
Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 14

22.11.2022

Tau-Theta puzzle. Esperimenti allo specchio
Violazione della parità: Esperimento di Wu
Violazione di C - Invarianza CP
Termini P-violating nell'Hamiltoniana
Polarizzazione nel decadimento β

anno accademico 2022-2023

Il “ $\theta - \tau$ puzzle”

- Nel periodo iniziale delle scoperte delle particelle strane succedeva che modi di decadimento diversi venissero confusi per particelle diverse
- Tuttavia, con l'aumento della precisione sulla misura delle masse si comprese di cosa si trattava
- Per qualche tempo rimase un paradosso: il “ $\theta - \tau$ puzzle”
- Due particelle (oggi si sa che è la stessa particella K^+):

- Stessa massa
- Stessa vita media
- Differenti parità intrinseche

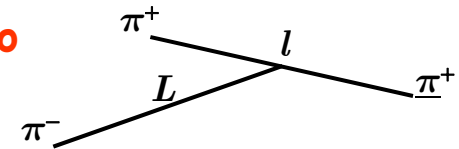
Decadimento	m (MeV)	τ (10^{-8} s)
$\theta^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$	494.0 ± 1.0	1.21 ± 0.02
$\tau^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-$	493.8 ± 1.0	1.19 ± 0.05

- Consideriamo infatti la particella θ (di spin S)
 - Lo stato iniziale è un autostato del momento angolare
 - Anche lo stato finale deve essere un autostato del momento angolare
 - Nello stato finale due particelle di spin 0 $\rightarrow$ deve essere $Y_{lm}(\theta, \phi)$
 - Parità dello stato finale $\xi_\pi \xi_\pi (-1)^l = (-1)^l$
 - Poiché $S = l$ la particella θ può avere solo spin-parità: $\xi_\theta = (-1)^S$

$$(-1)^S \rightarrow S^\xi = 0^+, 1^-, 2^+, 3^-, \dots$$

Il “ $\theta - \tau$ puzzle”

- Consideriamo ora la particella τ che decade in 3 pioni
 - Anche in questo caso un autostato del momento angolare
 - Anche lo stato finale (3 particelle) deve essere autostato
 - Composizione di due momenti angolari



- Chiamiamo l il momento angolare orbitale dei due pioni positivi
 - Chiamiamo L il momento angolare orbitale del pione negativo rispetto agli altri due
- Se lo spin della particella τ fosse $S = 0$ allora

$$|L - l| \leq S \leq L + l \rightarrow L = l$$

$$L = l \rightarrow \xi_\tau = (-1)^3 (-1)^{l+L} = -1$$

- Quindi se θ e τ avessero spin $S = 0$ avrebbero parità differente ($\xi_\theta = (-1)^S$)

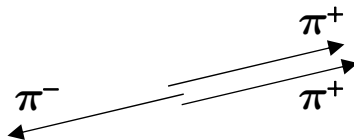
Il “ $\theta - \tau$ puzzle”

- Per altri valori dello spin non è detto che $L = l$

$$|L - l| \leq S \leq L + l$$

- Selezioniamo 2 configurazioni cinematiche che assicurino che L e l abbiano valori ben definiti anche se lo spin S non è nullo

- π^- ha la massima energia



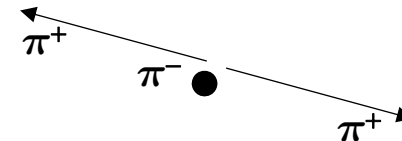
- $\pi^+ \pi^+$ relativamente a riposo

- $l = 0 \rightarrow S = L$

$$\xi_\tau = (-1)^3 (-1)^L = -(-1)^S$$

$$\xi_\tau \neq \xi_\theta = (-1)^S$$

- π^- ha la minima energia ($E_{\pi^-} = 0$)



- π^+ a riposo rispetto a $\pi^+ \pi^+$

- $L = 0 \rightarrow S = l$

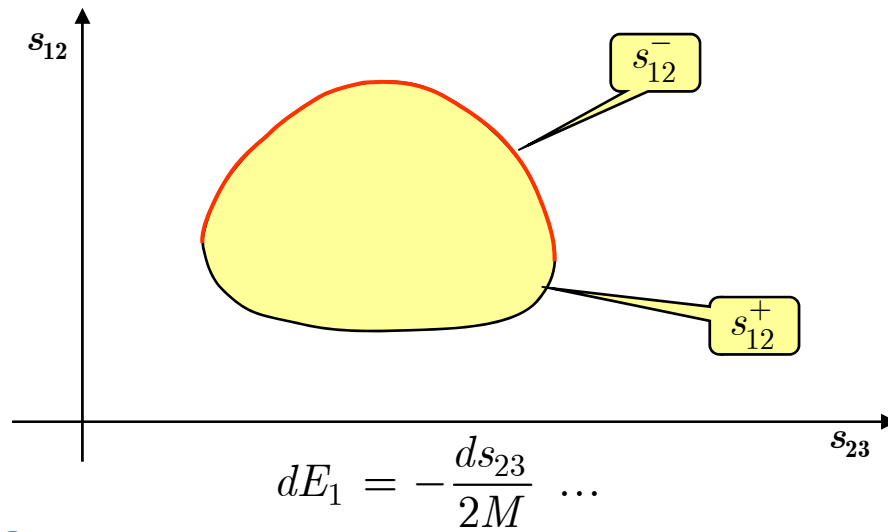
$$\xi_\tau = (-1)^3 (-1)^l = -(-1)^S$$

$$\xi_\tau \neq \xi_\theta = (-1)^S$$

- Sulla base di queste osservazioni Dalitz concluse che
 - Se la particella τ decade in queste regioni cinematiche allora la sua parità è differente da quella della particella θ
- Occorre misurare l'elemento di matrice
 - Dalitz Plot

