
Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 15

28.11.2022

Polarizzazione nel decadimento β
Esperimento di Frauenfelder
Hamiltoniana del decadimento β
Proiezioni chirali

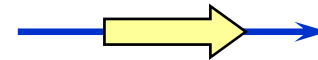
anno accademico 2022-2023

Polarizzazione nel decadimento β

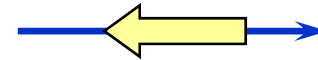
- La polarizzazione degli elettroni è definita come

$$\wp = \frac{N_R - N_L}{N_R + N_L}$$

- Il numero degli elettroni Right-Handed è N_R



- Il numero degli elettroni Left-Handed è N_L



- I numeri N_R e N_L sono proporzionali alle larghezze di decadimento

$$N_{R,L} \sim \int d\Gamma_{R,L}$$

$$d\Gamma_{R,L} = \frac{1}{2m_N} |\overline{\mathfrak{M}^{R,L}}|^2 d\Phi$$

- Come in precedenza l'elemento di matrice contiene interazioni S, V, A, T

$$\mathfrak{M}^{R,L} = \mathfrak{M}_S^{R,L} + \mathfrak{M}_V^{R,L} + \mathfrak{M}_A^{R,L} + \mathfrak{M}_T^{R,L}$$

Polarizzazione nel decadimento β

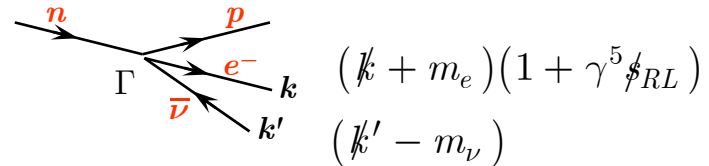
$$\mathfrak{M}^{R,L} = \mathfrak{M}_S^{R,L} + \mathfrak{M}_V^{R,L} + \mathfrak{M}_A^{R,L} + \mathfrak{M}_T^{R,L}$$

- Rivediamo i singoli termini
 - Osserviamo in particolare la polarizzazione degli spinori dell'elettrone

- **Scalare** $\mathfrak{M}_S^{R,L} = C_S \langle 1 \rangle \bar{u}_e(k, s_{R,L}) (1 + \alpha_S \gamma^5) v_\nu(k')$
- **Vettoriale** $\mathfrak{M}_V^{R,L} = C_V \langle 1 \rangle \bar{u}_e(k, s_{R,L}) (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0 v_\nu(k')$
- **Vettoriale assiale** $\mathfrak{M}_A^{R,L} = C_A \langle \sigma_j \rangle \bar{u}_e(k, s_{R,L}) (1 + \alpha_A \gamma^5) \gamma^5 \gamma^j v_\nu(k')$
- **Tensoriale** $\mathfrak{M}_T^{R,L} = 2C_T \langle \sigma_j \rangle \bar{u}_e(k, s_{R,L}) (1 + \alpha_T \gamma^5) \Sigma^j v_\nu(k')$

Polarizzazione nel decadimento β

- Il calcolo del quadrato del modulo procede in maniera analoga a quanto fatto precedentemente sommando su tutti gli stati di polarizzazione non osservati (n, p, ν)
- Dato che sommiamo sulla polarizzazione iniziale (del neutrone) non ci sono termini di interferenza SA, ST, VA, VT
 - Di nuovo abbiamo i due elementi di matrice di Fermi e di Gamov-Teller
- Le somme sugli stati di polarizzazione si fanno con la tecnica delle tracce
 - La polarizzazione degli elettroni si introduce tramite i proiettori di spin
- L'elemento di matrice di Fermi è pertanto



$$\begin{aligned}
 \overline{|\mathfrak{M}_F^{R,L}|^2} &= C_S^2 2m_N^2 \text{Tr} \left[(\not{k} + m_e) (1 + \gamma^5 \not{\epsilon}_{R,L}) (1 + \alpha_S \gamma^5) \not{k}' (1 - \alpha_S \gamma^5) \right] + \\
 &+ C_V^2 2m_N^2 \text{Tr} \left[(\not{k} + m_e) (1 + \gamma^5 \not{\epsilon}_{R,L}) (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0 \not{k}' (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0 \right] + \\
 &+ 2 \text{Re} \left[C_S C_V 2m_N^2 \text{Tr} \left[(\not{k} + m_e) (1 + \gamma^5 \not{\epsilon}_{R,L}) (1 + \alpha_S \gamma^5) \not{k}' (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0 \right] \right]
 \end{aligned}$$

Polarizzazione nel decadimento β

- Occorre definire i vettori di polarizzazione
- Il vettore s_R definisce una polarizzazione parallela alla direzione di moto: polarizzazione Right-Handed
- Il vettore polarizzazione ξ (nel sistema di riposo) è parallelo a $\mathbf{p}$ ($|\xi| = 1$)

$$s^0 = \frac{\mathbf{k} \cdot \xi}{m_e}$$

$$s_R^0 = \frac{\mathbf{k} \cdot \xi}{m_e} = \frac{|\mathbf{k}|}{m_e}$$

$$\mathbf{s} = \xi + \frac{(\xi \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}}{m_e (E_e + m_e)}$$

$$\mathbf{s}_R = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} + \frac{|\mathbf{k}| \mathbf{k}}{m_e (E_e + m_e)} = \frac{m_e (E_e + m_e) + |\mathbf{k}|^2}{m_e (E_e + m_e) |\mathbf{k}|} \mathbf{k}$$

$$= \frac{m_e E_e + E_e^2}{m_e (E_e + m_e) |\mathbf{k}|} \mathbf{k} = \frac{E_e \mathbf{k}}{m_e |\mathbf{k}|}$$

$$s_R = \left(\frac{|\mathbf{k}|}{m_e}, \frac{E_e}{m_e} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \right)$$

- Il vettore s_L si ottiene semplicemente cambiando $\xi \rightarrow -\xi$ e quindi

$$s_L = -s_R$$

Polarizzazione nel decadimento β

- Ricordiamo la definizione di polarizzazione

$$\wp = \frac{N_R - N_L}{N_R + N_L}$$

- Il numero di elettroni per le due polarizzazioni è dato da

$$N_{R,L} \sim \int d\Gamma_{R,L} \quad d\Gamma_{R,L} = \frac{1}{2m_N} |\overline{\mathfrak{M}}^{R,L}|^2 d\Phi$$

