(k_\nu)$$

Il decadimento $\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$

$$\mathfrak{M} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} f_\pi m_l \bar{u}_l(k_l)(1 - \gamma^5) v_\nu(k_\nu)$$

- Il modulo quadrato sommato sugli stati di polarizzazione finale si ottiene con le usuali tracce

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{G_\beta^2}{2} f_\pi^2 m_l^2 \text{Tr}[(\not{k}_l + m_l)(1 - \gamma^5) \not{k}_\nu (1 + \gamma^5)]$$

- La traccia si calcola facilmente

$$\begin{aligned} \text{Tr}[(\not{k}_l + m_l)(1 - \gamma^5) \not{k}_\nu (1 + \gamma^5)] &= \text{Tr}[(\not{k}_l + m_l)(1 - \gamma^5)^2 \not{k}_\nu] \\ &= 2\text{Tr}[(\not{k}_l + m_l)(1 - \gamma^5) \not{k}_\nu] = 2\text{Tr}[\not{k}_l \not{k}_\nu] = 8k_l \cdot k_\nu \end{aligned}$$

- Si ha inoltre

$$m_\pi^2 = p^2 = (k_l + k_\nu)^2 = k_l^2 + 2k_l \cdot k_\nu + \cancel{k_\nu^2} \quad k_l \cdot k_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2}$$

- In conclusione

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = 2G_\beta^2 f_\pi^2 m_l^2 (m_\pi^2 - m_l^2)$$

$$k_\nu^2 = m_\nu^2 = 0$$

Il decadimento $\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = 2G_\beta^2 f_\pi^2 m_l^2 (m_\pi^2 - m_l^2)$$

- Notiamo che l'elemento di matrice è costante, come ci si poteva attendere
- La larghezza di decadimento è

$$\Gamma = \int \frac{|\overline{\mathfrak{M}}|^2}{2m_\pi} d\Phi_2 = \frac{|\overline{\mathfrak{M}}|^2}{2m_\pi} \int d\Phi_2$$

- Ricordiamo lo spazio delle fasi per uno stato finale di due particelle nel c.m. del π (vedi diapositiva 270)

$$d\Phi_2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \delta(W_i - W_f) \frac{|\mathbf{p}_f|}{W_f} dW_f d\Omega \quad |\mathbf{p}_f| = \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi} \quad W_f = m_\pi$$

- L'integrale è banale

$$\int d\Phi_2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \int \delta(W_i - W_f) \frac{|\mathbf{p}_f|}{W_f} dW_f d\Omega = \frac{1}{(4\pi)^2} \int \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi} \frac{1}{m_\pi} d\Omega$$

$$\int d\Phi_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi^2}$$

- Più grande per $l = e$
- Più piccolo per $l = \mu$

Il decadimento $\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$

- In definitiva otteniamo per la larghezza di decadimento

$$\Gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{|\mathfrak{M}|^2}{2m_\pi} \int d\Phi_2 \quad \Gamma = \frac{1}{2m_\pi} 2G_\beta^2 f_\pi^2 m_l^2 (m_\pi^2 - m_l^2) \frac{1}{4\pi} \frac{m_\pi^2 - m_l^2}{2m_\pi^2}$$

$$\Gamma = \frac{G_\beta^2}{8\pi} f_\pi^2 m_l^2 m_\pi \left(1 - \frac{m_l^2}{m_\pi^2} \right)^2$$

- Il pione decade circa nel 100% dei casi in muone ed ha una vita media

$$\tau = 2.6033 \pm 0.0005 \times 10^{-8} \text{ s}$$

- Da questo valore si può ricavare il parametro fenomenologico[†] f_π

$$f_\pi = 130.7 \pm 0.1 \text{ MeV}$$

[†]M. Suzuki, PDG 2006, J. Phys. G 33 pag. 535

Il decadimento $\pi^- \rightarrow l^- \bar{\nu}_l$

$$\Gamma = \frac{G_\beta^2}{8\pi} f_\pi^2 \cancel{m_l^2} m_\pi \left(1 - \frac{m_l^2}{m_\pi^2} \right)^2$$

- Il decadimento in elettrone è molto raro
- La misura della frazione di decadimento dà

$$\frac{\Gamma(\pi \rightarrow e\nu)}{\Gamma(\pi \rightarrow \mu\nu)} = 1.230 \pm 0.004 \times 10^{-4}$$

- Va confrontata con il risultato del nostro calcolo

$$R = \frac{\Gamma(\pi \rightarrow e\nu)}{\Gamma(\pi \rightarrow \mu\nu)} = \frac{m_e^2 (m_\pi^2 - m_e^2)^2}{m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} \quad R = 2.339 \times 10^{-5} \times 5.487 = 1.283 \times 10^{-4}$$

- Vediamo che il nostro calcolo riproduce molto bene l'ordine di grandezza
- L'ingrediente chiave è la massa del leptone la cui origine è dovuta all'accoppiamento di tipo vettoriale (γ^μ o $\gamma^5\gamma^\mu$)