Il Dalitz Plot

- Abbiamo già studiato la cinematica del decadimento a 3 corpi
 - Abbiamo visto che lo spazio delle fasi espresso in funzione delle energie di due particelle è popolato uniformemente



$$d\Phi = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} dE_1 dE_2$$

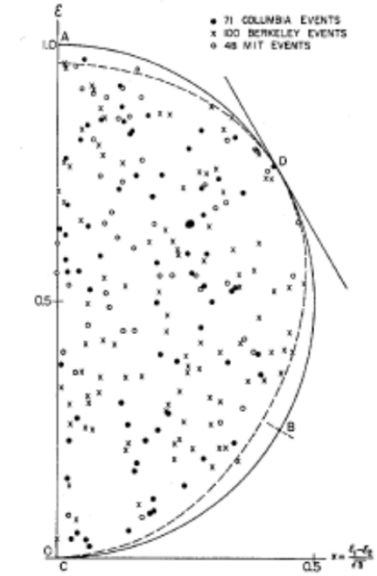
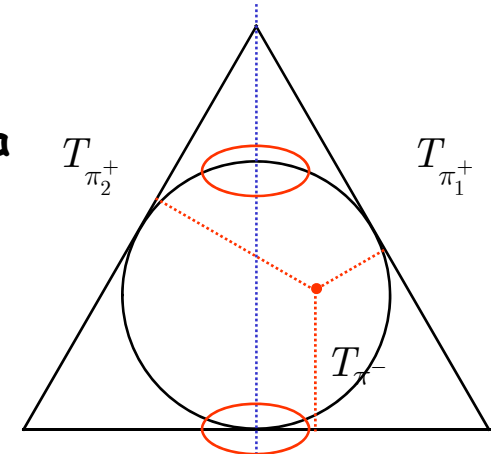
$$\frac{d\Phi}{dE_1 dE_2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{4}$$

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_A} |\mathfrak{M}|^2 d\Phi_n$$

- Pertanto
 - Si misurano le energie dei prodotti di decadimento
 - Si studia la distribuzione di questi decadimenti nel piano $E_1 - E_2$
 - La distribuzione è una misura dell'elemento di matrice
- Pertanto se la parità fosse conservata l'elemento di matrice dovrebbe essere nullo nelle regioni che abbiamo individuato

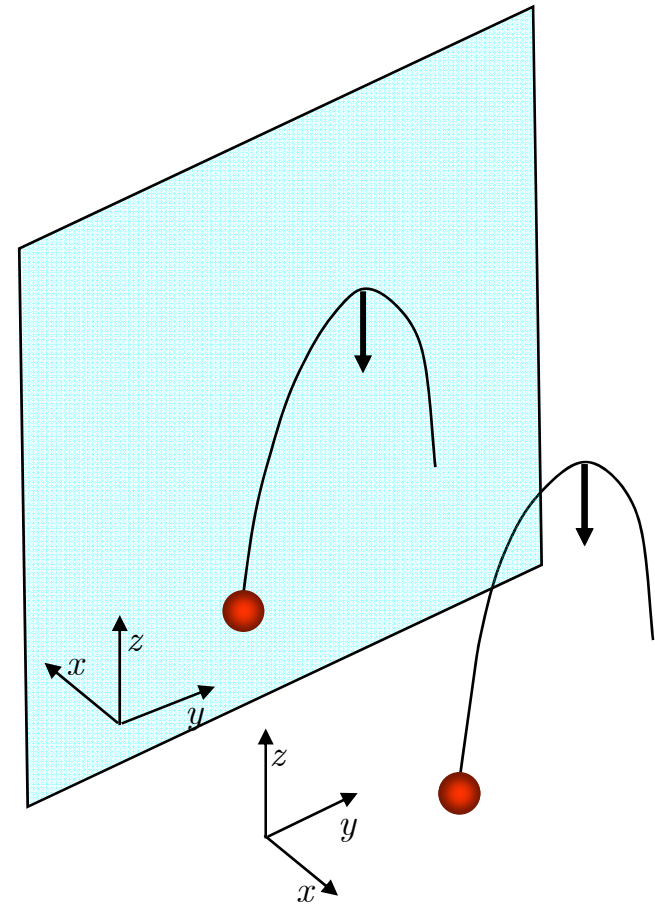
Dalitz Plot

- Spesso il Dalitz Plot viene rappresentato all'interno di un triangolo equilatero
 - Un evento è rappresentato da un punto all'interno del triangolo
 - La distanza dai lati è proporzionale all'energia cinetica
 - Si utilizza la proprietà dei triangoli equilateri per esprimere la conservazione dell'energia $T_1 + T_2 + T_3 = Q$
- In un'approssimazione non relativistica la regione fisica è interna alla circonferenza
- Inoltre dobbiamo avere simmetria fra π_1 e π_2
- Il ragionamento di Dalitz era:
 - Se il decadimento della particella τ popola le regioni cinematiche $T_{\pi^-} \sim 0$ $T_{\pi^-} \sim T_{\max}$ allora la sua parità è differente da quella della particella θ
- L'osservazione sperimentale mostra che le regioni sono popolate
 - Pertanto:
 - O sono particelle diverse
 - O la parità non è conservata



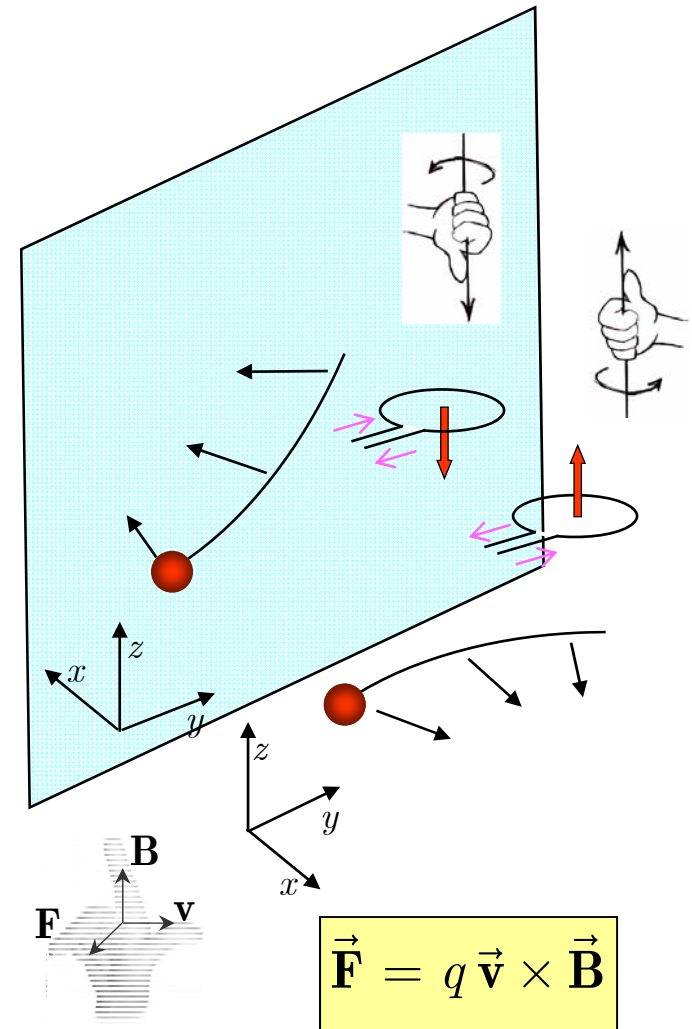
Esperimenti allo Specchio

- Le leggi della fisica classica possiedono una proprietà di invarianza a prima vista ovvia
- Consideriamo un esperimento possibile
 - Ad esempio il moto di un oggetto sotto l'effetto del campo gravitazionale
- Ciò che si ottiene osservando l'esperimento allo specchio è anch'esso un esperimento possibile e realizzabile
 - In tutti e due gli esperimenti la forza di gravità si calcola allo stesso modo:
 - È diretta verso il centro della terra o, approssimativamente, verso il basso
- Il moto di una massa sotto l'effetto del campo gravitazionale è invariante per riflessioni spaziali