- Pertanto la polarizzazione è data da
 - L'integrale sullo spazio delle fasi è su tutte le variabili cinematiche escluso E_e
 - Vedremo che $\wp$ dipende dall'energia

$$\wp = \frac{\int \left(|\overline{\mathfrak{M}}^R|^2 - |\overline{\mathfrak{M}}^L|^2 \right) d\Phi}{\int \left(|\overline{\mathfrak{M}}^R|^2 + |\overline{\mathfrak{M}}^L|^2 \right) d\Phi}$$

- Calcoliamo il numeratore

- Ricordiamo che

$$\gamma^5 \not{\epsilon}_L = -\gamma^5 \not{\epsilon}_R$$

$$\not{\epsilon}_L = -\not{\epsilon}_R \quad \dots (\cancel{1} + \gamma^5 \not{\epsilon}_R) \dots - \dots (\cancel{1} + \gamma^5 \not{\epsilon}_L) \dots = 2\gamma^5 \not{\epsilon}_R$$

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}}_F^R|^2 - |\overline{\mathfrak{M}}_F^L|^2 &= C_S^2 2m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) 2\gamma^5 \not{\epsilon}_R (1 + \alpha_S \gamma^5) \not{k}' (1 - \alpha_S \gamma^5)] + \\ &+ C_V^2 2m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) 2\gamma^5 \not{\epsilon}_R (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0 \not{k}' (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0] + \\ &+ 2 \text{Re}[C_S C_V 2m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) 2\gamma^5 \not{\epsilon}_R (1 + \alpha_S \gamma^5) \not{k}' (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0]] \end{aligned}$$



Polarizzazione nel decadimento β

- Esaminiamo adesso un generico termine

- Ad es. il termine scalare

$$|\overline{\mathfrak{M}}_F^R|^2 - |\overline{\mathfrak{M}}_F^L|^2 = C_S^2 2m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) 2\gamma^5 \not{\epsilon}_R (1 + \alpha_S \gamma^5) \not{k}' (1 - \alpha_S \gamma^5)]$$

commuta con $\not{k}'$

anticommuta con $\not{k}'$

- Possiamo trasportare $(1 - \alpha_S \gamma^5)$ a sinistra trasformandolo in $(1 + \alpha_S \gamma^5)$

- Ricordiamo che $(\gamma^5)^2 = I$

- Otteniamo pertanto $(1 + \alpha_S \gamma^5)^2 = 1 + 2\alpha_S \gamma^5 + \alpha_S^2$

- Introduciamo questi risultati nel calcolo

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}}_F^R|^2 - |\overline{\mathfrak{M}}_F^L|^2 &= 4C_S^2 m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) \gamma^5 \not{\epsilon}_R (1 + \alpha_S \gamma^5)^2 \not{k}'] + \\ &\quad + 4C_V^2 m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) \gamma^5 \not{\epsilon}_R (1 + \alpha_V \gamma^5)^2 \gamma^0 \not{k}' \gamma^0] + \\ &\quad + 8 \text{Re}[C_S C_V m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) \gamma^5 \not{\epsilon}_R (1 + \alpha_S \gamma^5)(1 - \alpha_V \gamma^5) \not{k}' \gamma^0]] \end{aligned}$$

- Possiamo ancora anticommutare γ^5 con $\not{\epsilon}_R$

$$\gamma^5 (1 + \alpha_{S,V} \gamma^5)^2 = \gamma^5 (1 + 2\alpha_{S,V} \gamma^5 + \alpha_{S,V}^2) = (1 + \alpha_{S,V}^2) \gamma^5 + 2\alpha_{S,V}$$

Polarizzazione nel decadimento β

- Per il terzo termine

$$\begin{aligned}\gamma^5 (1 + \alpha_S \gamma^5) (1 - \alpha_V \gamma^5) &= \gamma^5 (1 - \alpha_V \gamma^5 + \alpha_S \gamma^5 - \alpha_S \alpha_V) \\ &= \gamma^5 (1 - \alpha_S \alpha_V) + \gamma^5 (\alpha_S - \alpha_V) \gamma^5 = (1 - \alpha_S \alpha_V) \gamma^5 + (\alpha_S - \alpha_V)\end{aligned}$$

- Introducendo nell'espressione

$$\begin{aligned}|\overline{\mathfrak{M}_F^R}|^2 - |\overline{\mathfrak{M}_F^L}|^2 &= -4C_S^2 m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) \not{\epsilon}_R ((1 + \alpha_S^2) \gamma^5 + 2\alpha_S) \not{k}'] + \\ &- 4C_V^2 m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) \not{\epsilon}_R ((1 + \alpha_V^2) \gamma^5 + 2\alpha_V) \gamma^0 \not{k}' \gamma^0] + \\ &- 8 \text{Re}[C_S C_V m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) \not{\epsilon}_R ((1 - \alpha_S \alpha_V) \gamma^5 + (\alpha_S - \alpha_V)) \not{k}' \gamma^0]]\end{aligned}$$

- E finalmente

$$\begin{aligned}\not{k} \not{\epsilon}_R \gamma^5 \not{k}' &\rightarrow 0 \\ \not{k} \not{\epsilon}_R \not{k}' &\rightarrow 0 \\ \not{\epsilon}_R \gamma^5 \not{k}' &\rightarrow 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\not{k} \not{\epsilon}_R \gamma^5 \gamma^0 \not{k}' \gamma^0 &\rightarrow 0 \\ \not{k} \not{\epsilon}_R \gamma^0 \not{k}' \gamma^0 &\rightarrow 0 \\ \not{\epsilon}_R \gamma^5 \gamma^0 \not{k}' \gamma^0 &\rightarrow 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\not{\epsilon}_R \gamma^5 \not{k}' \gamma^0 &\rightarrow 0 \\ \not{\epsilon}_R \not{k}' \gamma^0 &\rightarrow 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overline{\mathfrak{M}_F^R}|^2 - |\overline{\mathfrak{M}_F^L}|^2 &= -4C_S^2 m_N^2 \text{Tr}[2\alpha_S m_e \not{\epsilon}_R \not{k}'] - 4C_V^2 m_N^2 \text{Tr}[2\alpha_S m_e \not{\epsilon}_R \gamma^0 \not{k}' \gamma^0] - \\ &- 8 \text{Re}[C_S C_V m_N^2 \text{Tr}[(1 - \alpha_S \alpha_V) \gamma^5 \not{k} \not{\epsilon}_R \not{k}' \gamma^0 + (\alpha_S - \alpha_V) \not{k} \not{\epsilon}_R \not{k}' \gamma^0]]\end{aligned}$$



Polarizzazione nel decadimento β

- Siamo quasi alla fine !!!

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}_F^R}|^2 - |\overline{\mathfrak{M}_F^L}|^2 = & -4C_S^2 m_N^2 \text{Tr}[2\alpha_S m_e \not{s}_R \not{k}'] - 4C_V^2 m_N^2 \text{Tr}[2\alpha_V m_e \not{s}_R \gamma^0 \not{k}' \gamma^0] - \\ & - 8 \text{Re}[C_S C_V m_N^2 \text{Tr}[(1 - \alpha_S \alpha_V) \gamma^5 \not{k} \not{s}_R \not{k}' \gamma^0 + (\alpha_S - \alpha_V) \not{k} \not{s}_R \not{k}' \gamma^0]] \end{aligned}$$

$$\text{Tr}(\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)]$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5) = 4i\varepsilon^{\mu,\nu,\alpha,\beta}$$

$$\text{Re}[4i\varepsilon^{\mu,\nu,\alpha,0} k_\mu (s_R)_\nu k'_\alpha] = 0$$

$$\begin{aligned} = & -8C_S^2 m_N^2 \alpha_S m_e 4(s_R \cdot k') - 8C_V^2 m_N^2 \alpha_V m_e 4(2s_R^0 E_\nu - s_R \cdot k') - \\ & - 8(\alpha_S - \alpha_V) C_S C_V m_N^2 4(s_R \cdot k E_\nu - k \cdot k' s_R^0 + E_e s_R \cdot k') \end{aligned}$$

- Ricordiamo la proprietà del vettore s^μ : $s_R \cdot k = 0$
- Per finire, ricordiamo che s_R , k , k' sono
- Introduciamoli nel calcolo

$$s_R = \left(\frac{|\mathbf{k}|}{m_e}, \frac{E_e}{m_e} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \right)$$

$$k = (E_e, \mathbf{k})$$

$$k' = (E_\nu, \mathbf{k}_\nu)$$

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}_F^R}|^2 - |\overline{\mathfrak{M}_F^L}|^2 = & -8C_S^2 m_N^2 \alpha_S 4E_\nu E_e (\beta_e - \cos \theta_{e\nu}) - 8C_V^2 m_N^2 \alpha_V 4E_\nu E_e (\beta_e + \cos \theta_{e\nu}) - \\ & + 8(\alpha_S - \alpha_V) C_S C_V m_N^2 4m_e E_\nu \cos \theta_{e\nu} \end{aligned}$$

Polarizzazione nel decadimento β

- Ricordiamo che

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \left(|\mathfrak{M}^R|^2 - |\mathfrak{M}^L|^2 \right) d\Phi}{\int \left(|\mathfrak{M}^R|^2 + |\mathfrak{M}^L|^2 \right) d\Phi}$$

- Il numeratore (risultato del calcolo precedente) è

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}_F^R}|^2 - |\overline{\mathfrak{M}_F^L}|^2 = & -8C_S^2 m_N^2 \alpha_S 4E_\nu E_e (\beta_e - \cos \theta_{e\nu}) - 8C_V^2 m_N^2 \alpha_V 4E_\nu E_e (\beta_e + \cos \theta_{e\nu}) - \\ & + 8(\alpha_S - \alpha_V) C_S C_V m_N^2 4m_e E_\nu \cos \theta_{e\nu} \end{aligned}$$

- L'integrale sulle direzioni dell'elettrone e del neutrino elimina i termini dipendenti da $\cos \theta_{e\nu}$

$$-8C_S^2 m_N^2 \alpha_S 4E_\nu E_e \beta_e - 8C_V^2 m_N^2 \alpha_V 4E_\nu E_e \beta_e$$

- Per quel che riguarda il denominatore notiamo che i termini $\mathfrak{M}^R$ e $\mathfrak{M}^L$ contengono rispettivamente $\frac{1}{2}(1 - \gamma^5 \not{\epsilon}_R)$ e $\frac{1}{2}(1 + \gamma^5 \not{\epsilon}_R)$

- La somma di questi due termini è pertanto 1

- Il denominatore (integrato sulle direzioni) risulta uguale al risultato trovato per la distribuzione dell'energia

$$16m_N^2 E_e E_\nu [C_S^2 (1 + \alpha_S^2) + C_V^2 (1 + \alpha_V^2)]$$

- Abbiamo usato il risultato sperimentale che l'interferenza di Fierz è 0

Polarizzazione nel decadimento β

- La polarizzazione degli elettroni è pertanto

$$\wp = \frac{-8C_S^2 m_N^2 \alpha_S 4E_\nu E_e \beta_e - 8C_V^2 m_N^2 \alpha_V 4E_\nu E_e \beta_e}{16m_N^2 E_e E_\nu [C_S^2 (1 + \alpha_S^2) + C_V^2 (1 + \alpha_V^2)]}$$

$$\wp = -\beta_e \frac{2C_S^2 \alpha_S + 2C_V^2 \alpha_V}{C_S^2 (1 + \alpha_S^2) + C_V^2 (1 + \alpha_V^2)}$$