Esperimenti allo Specchio

- Un altro esperimento possibile è il moto di una particella carica in presenza di un campo magnetico
 - La spira genera un campo magnetico (regola della mano destra)
 - La Forza di Lorentz sulla carica si calcola con la regola della mano destra
- Se osserviamo lo stesso esperimento allo specchio ...
 - Vediamo un esperimento realizzabile
 - Anche nello specchio la spira genera un campo magnetico (calcolabile con la regola della mano destra)
 - La Forza di Lorentz si calcola con la regola della mano destra
- Si sarebbe potuta usare la mano sinistra
 - Usare la mano destra è una convenzione
- Anche la deflessione di una particella in campo magnetico è invariante per riflessione spaziale



L'esperimento di Wu et al.

- La prima verifica sperimentale della violazione della parità nel decadimento β :
- Si allineano gli spin con un campo magnetico
- Si scopre che il cobalto emette elettroni prevalentemente verso il basso in direzione opposta allo spin
- Nell'esperimento speculare ($x \rightarrow -x$)
 - Il campo magnetico B_z cambia segno;
 - La direzione del momento magnetico μ (allineato al campo B) cambia segno
- Se la legge fosse la stessa ...
- Ci aspetteremmo pertanto che gli elettroni vadano prevalentemente verso l'alto
 - Invece, evidentemente, nell'esperimento riflesso nello specchio vanno verso il basso

- L'esperimento visto allo specchio è impossibile. Ciò è dovuto al fatto che nell'esperimento reale si osserva una asimmetria

PHYSICAL REVIEW VOL 105 PAG. 1413

(1957)

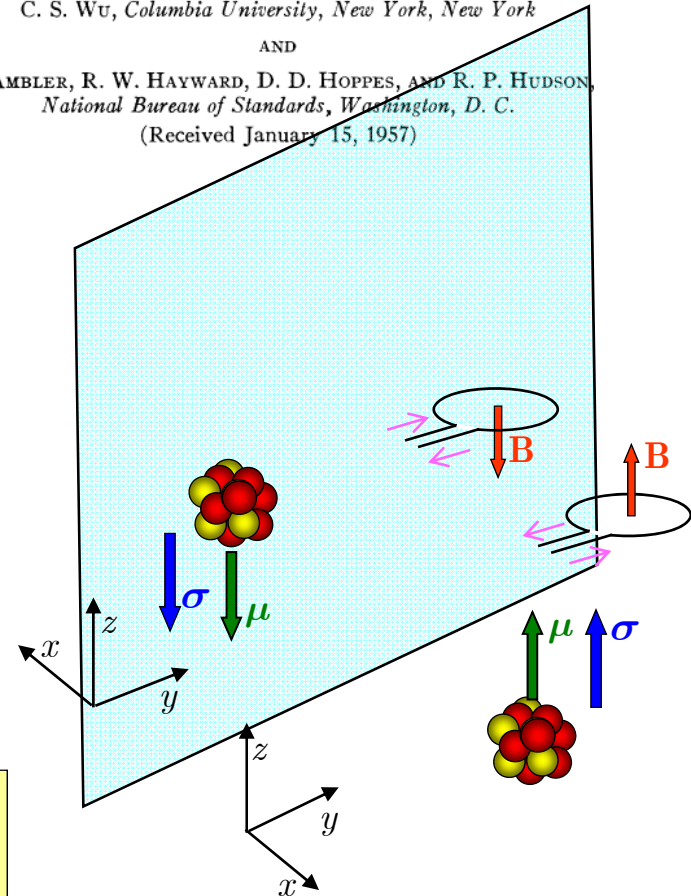
Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay*