- Vedremo fra poco che gli studi sperimentali della polarizzazione degli elettroni hanno mostrato che

$$\wp = -\beta_e$$

- Pertanto le misure sperimentali richiedono che

$$\frac{2C_S^2 \alpha_S + 2C_V^2 \alpha_V}{C_S^2 (1 + \alpha_S^2) + C_V^2 (1 + \alpha_V^2)} = 1 \quad 2C_S^2 \alpha_S + 2C_V^2 \alpha_V = C_S^2 (1 + \alpha_S^2) + C_V^2 (1 + \alpha_V^2)$$

$$C_S^2 (1 + \alpha_S^2) - 2C_S^2 \alpha_S + C_V^2 (1 + \alpha_V^2) - 2C_V^2 \alpha_V = 0$$

$$C_S^2 (1 - \alpha_S)^2 + C_V^2 (1 - \alpha_V)^2 = 0$$

Polarizzazione nel decadimento β

- Ricordiamo che dalla misura della distribuzione dell'energia si conclude che il termine di interferenza di Fierz è assente
- L'implicazione di questo risultato sulle costanti di accoppiamento è

$$C_S C_V (1 - \alpha_S \alpha_V) = 0$$

- Abbiamo già notato non possiamo trarre conclusioni solo da questo risultato
- D'altro canto, dalla misura delle correlazioni angolari

$$a_F = \frac{C_V^2 (1 + \alpha_V^2) - C_S^2 (1 + \alpha_S^2)}{C_V^2 (1 + \alpha_V^2) + C_S^2 (1 + \alpha_S^2)} = 1$$

- Questo risultato implica

$$\begin{aligned} C_V^2 \cancel{(1 + \alpha_V^2)} - C_S^2 (1 + \alpha_S^2) &= C_V^2 \cancel{(1 + \alpha_V^2)} + C_S^2 (1 + \alpha_S^2) \\ -C_S^2 (1 + \alpha_S^2) &= +C_S^2 (1 + \alpha_S^2) \end{aligned}$$

- Da cui, come prima dell'introduzione della violazione della parità $C_S = 0$

- Combinando questo risultato con la misura della polarizzazione

$$\cancel{C_S^2 (1 - \alpha_S)^2} + C_V^2 (1 - \alpha_V)^2 = 0 \quad C_V^2 (1 - \alpha_V)^2 = 0 \quad \alpha_V = 1$$

Misura della Polarizzazione

- Per misurare la polarizzazione di un elettrone occorre chiedersi se ci sono effetti misurabili dipendenti dalla polarizzazione nella interazione di un elettrone o con un campo coulombiano o con un elettrone atomico
- Fra i metodi principali
 - Mott scattering
 - Scattering con il campo Coulombiano del nucleo di un atomo pesante
 - Sensibile solo polarizzazione trasversale alla direzione di moto
 - Møller scattering
 - Interazione dell'elettrone che si vuole analizzare con un elettrone atomico
 - L'elettrone atomico deve essere polarizzato
 - Bhabha scattering
 - Come il precedente ma per analizzare la polarizzazione di positroni
- Analizzeremo solo un esperimento che usa il primo metodo
 - Purtroppo lo scattering Coulombiano dipende dalla polarizzazione solo al secondo ordine dell'approssimazione di Born
 - L'effetto è piccolo: si usano nuclei pesanti (alto Z)
 - Inoltre, come già osservato, è sensibile solo ad una polarizzazione trasversale

Rotazione del Vettore di Polarizzazione

- Come trasformare la polarizzazione longitudinale in trasversale ?
 - Ovviamente con un campo elettromagnetico
- Per descrivere l'effetto di un campo elettromagnetico classico sullo spin di una particella si può utilizzare l'equazione semiclassica (Bargman, Michel, Telegdi)[†]

$$\hbar \frac{ds^\mu}{d\tau} = 2mF^{\mu\nu}s_\nu - 2u^\mu m' F^{\nu\lambda}u_\nu s_\lambda$$

$$m = \frac{e\hbar}{2mc}$$

momento magnetico

m'

momento magnetico anomalo

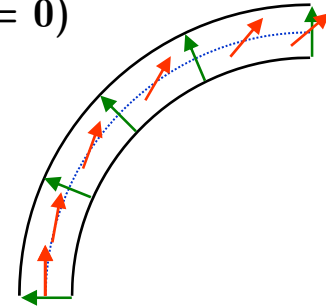
- L'equazione descrive il moto del vettore di polarizzazione s^μ sotto l'effetto di un campo elettromagnetico
 - Il campo non deve essere troppo intenso
 - Vale per qualunque campo "macroscopico"
 - Solo per campi a livello microscopico potrebbe essere non valida
- È più intuitivo utilizzare una equazione che descriva il moto del vettore ξ nel sistema di riposo istantaneo della particella
 - In questo sistema l'equazione diventa (possiamo assumere $m' = 0$)

$$\hbar \frac{d\xi}{dt} = \frac{2m}{\gamma} \xi \times \mathbf{B} + \frac{2m}{\gamma + 1} \xi \times (\mathbf{E} \times \beta)$$

[†]Landau, Lifshitz - Quantum Electrodynamics §41p,151 - Pergamon Press 1982

Rotazione del Vettore di Polarizzazione

- Il sistema utilizzato per ruotare la polarizzazione per elettroni di bassa energia fu inventato nel 1951 da Tolhoek e de Groot
 - Una guida circolare realizza un campo elettrico radiale ($B = 0$)
 - Gli elettroni di energia opportuna seguono una traiettoria circolare
 - Il campo elettrico fornisce una forza centripeta
- Se l'energia dell'elettrone non è elevata ($\gamma \approx 1$)
 - Il moto è praticamente non relativistico
 - Vedremo che la polarizzazione non risente del campo elettrico
 - La direzione dello spin rimane invariata
- Se l'energia dell'elettrone è elevata ($\gamma \gg 1$)
 - Lo spin sente l'effetto del campo elettrico e precessa
- Calcoliamo adesso la rotazione del vettore polarizzazione senza assunzioni sulla velocità dell'elettrone



Rotazione del Vettore di Polarizzazione

- Iniziamo calcolando il raggio dell'orbita in funzione del campo elettrico E e della velocità

- La legge di Newton

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E}$$

- La variazione di quantità di moto dell'elettrone quando ha percorso una lunghezza $Rd\theta$ è $d\mathbf{p} = \mathbf{p}d\theta$

- Pertanto

$$d\theta = \frac{|d\mathbf{p}|}{|\mathbf{p}|} = \frac{|\mathbf{F}|dt}{|\mathbf{p}|} = \frac{eEdt}{|\mathbf{p}|} = \frac{eEdt}{mc\gamma\beta}$$

- La velocità angolare è

$$\omega_p = \frac{d\theta}{dt} = \frac{eE}{mc\gamma\beta}$$

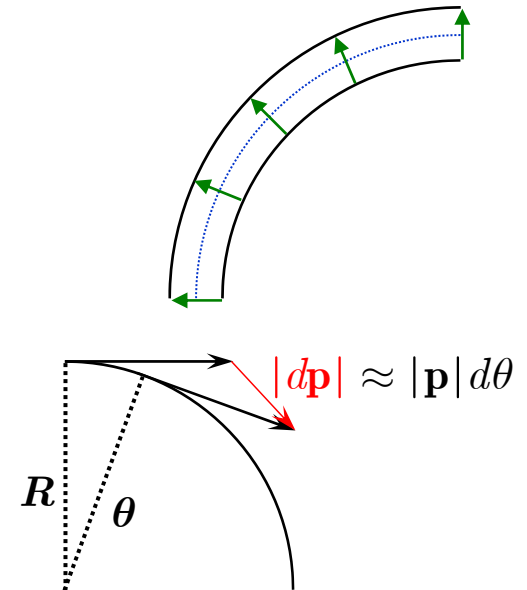
- Il periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_p} = 2\pi \frac{mc\gamma\beta}{eE}$$

- A questo punto calcoliamo il raggio dell'orbita

$$2\pi R = \beta c T = \frac{2\pi\beta mc^2\gamma\beta}{eE}$$

$$R = \frac{mc^2}{eE} \gamma\beta^2$$



Rotazione del Vettore di Polarizzazione

- Studiamo adesso la precessione dello spin
- Ricordiamo l'equazione Bargman, Michel, Telegdi

$$\hbar \frac{d\xi}{dt} = \frac{2m}{\gamma} \xi \times \mathbf{B} + \frac{2m}{\gamma + 1} \xi \times (\mathbf{E} \times \beta)$$

$$m = \frac{e\hbar}{2mc}$$

- Per $\mathbf{B} = 0$ diventa

$$\hbar \frac{d\xi}{dt} = \frac{2m}{\gamma + 1} \xi \times (\mathbf{E} \times \beta)$$

- Il vettore $\mathbf{E} \times \beta$ è perpendicolare al piano individuato da $\mathbf{E}$ e β
- Il vettore $\xi \times (\mathbf{E} \times \beta)$ è sul piano ed è perpendicolare a ξ
- Riscriviamo l'equazione di BGT

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi \times \Omega_\xi$$

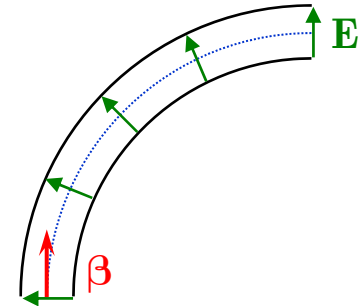
$$\Omega_\xi = \frac{2m}{\hbar(\gamma + 1)} \mathbf{E} \times \beta$$

- Descrive una precessione
- Lo spin quindi precessa

- La variazione dello spin $d\xi$ è sul piano

$$d\theta = \frac{|d\xi|}{|\xi|} = \frac{|\xi \times \Omega_\xi|}{|\xi|} dt \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_\xi = |\Omega_\xi| = \frac{2m}{\hbar(\gamma + 1)} |\mathbf{E}| |\beta| = \frac{2e\hbar}{\hbar 2mc(\gamma + 1)} |\mathbf{E}| \beta$$

$$\omega_\xi = \frac{2eE}{2mc(\gamma + 1)} \beta$$



Rotazione del Vettore di Polarizzazione

- Supponiamo adesso che l'elettrone abbia percorso un tratto $\Delta\ell$ dell'arco

$$\Delta\ell = R\Delta\alpha = \frac{mc^2}{eE} \gamma\beta^2 \Delta\alpha$$

- Vogliamo calcolare l'angolo fra

- La quantità di moto $\mathbf{p}$
- Il vettore di polarizzazione ξ

- Per percorrere la distanza $\Delta\ell$ l'elettrone impiega un tempo

$$\Delta T = \frac{\Delta\ell}{\beta c} = \frac{mc}{eE} \gamma\beta \Delta\alpha$$

- Ricordiamo la velocità della precessione dello spin

$$\omega_\xi = \frac{2eE}{2mc(\gamma + 1)} \beta$$

- Pertanto il vettore di polarizzazione ξ e il vettore $\mathbf{p}$ ruotano rispettivamente

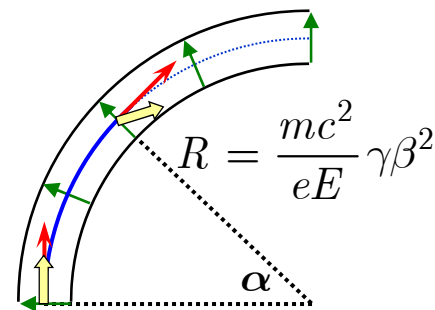
$$\Delta\theta_p = \Delta\alpha \quad \Delta\theta_\xi = \omega_\xi \Delta T = \frac{eE}{mc(\gamma + 1)} \beta \frac{mc}{eE} \gamma\beta \Delta\alpha = \frac{\gamma\beta^2}{(\gamma + 1)} \Delta\alpha$$

- Eliminiamo β

$$\frac{1}{\gamma + 1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma^2 - 1} = \frac{\gamma - 1}{\frac{1}{1 - \beta^2} - 1} = \frac{\gamma - 1}{\gamma^2 \beta^2}$$

- Sostituendo

$$\Delta\theta_\xi = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \Delta\alpha$$