C. S. WU, Columbia University, New York, New York

AND

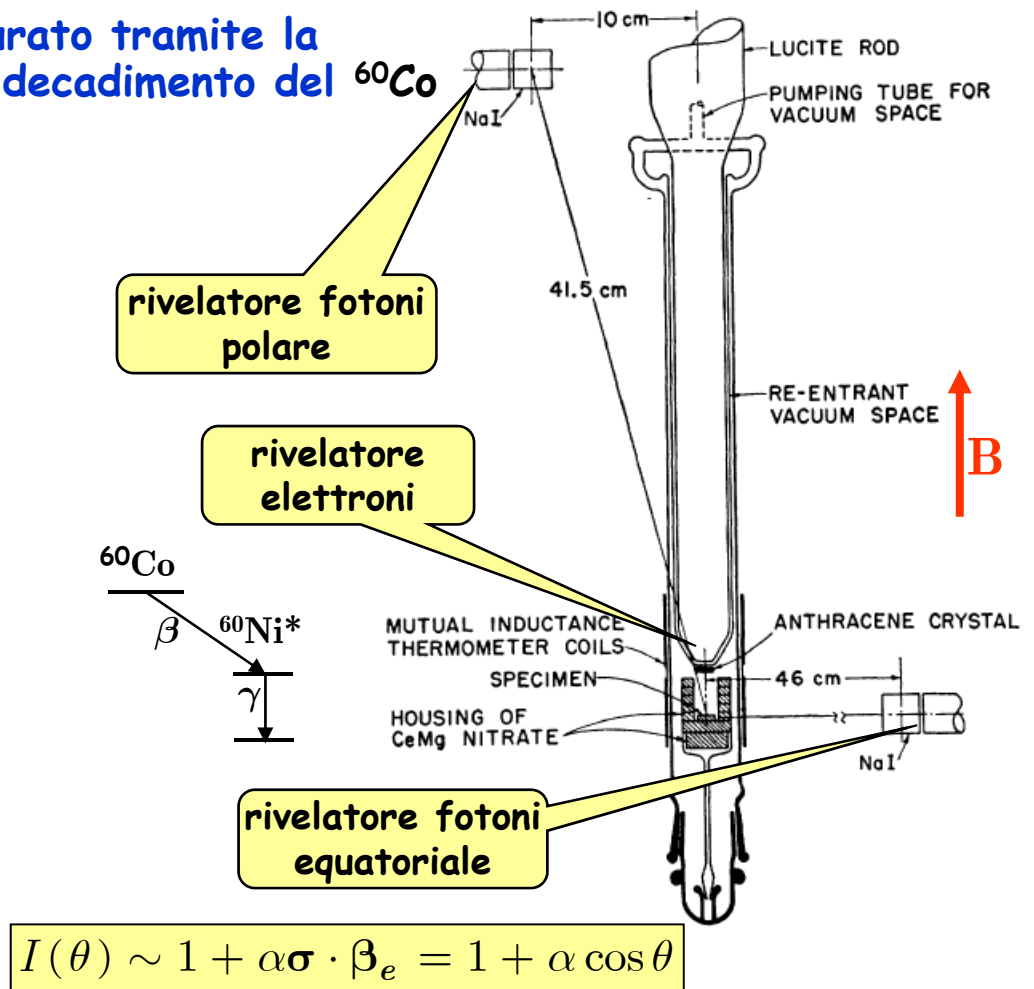
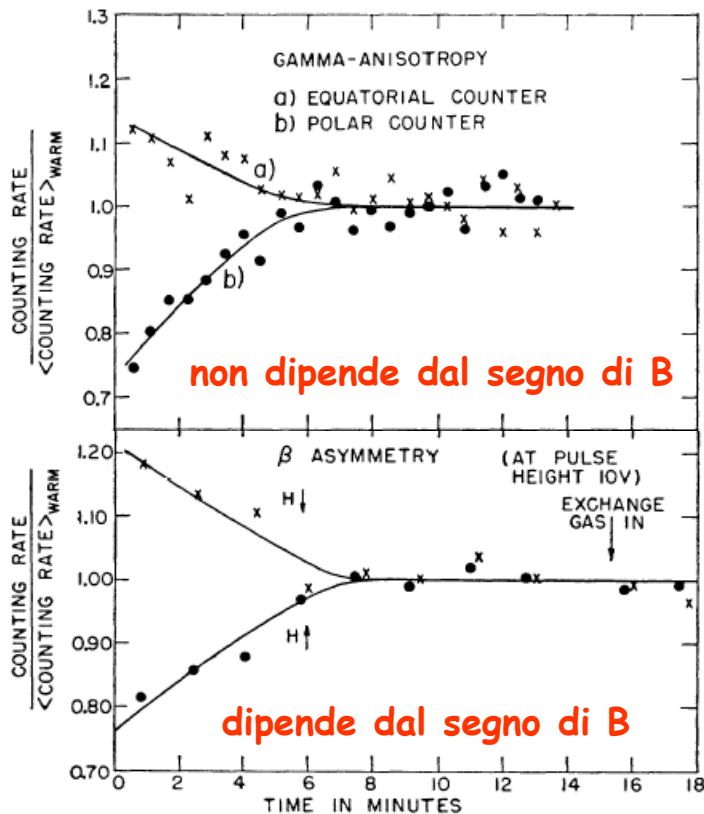
E. AMBLER, R. W. HAYWARD, D. D. HOPPE, AND R. P. HUDSON,
National Bureau of Standards, Washington, D. C.

(Received January 15, 1957)



L'esperimento di Wu et al.

- Per allineare gli spin occorre utilizzare temperature molto basse e un campo magnetico intenso
- Il grado di polarizzazione è misurato tramite la asimmetria delle emissioni γ nel decadimento del ^{60}Co



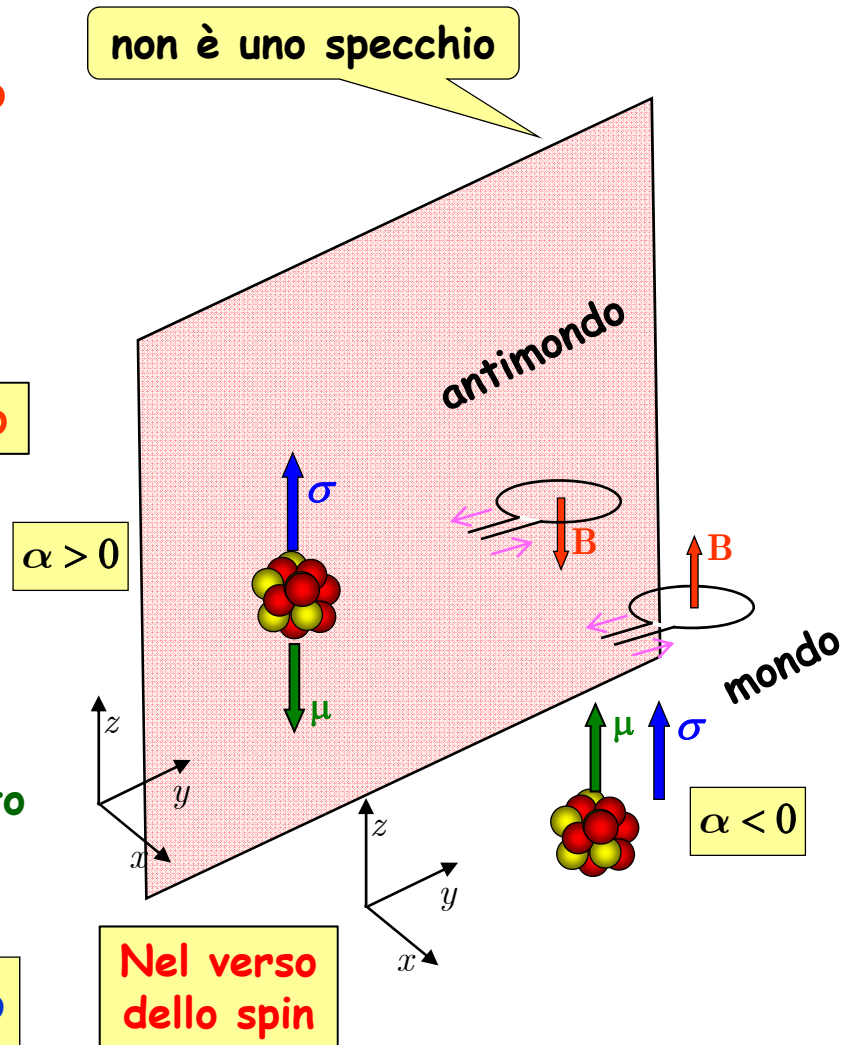
La violazione di C

- Il decadimento β viola anche la simmetria fra particelle e antiparticelle
- La distribuzione angolare degli elettroni (o positroni) rispetto allo spin è

$$I(\theta) \sim 1 + \alpha \sigma \cdot \beta_e = 1 + \alpha \cos \theta$$

- Il coefficiente α
 - È negativo per la materia
 - È positivo per l'antimateria
- Se nel nostro esperimento sostituiamo la materia con l'antimateria
 - Il campo magnetico cambia direzione: la corrente è di antielettroni
 - Il momento magnetico si allinea a B
 - Lo spin è in direzione opposta al momento magnetico: è un antinucleo ($Q < 0$)
 - Il coefficiente α diventa positivo

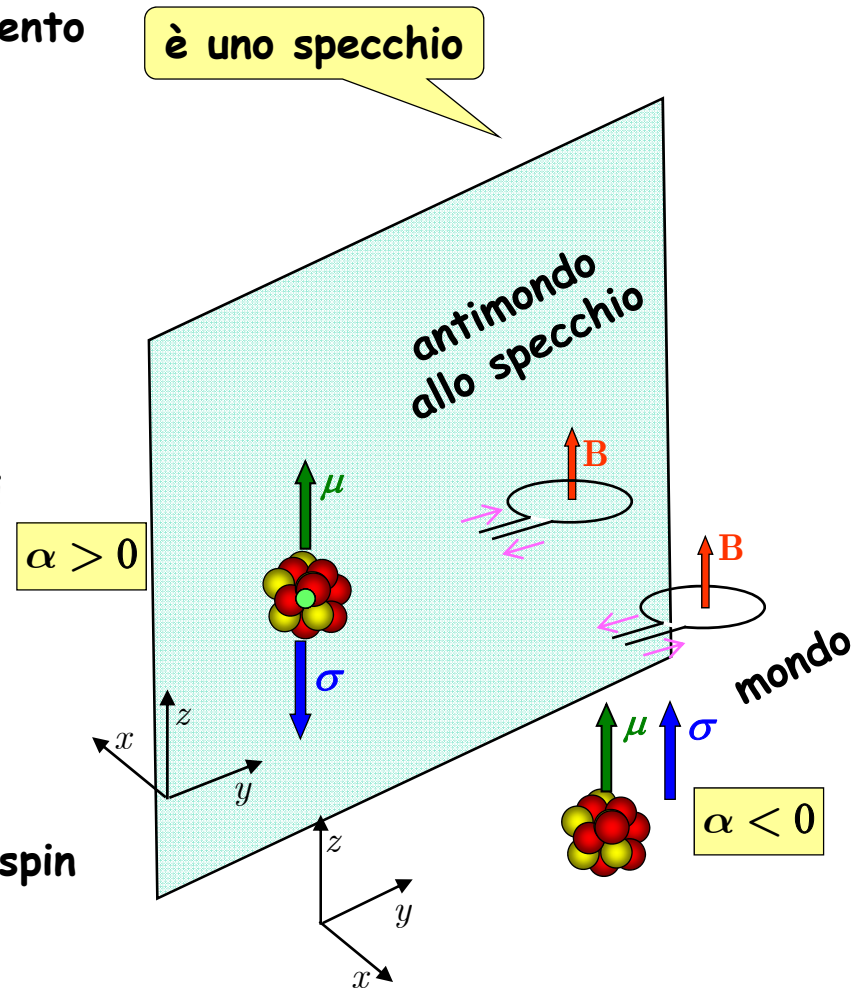
- Nell'anti-mondo i positroni vanno verso l'alto



Invarianza per trasformazioni CP

- Se si applicano contemporaneamente le due trasformazioni C e P si ottiene un esperimento possibile che produce un risultato identico all'originale
- L'esperimento originale ...
- L'esperimento allo specchio e fatto di antimateria ...
 - Il campo magnetico punta verso l'alto
 - La spira è percorsa in senso inverso
 - La corrente è composta da antielettroni
 - Il momento magnetico punta verso l'alto
 - Si allinea a B
 - Lo spin punta verso il basso
 - È un antinucleo
 - Dato che si tratta di un antinucleo $\alpha > 0$
 - Gli elettroni vanno nella direzione dello spin verso il basso

- L'interazione debole è invariante per CP



La violazione della parità

- La scoperta che la parità è violata nei decadimenti β impone una revisione dell'Hamiltoniana

$$\mathcal{H}' = \sum_{i=S,V,A,T} C_i (\bar{\psi}_p \Gamma^i \psi_n) (\bar{\psi}_e \Gamma_i \psi_\nu) + h.c.$$

- In particolare la richiesta che i singoli termini debbano essere scalari non ha più una motivazione fisica
- L'Hamiltoniana più generale non deve necessariamente conservare la parità
- Ogni termine può avere sia una parte scalare sia una parte pseudo-scalare

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' = & C_S (\bar{\psi}_p \psi_n) (\bar{\psi}_e (1 + \alpha_S \gamma^5) \psi_\nu) + C_V (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma_\mu \psi_\nu) + \\ & + C_A (\bar{\psi}_p \gamma^5 \gamma^\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e (1 + \alpha_A \gamma^5) \gamma^5 \gamma_\mu \psi_\nu) + C_T (\bar{\psi}_p \sigma^{\mu\nu} \psi_n) (\bar{\psi}_e (1 + \alpha_T \gamma^5) \sigma_{\mu\nu} \psi_\nu) \end{aligned}$$

- Pertanto l'Hamiltoniana risulta composta da due termini

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}'^{PC} + \mathcal{H}'^{PV}$$

- La parte PV dell'Hamiltoniana contiene termini pseudoscalari

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'^{PV} = & \alpha_S C_S (\bar{\psi}_p \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma^5 \psi_\nu) + \alpha_V C_V (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma^5 \gamma_\mu \psi_\nu) + \\ & + \alpha_A C_A (\bar{\psi}_p \gamma^5 \gamma^\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma^5 \gamma^5 \gamma_\mu \psi_\nu) + \alpha_T C_T (\bar{\psi}_p \sigma^{\mu\nu} \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma^5 \sigma_{\mu\nu} \psi_\nu) \end{aligned}$$



La violazione della parità

- Il termine PC (Parity Conserving) è quello che abbiamo studiato fino ad ora ed è pari per trasformazioni di inversione

$$\mathbb{P}\mathcal{H}'^{PC}\mathbb{P}^{-1} = \mathcal{H}'^{PC}$$

- Il nuovo termine PV (Parity Violating) contiene prodotti di grandezze che cambiano segno (odd) per trasformazioni di inversione

$$\mathbb{P}\mathcal{H}'^{PV}\mathbb{P}^{-1} = -\mathcal{H}'^{PV}$$

- Ricordiamo che l'ampiezza di transizione è costruita con una serie perturbativa in funzione di $\mathcal{H}'$