Rotazione del Vettore di Polarizzazione

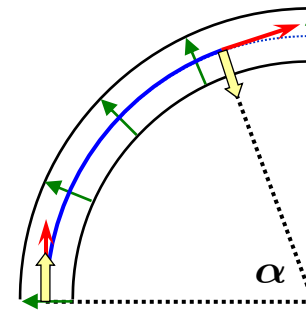
- Pertanto dopo aver percorso uno spazio $\Delta\ell = R\Delta\alpha$ l'angolo fra i due vettori è

$$\Delta\theta_{p\xi} \equiv \Delta\theta_p - \Delta\theta_\xi = \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\right) \Delta\alpha$$

$$\Delta\theta_{p\xi} = \frac{\Delta\alpha}{\gamma}$$

- Pertanto, affinché la quantità di moto e lo spin siano perpendicolari deve essere

$$\Delta\theta_{p\xi} = \frac{\pi}{2} = \frac{\Delta\alpha}{\gamma}$$

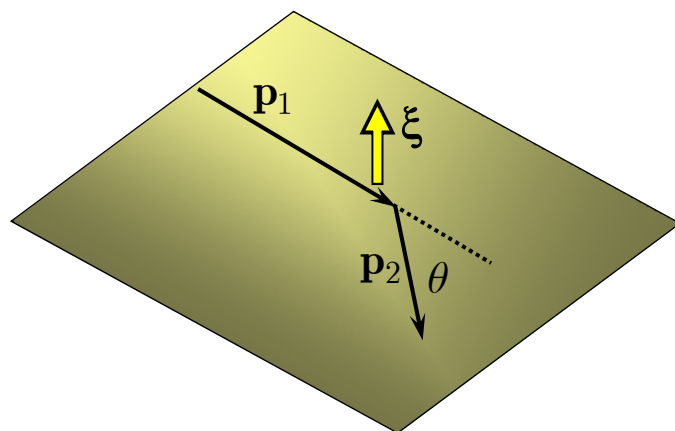
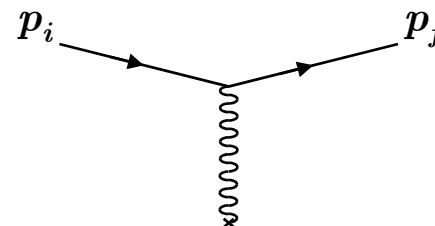


- Dato un elettrone di energia $mc^2\gamma$ la guida deve avere una lunghezza $R\Delta\alpha$
- L'angolo $\Delta\alpha$ è dato da

$$\Delta\alpha = \gamma \frac{\pi}{2}$$

Sezione d'urto Mott

- La sezione d'urto Mott è relativa all'interazione di un elettrone con il campo Coulombiano
 - Il bersaglio ha massa infinita
 - Si tiene conto dello spin dell'elettrone con la teoria di Dirac
- Abbiamo fatto questo calcolo al primo ordine della teoria perturbativa
 - A questo ordine non appaiono effetti legati alla polarizzazione
 - Una dipendenza dalla polarizzazione compare al secondo ordine[†]
- Diamo solo il risultato del calcolo

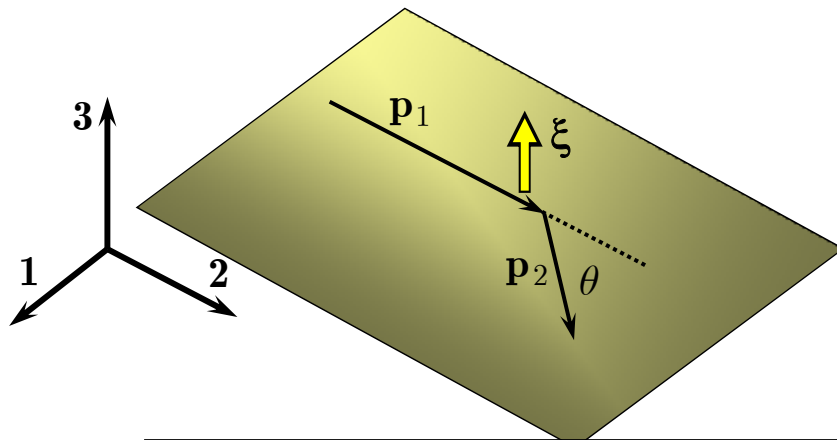


$$\sigma(\theta, \xi) \sim I(\theta) + \frac{D(\theta)}{|\sin \theta|} \hat{\mathbf{p}}_1 \times \hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \xi$$

- Per le funzioni $I(\theta)$ e $D(\theta)$ vedi Landau[†]
- [†]vedi Landau - Lifshitz - Quantum Electrodynamics 12.1 pag 534

Esperimento di Fraunfelder

- La figura mostra schematicamente l'apparato dell'esperimento di Fraunfelder per la misura della polarizzazione degli elettroni di un decadimento β



$$\sigma(\theta, \xi) \sim I(\theta) + \frac{D(\theta)}{|\sin \theta|} \hat{\mathbf{p}}_1 \times \hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \xi$$

- Notiamo che se l'angolo di deflessione θ va a sinistra il prodotto vettoriale $\hat{\mathbf{p}}_1 \times \hat{\mathbf{p}}_2$ cambia segno (cambia il segno della componente 1 di p_2)

$$(\hat{\mathbf{p}}_1 \times \hat{\mathbf{p}}_2)_3 = \varepsilon_{3jk} p_1^j p_2^k = \varepsilon_{321} p_1^2 p_2^1$$

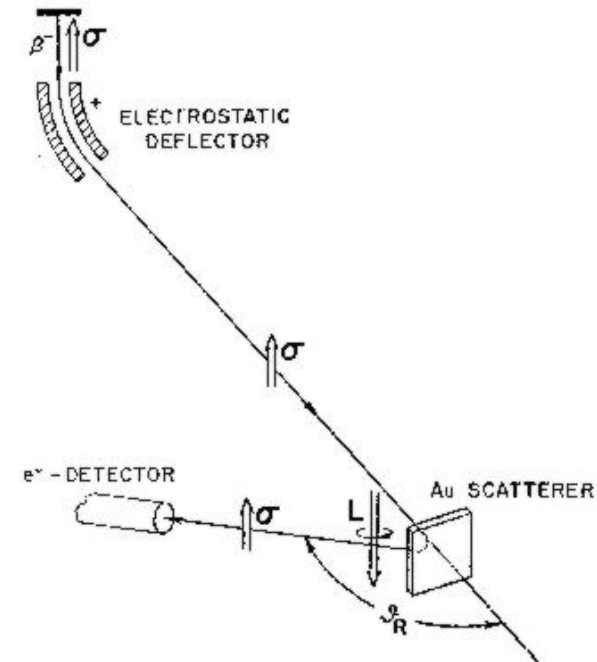


Fig. 7

Esperimento di Fraunfelder

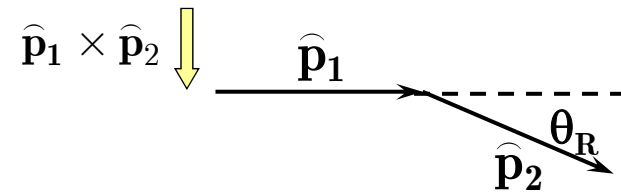
- Supponiamo adesso che gli elettroni siano completamente polarizzati
 - In un caso paralleli alla quantità di moto (RH)
 - Nell'altro caso antiparalleli (LH)
- Dopo la rotazione gli elettroni sono ancora completamente polarizzati
 - Nel primo caso verso l'alto
 - Nel secondo verso il basso
- Ricordiamo la formula della sezione d'urto

$$\sigma(\theta, \xi) \sim I(\theta) + \frac{D(\theta)}{|\sin \theta|} \hat{\mathbf{p}}_1 \times \hat{\mathbf{p}}_2 \cdot \xi$$