- In particolare al primo ordine

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int d^4x \langle p e^- \bar{\nu} | \mathcal{H}'_I | n \rangle$$

- Una transizione è permessa se l'elemento di matrice di $\mathcal{H}'$ è non nullo
- Una transizione è proibita se l'elemento di matrice di $\mathcal{H}'$ è nullo
- Consideriamo due autostati di $\mathbb{P}$ $|a\rangle$ e $|b\rangle$ con parità intrinseca differente

$$\mathbb{P}|a\rangle = +|a\rangle$$

$$\mathbb{P}|b\rangle = -|b\rangle$$

- Si può dimostrare che

$$\langle a | \mathcal{H}'^{PC} | b \rangle = 0$$

$$\langle a | \mathcal{H}'^{PV} | b \rangle \neq 0$$

La violazione della parità

- Cominciamo con l'elemento di matrice del termine PC fra due autostati di $\mathbb{P}$ con parità diversa

$$\begin{aligned}\langle a | \mathcal{H}'^{PC} | b \rangle &= \langle a | \mathbb{P}^{-1} \mathbb{P} \mathcal{H}'^{PC} \mathbb{P}^{-1} \mathbb{P} | b \rangle = (\langle a | +) \mathbb{P} \mathcal{H}'^{PC} \mathbb{P}^{-1} (-|b\rangle) \\ &= -\langle a | \mathbb{P} \mathcal{H}'^{PC} \mathbb{P}^{-1} | b \rangle = -\langle a | (+\mathcal{H}'^{PC}) | b \rangle = -\langle a | \mathcal{H}'^{PC} | b \rangle\end{aligned}$$

- Quindi

$$\langle a | \mathcal{H}'^{PC} | b \rangle = 0$$

- Calcoliamo adesso l'elemento di matrice del termine PV fra due autostati di $\mathbb{P}$ con parità diversa

$$\begin{aligned}\langle a | \mathcal{H}'^{PV} | b \rangle &= \langle a | \mathbb{P}^{-1} \mathbb{P} \mathcal{H}'^{PV} \mathbb{P}^{-1} \mathbb{P} | b \rangle = (\langle a | +) \mathbb{P} \mathcal{H}'^{PV} \mathbb{P}^{-1} (-|b\rangle) \\ &= -\langle a | \mathbb{P} \mathcal{H}'^{PV} \mathbb{P}^{-1} | b \rangle = -\langle a | (-\mathcal{H}'^{PV}) | b \rangle = +\langle a | \mathcal{H}'^{PV}_{int} | b \rangle\end{aligned}$$

- Quindi è possibile che

$$\langle a | \mathcal{H}'^{PV} | b \rangle \neq 0$$

- Analogamente si può dimostrare che per due autostati di $\mathbb{P}$ con la stessa parità, ad esempio

$$\mathbb{P}|a\rangle = +|a\rangle$$

$$\mathbb{P}|b\rangle = +|b\rangle$$



$$\langle a | \mathcal{H}'^{PC} | b \rangle \neq 0$$

$$\langle a | \mathcal{H}'^{PV} | b \rangle = 0$$



Conseguenze Fenomenologiche

- Le modifiche introdotte non alterano la parte nucleare e pertanto
 - Si mantiene la classificazione dei vari termini di interazione
 - Transizioni di Fermi e transizioni di Gamov-Teller con le regole di selezione sugli spin nucleari dedotte precedentemente
 - Fino a quando non si studiano processi con polarizzazione del nucleone iniziale non si hanno termini di interferenza SA , ST , VA , VT
- Gli elementi di matrice si calcolano sempre utilizzando la tecnica delle tracce
 - In particolare ricordiamo il calcolo dell'elemento di matrice di Fermi

$$|\overline{\mathfrak{M}}_F|^2 = C_S^2 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(\not{k}' - m_\nu)]$$

$$+ C_V^2 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)\gamma^0(\not{k}' - m_\nu)\gamma^0]$$

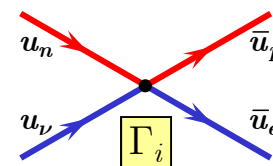
$$+ 2 \text{Re}[C_S C_V 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(\not{k}' - m_\nu)\gamma^0]]$$

- Assumendo $m_\nu = 0$ (ipotesi non essenziale) diventa

$$|\overline{\mathfrak{M}}_F|^2 = C_S^2 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(1 + \alpha_S \gamma^5)\not{k}'(1 - \alpha_S \gamma^5)]$$

$$+ C_V^2 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(1 + \alpha_V \gamma^5)\gamma^0\not{k}'(1 + \alpha_V \gamma^5)\gamma^0]$$

$$+ 2 \text{Re}[C_S C_V 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(1 + \alpha_S \gamma^5)\not{k}'(1 + \alpha_V \gamma^5)\gamma^0]]$$



$$1 + \alpha_S \gamma^5$$

$$\Gamma_S = 1 + \alpha_S \gamma^5$$

$$\Gamma_V = (1 + \alpha_S \gamma^5) \gamma^\mu$$

Conseguenze Fenomenologiche

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}_F}|^2 = & C_S^2 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(1 + \alpha_S \gamma^5) \not{k}'(1 - \alpha_S \gamma^5)] \\ & + C_V^2 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0 \not{k}'(1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0] \\ & + 2 \text{Re}[C_S C_V 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(1 + \alpha_S \gamma^5) \not{k}'(1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0]] \end{aligned}$$

- Fare attenzione al segno del secondo operatore di vertice
- Ricordiamo infatti che la somma sugli stati di polarizzazione dava

$$\text{Tr}((\not{k} + m_e) \Gamma^m (\not{k}' - m_\nu) \bar{\Gamma}^l)$$

- Abbiamo allora

$$\bar{\Gamma}^l = \gamma^0 (\Gamma^l)^\dagger \gamma^0$$

$$\overline{(1 + \alpha_S \gamma^5)} = \gamma^0 (1 + \alpha_S \gamma^5)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 (1 + \alpha_S \gamma^5) \gamma^0 = 1 - \alpha_S \gamma^5$$

- E anche

$$\overline{(1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0} = \gamma^0 [(1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0]^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^0 (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0 = (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0$$

Gli elementi di matrice

- Le tracce possono essere semplicemente sviluppate ricordando le proprietà

$$Tr(I) = 4 \quad Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu,\nu} \quad Tr(\not{a} \not{b}) = 4a \cdot b$$

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4[g^{\mu,\nu} g^{\alpha,\beta} - g^{\mu,\alpha} g^{\nu,\beta} + g^{\mu,\beta} g^{\nu,\alpha}]$$

$$Tr(\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)]$$

$$Tr(\gamma^\mu) = Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\delta) = Tr(\text{dispari}) = 0$$

$$Tr(\gamma^5) = Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) = Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\delta \gamma^5) = 0$$

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5) = -4i\varepsilon^{\mu,\nu,\alpha,\beta}$$

$$Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^5) = +4i\varepsilon_{\mu,\nu,\alpha,\beta}$$

- Per gli elementi di matrice si ottiene

$$|\overline{\mathfrak{M}}_F|^2 = 16m_N^2 E_e E_\nu \left[C_S^2 (1 + \alpha_S^2) (1 - \beta_e \cdot \beta_\nu) + C_V^2 (1 + \alpha_V^2) (1 + \beta_e \cdot \beta_\nu) + 2C_S C_V (1 - \alpha_S \alpha_V) \frac{m_e}{E_e} \right]$$

$$|\overline{\mathfrak{M}}_{GT}|^2 = 16m_N^2 E_e E_\nu \cdot \left[3C_A^2 (1 + \alpha_A^2) \left(1 - \frac{1}{3} \beta_e \cdot \beta_\nu\right) + 12C_T^2 (1 + \alpha_T^2) \left(1 + \frac{1}{3} \beta_e \cdot \beta_\nu\right) - 12C_A C_T (1 - \alpha_A \alpha_T) \frac{m_e}{E_e} \right]$$

Conseguenze Fenomenologiche

- Consideriamo ad esempio l'elemento di matrice di Fermi

$$|\mathfrak{M}_F|^2 = 16m_N^2 E_e E_\nu \left[C_S^2 (1 + \alpha_S^2) (1 - \beta_e \cdot \beta_\nu) + C_V^2 (1 + \alpha_V^2) (1 + \beta_e \cdot \beta_\nu) + 2C_S C_V (1 - \alpha_S \alpha_V) \frac{m_e}{E_e} \right]$$

- L'assenza del termine di interferenza, dedotta dallo studio della forma dello spettro, ha conseguenze meno dirette

- $C_S C_V (1 - \alpha_S \alpha_V) = 0$

- Questo può succedere per una delle 3 condizioni

$$C_S = 0 \qquad C_V = 0 \qquad 1 - \alpha_S \alpha_V = 0$$

- Pertanto risulta più complicato trarre conclusioni dagli esperimenti già visti

- Per le correlazioni angolari non ci sono sostanziali differenze

- Infatti cambia solo il valore numerico delle due costanti di accoppiamento

$$C_S^2 \rightarrow C_S^2 (1 + \alpha_S^2) \qquad C_V^2 \rightarrow C_V^2 (1 + \alpha_V^2)$$

- Occorre inventare nuovi esperimenti per determinare le nuove costanti

- L'esperimento di Wu et al. fornisce le nuove informazioni necessarie

- I calcoli per interpretare gli esperimenti sono però un po' più lunghi

- I nuclei sono polarizzati

- Non si annullano i termini di interferenza Fermi/Gamov-Teller

Elettroni polarizzati

- L'osservazione della direzione privilegiata di emissione degli elettroni nell'esperimento di Wu et al. ha una implicazione molto importante sulla direzione dello spin (polarizzazione) dell'elettrone



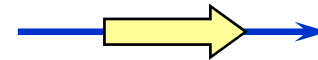
- Per conservare il momento angolare l'elettrone e il neutrino devono portare via una quantità $S = 1 \cdot \hbar$ di momento angolare
 - Il neutrino e l'elettrone devono avere gli spin paralleli
- Dall'esperimento di Wu gli elettroni sono emessi preferibilmente in basso
 - Più precisamente in direzione opposta allo spin del nucleo
- L'elettrone deve quindi essere polarizzato in direzione opposta alla sua direzione di moto: elettrone left-handed
- Verifichiamo se l'Hamiltoniana che abbiamo scritto prevede questo fenomeno
 - Calcoliamo la polarizzazione degli elettroni nel decadimento β

Polarizzazione nel decadimento β

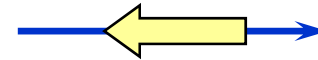
- La polarizzazione degli elettroni è definita come

$$\wp = \frac{N_R - N_L}{N_R + N_L}$$

- Il numero degli elettroni Right-Handed è N_R



- Il numero degli elettroni Left-Handed è N_L



- I numeri N_R e N_L sono proporzionali alle larghezze di decadimento

$$N_{R,L} \sim \int d\Gamma_{R,L}$$

$$d\Gamma_{R,L} = \frac{1}{2m_N} |\overline{\mathfrak{M}^{R,L}}|^2 d\Phi$$

- Come in precedenza l'elemento di matrice contiene interazioni S, V, A, T

$$\mathfrak{M}^{R,L} = \mathfrak{M}_S^{R,L} + \mathfrak{M}_V^{R,L} + \mathfrak{M}_A^{R,L} + \mathfrak{M}_T^{R,L}$$

Polarizzazione nel decadimento β

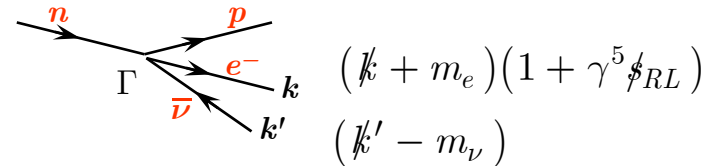
$$\mathfrak{M}^{R,L} = \mathfrak{M}_S^{R,L} + \mathfrak{M}_V^{R,L} + \mathfrak{M}_A^{R,L} + \mathfrak{M}_T^{R,L}$$

- Rivediamo i singoli termini
 - Osserviamo in particolare la polarizzazione degli spinori dell'elettrone

- **Scalare** $\mathfrak{M}_S^{R,L} = C_S \langle 1 \rangle \bar{u}_e(k, s_{R,L}) (1 + \alpha_S \gamma^5) v_\nu(k')$
- **Vettoriale** $\mathfrak{M}_V^{R,L} = C_V \langle 1 \rangle \bar{u}_e(k, s_{R,L}) (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0 v_\nu(k')$
- **Vettoriale assiale** $\mathfrak{M}_A^{R,L} = C_A \langle \sigma_j \rangle \bar{u}_e(k, s_{R,L}) (1 + \alpha_A \gamma^5) \gamma^5 \gamma^j v_\nu(k')$
- **Tensoriale** $\mathfrak{M}_T^{R,L} = 2C_T \langle \sigma_j \rangle \bar{u}_e(k, s_{R,L}) (1 + \alpha_T \gamma^5) \Sigma^j v_\nu(k')$