- Le misure da fare sono

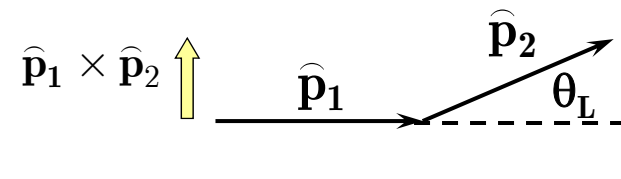
- La sezione d'urto per un angolo θ_R

- Spin up $\sigma(\theta_R, \uparrow) \sim I(\theta_R) - D(\theta_R)$
- Spin down $\sigma(\theta_R, \downarrow) \sim I(\theta_R) + D(\theta_R)$



- La sezione d'urto per un angolo θ_L opposto a θ_R

- Spin up $\sigma(\theta_L, \uparrow) \sim I(\theta_L) + D(\theta_L)$
- Spin down $\sigma(\theta_L, \downarrow) \sim I(\theta_L) - D(\theta_L)$



Esperimento di Fraunfelder

- Nell'esperimento gli elettroni non sono completamente polarizzati
 - La misura della polarizzazione $\wp$ è l'obiettivo dell'esperimento
 - La polarizzazione degli elettroni è data da

- N_+ polarizzati up (probabilità $\frac{N_+}{N}$)
- N_- polarizzati down (probabilità $\frac{N_-}{N}$)

$$\wp = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-} \quad N = N_+ + N_-$$

- La sezione d'urto osservata per un angolo θ_R è

$$\sigma(\theta_R) = \frac{N_+}{N} \sigma(\theta_R, \uparrow) + \frac{N_-}{N} \sigma(\theta_R, \downarrow) \quad \sigma(\theta_R) \sim I(\theta_R) - \wp D(\theta_R)$$

- Analogamente, per un angolo θ_L si osserva

$$\sigma(\theta_L) = \frac{N_+}{N} \sigma(\theta_L, \uparrow) + \frac{N_-}{N} \sigma(\theta_L, \downarrow) \quad \sigma(\theta_L) \sim I(\theta_L) + \wp D(\theta_L)$$

- Definiamo l'asimmetria δ $\delta = \frac{\sigma(\theta_L) - \sigma(\theta_R)}{\sigma(\theta_L) + \sigma(\theta_R)}$

- Ci mettiamo nella condizione

$$\theta_R = -\theta_L \equiv \theta$$

- Si può verificare che

$$I(\theta) = I(-\theta) \\ D(\theta) = D(-\theta)$$

$$\delta = \frac{D(\theta)}{I(\theta)} \wp \equiv S(\theta) \wp$$

Esperimento di Fraunfelder

- $S(\theta)$ è noto: la misura di δ permette di misurare $\wp$

$$\delta = \frac{D(\theta)}{I(\theta)} \wp \equiv S(\theta) \wp$$

- Osservazioni

- $S(\theta)$ dipende anche dall'energia dell'elettrone
- È necessario che gli angoli θ_R e θ_L siano perfettamente simmetrici
- L'esperimento è sensibile solo alla polarizzazione trasversale
 - Un errore nella rotazione dello spin porta ad un errore sistematico su $\wp$
- L'effetto aumenta al crescere di Z
 - Si usano metalli pesanti come l'oro
- Per ottimizzare l'esperimento si può cercare l'angolo al quale l'effetto è più grande
- Occorre però tenere presente che al crescere dell'angolo la sezione d'urto diminuisce
 - Occorre trovare un compromesso tra la dimensione dell'effetto misurato e l'errore statistico con cui esso viene determinato
- La tabella mostra i risultati del primo esperimento
 - Con esperimenti successivi

$$\wp = -\beta_e$$

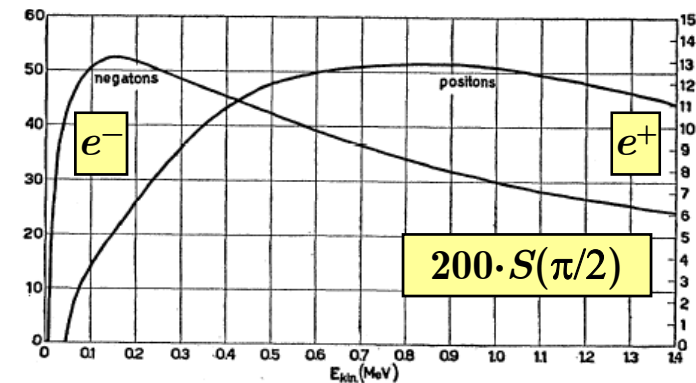


TABLE I. The polarization of electrons from Co^{60} .

Electron energy keV	$\beta = v/c$	Gold scattering foil mg/cm ²	Left-right asymmetry L/R	Longitudinal polarization P
50	0.41	0.15	1.03 ± 0.03	-0.04
68	0.47	0.15	1.13 ± 0.02	-0.16
77	0.49	0.05	1.35 ± 0.06	-0.40
77	0.49	0.15	1.30 ± 0.09	-0.35

Determinazione di C_A e C_V

- Abbiamo già visto che la misura della vita media di nuclei permette di determinare la costante di accoppiamento G_β

$$\lambda_F = \frac{1}{\tau} = \frac{G_\beta^2}{2\pi^3} \xi f$$

- Tuttavia, il parametro ξ contiene una dipendenza dal rapporto C_A/C_V

$$\xi = |\langle 1 \rangle|^2 + \frac{C_A^2}{C_V^2} |\langle \sigma \rangle|^2 \quad \rightarrow |C_A/C_V|$$

- I decadimenti di Fermi contengono solo il termine $\langle 1 \rangle$ e permettono pertanto la determinazione di $G_\beta^\dagger$ senza ulteriori informazioni

$$G_\beta = 1.13578 \pm 0.00027 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

- Ulteriori misure di su transizioni di Gamov-Teller o miste permettono la determinazione di $|C_A/C_V|$

$$\left| \frac{C_A}{C_V} \right| = 1.2695 \pm 0.0029$$

- †Blucher, Marciano PDG 2006 J. Phys. G 33 pag. 677
Ceccucci, Ligeti, Sakai PDG 2006 J. Phys. G 33 pag. 138

Determinazione di C_A e C_V

- Il segno relativo delle due costanti si può determinare con la misura di una grandezza osservabile che dipenda dal prodotto $C_A \cdot C_V$ e quindi dall'interferenza fra termini di Fermi e Gamov-Teller
- Occorre pertanto studiare transizioni di nuclei polarizzati
- Per nuclei non polarizzati l'elemento di matrice contiene il termine $1 + a\beta_e \cdot \beta_\nu$
- Osservabili che dipendono dal vettore di polarizzazione del nucleo σ contengono termini del tipo

$$1 + a\beta_e \cdot \beta_\nu + b\hat{\sigma} \cdot \beta_e + c\hat{\sigma} \cdot \beta_\nu$$

- Per neutroni polarizzati si trova

$$b = -2 \frac{C_A^2 + C_V C_A}{C_V^2 + 3C_A^2} \quad c = 2 \frac{C_A^2 - C_V C_A}{C_V^2 + 3C_A^2}$$

- Misure di correlazione angolare fra la direzione dell'elettrone (o del neutrino) e lo spin nucleare mostrano che il segno relativo è positivo

$$\frac{C_A}{C_V} = +1.2695 \pm 0.0029$$

L'Hamiltoniana del Decadimento β

- Gli esperimenti descritti hanno permesso la determinazione della forma dell'Hamiltoniana del decadimento β

- Sono stati esclusi i termini Scalare e Tensoriale

$$C_S = C_T = 0$$

- Sono state determinate le costanti degli accoppiamenti Vettoriale e Assiale

$$G_\beta = GC_V \qquad \frac{C_A}{C_V} = \kappa \qquad \alpha_V = \alpha_A = 1$$

- L'Hamiltoniana pertanto contiene solo i termini V e A

$$\mathcal{H}'_I = G[C_V(\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n)(\bar{\psi}_e (1 + \gamma^5) \gamma_\mu \psi_\nu) + C_A(\bar{\psi}_p \gamma^5 \gamma^\mu \psi_n)(\bar{\psi}_e (1 + \gamma^5) \gamma^5 \gamma_\mu \psi_\nu)]$$

- Il termine assiale può essere semplificato utilizzando $(\gamma^5)^2 = I$

$$\mathcal{H}'_I = G[C_V(\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n)(\bar{\psi}_e (1 + \gamma^5) \gamma_\mu \psi_\nu) + C_A(\bar{\psi}_p \gamma^5 \gamma^\mu \psi_n)(\bar{\psi}_e (1 + \gamma^5) \gamma_\mu \psi_\nu)]$$

- Infine raccogliamo la parte leptonica

$$\mathcal{H}'_I = G[C_V(\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) + C_A(\bar{\psi}_p \gamma^5 \gamma^\mu \psi_n)](\bar{\psi}_e (1 + \gamma^5) \gamma_\mu \psi_\nu)$$

L'Hamiltoniana del Decadimento β

$$\mathcal{H}'_I = G [C_V (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) + C_A (\bar{\psi}_p \gamma^5 \gamma^\mu \psi_n)] (\bar{\psi}_e (1 + \gamma^5) \gamma_\mu \psi_\nu)$$

- Possiamo ulteriormente semplificare

$$\mathcal{H}'_I = G (\bar{\psi}_p (C_V + C_A \gamma^5) \gamma^\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e (1 + \gamma^5) \gamma_\mu \psi_\nu)$$

- E ancora

$$\mathcal{H}'_I = G C_V (\bar{\psi}_p (1 + \kappa \gamma^5) \gamma^\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e (1 + \gamma^5) \gamma_\mu \psi_\nu)$$

- Come abbiamo già detto $\kappa = 1.27$ e $G C_V \equiv G_\beta$
 - Il valore di κ diverso da 1 dipende dal fatto che il nucleone non è una particella puntiforme
 - Il protone ha una struttura
 - Ritorneremo su questo punto in seguito
- Per il momento trascuriamo questo aspetto e assumiamo $\kappa = 1$

$$\mathcal{H}'_I = G_\beta \bar{\psi}_p (1 + \gamma^5) \gamma^\mu \psi_n \cdot \bar{\psi}_e (1 + \gamma^5) \gamma_\mu \psi_\nu$$

- In una notazione più moderna è diventato abituale spostare la matrice γ^μ a sinistra

$$\mathcal{H}'_I = G_\beta \bar{\psi}_p \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_n \cdot \bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_\nu$$

L'Hamiltoniana del Decadimento β

- Definiamo due generiche correnti (sia adronica che leptonica)
 - Una corrente Vettoriale $J_V^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$
 - Una corrente Assiale $J_A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$
- Le due correnti (adronica e leptonica) compaiono nell'Hamiltoniana nella combinazione

$$J^\mu = J_V^\mu - J_A^\mu.$$

- È questa la famosa forma $V-A$ delle correnti deboli (cariche)
- Infine, per uniformarci alle notazioni maggiormente utilizzate ridefiniamo la costante di Fermi
 - La costante G è stata definita da Fermi prima della scoperta della violazione della parità
 - La generalizzazione dell'interazione di Fermi e l'introduzione della violazione della parità hanno condotto ad una Hamiltoniana che contiene due correnti ($V-A$)
- Per mantenere la stessa definizione di Fermi è necessario dividere G per $\sqrt{2}$

$$\mathcal{H}_I' = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_p \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_n \cdot \bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_\nu$$