Polarizzazione nel decadimento β

- Il calcolo del quadrato del modulo procede in maniera analoga a quanto fatto precedentemente sommando su tutti gli stati di polarizzazione non osservati (n, p, ν)
- Dato che sommiamo sulla polarizzazione iniziale (del neutrone) non ci sono termini di interferenza SA, ST, VA, VT
 - Di nuovo abbiamo i due elementi di matrice di Fermi e di Gamov-Teller
- Le somme sugli stati di polarizzazione si fanno con la tecnica delle tracce
 - La polarizzazione degli elettroni si introduce tramite i proiettori di spin
- L'elemento di matrice di Fermi è pertanto



$$\begin{aligned}
 \overline{|\mathfrak{M}_F^{R,L}|^2} &= C_S^2 2m_N^2 \text{Tr} \left[(\not{k} + m_e) (1 + \gamma^5 \not{\epsilon}_{R,L}) (1 + \alpha_S \gamma^5) \not{k}' (1 - \alpha_S \gamma^5) \right] + \\
 &\quad + C_V^2 2m_N^2 \text{Tr} \left[(\not{k} + m_e) (1 + \gamma^5 \not{\epsilon}_{R,L}) (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0 \not{k}' (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0 \right] + \\
 &\quad + 2 \text{Re} \left[C_S C_V 2m_N^2 \text{Tr} \left[(\not{k} + m_e) (1 + \gamma^5 \not{\epsilon}_{R,L}) (1 + \alpha_S \gamma^5) \not{k}' (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0 \right] \right]
 \end{aligned}$$

Polarizzazione nel decadimento β

- Occorre definire i vettori di polarizzazione
- Il vettore s_R definisce una polarizzazione parallela alla direzione di moto: polarizzazione Right-Handed
- Il vettore polarizzazione ξ (nel sistema di riposo) è parallelo a $\mathbf{p}$ ($|\xi| = 1$)

$$s^0 = \frac{\mathbf{k} \cdot \xi}{m_e}$$

$$s_R^0 = \frac{\mathbf{k} \cdot \xi}{m_e} = \frac{|\mathbf{k}|}{m_e}$$

$$\mathbf{s} = \xi + \frac{(\xi \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}}{m_e (E_e + m_e)}$$

$$\mathbf{s}_R = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} + \frac{|\mathbf{k}| \mathbf{k}}{m_e (E_e + m_e)} = \frac{m_e (E_e + m_e) + |\mathbf{k}|^2}{m_e (E_e + m_e) |\mathbf{k}|} \mathbf{k}$$

$$= \frac{m_e E_e + E_e^2}{m_e (E_e + m_e) |\mathbf{k}|} \mathbf{k} = \frac{E_e \mathbf{k}}{m_e |\mathbf{k}|}$$

$$s_R = \left(\frac{|\mathbf{k}|}{m_e}, \frac{E_e}{m_e} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \right)$$

- Il vettore s_L si ottiene semplicemente cambiando $\xi \rightarrow -\xi$ e quindi

$$s_L = -s_R$$

Polarizzazione nel decadimento β

- Ricordiamo la definizione di polarizzazione

$$\wp = \frac{N_R - N_L}{N_R + N_L}$$

- Il numero di elettroni per le due polarizzazioni è dato da

$$N_{R,L} \sim \int d\Gamma_{R,L} \quad d\Gamma_{R,L} = \frac{1}{2m_N} |\overline{\mathfrak{M}^{R,L}}|^2 d\Phi$$

- Pertanto la polarizzazione è data da

- L'integrale sullo spazio delle fasi è su tutte le variabili cinematiche escluso E_e

- Vedremo che $\wp$ dipende dall'energia

$$\wp = \frac{\int \left(|\overline{\mathfrak{M}^R}|^2 - |\overline{\mathfrak{M}^L}|^2 \right) d\Phi}{\int \left(|\overline{\mathfrak{M}^R}|^2 + |\overline{\mathfrak{M}^L}|^2 \right) d\Phi}$$

- Calcoliamo il numeratore

- Ricordiamo che

$$\gamma^5 \not{\epsilon}_L = -\gamma^5 \not{\epsilon}_R$$

$$\not{\epsilon}_L = -\not{\epsilon}_R \quad \dots (\cancel{1} + \gamma^5 \not{\epsilon}_R) \dots - \dots (\cancel{1} + \gamma^5 \not{\epsilon}_L) \dots = 2\gamma^5 \not{\epsilon}_R$$

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}_F^R}|^2 - |\overline{\mathfrak{M}_F^L}|^2 &= C_S^2 2m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) 2\gamma^5 \not{\epsilon}_R (1 + \alpha_S \gamma^5) \not{k}' (1 - \alpha_S \gamma^5)] + \\ &+ C_V^2 2m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) 2\gamma^5 \not{\epsilon}_R (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0 \not{k}' (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0] + \\ &+ 2 \text{Re}[C_S C_V 2m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) 2\gamma^5 \not{\epsilon}_R (1 + \alpha_S \gamma^5) \not{k}' (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0]] \end{aligned}$$



Polarizzazione nel decadimento β

- Esaminiamo adesso un generico termine

- Ad es. il termine scalare

$$|\overline{\mathfrak{M}_F^R}|^2 - |\overline{\mathfrak{M}_F^L}|^2 = C_S^2 2m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) 2\gamma^5 \not{\epsilon}_R (1 + \alpha_S \gamma^5) \not{k}' (1 - \alpha_S \gamma^5)]$$

commuta con $\not{k}'$

anticommuta con $\not{k}'$

- Possiamo trasportare $(1 - \alpha_S \gamma^5)$ a sinistra trasformandolo in $(1 + \alpha_S \gamma^5)$

- Ricordiamo che $(\gamma^5)^2 = I$

- Otteniamo pertanto $(1 + \alpha_S \gamma^5)^2 = 1 + 2\alpha_S \gamma^5 + \alpha_S^2$

- Introduciamo questi risultati nel calcolo

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}_F^R}|^2 - |\overline{\mathfrak{M}_F^L}|^2 &= 4C_S^2 m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) \gamma^5 \not{\epsilon}_R (1 + \alpha_S \gamma^5)^2 \not{k}'] + \\ &\quad + 4C_V^2 m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) \gamma^5 \not{\epsilon}_R (1 + \alpha_V \gamma^5)^2 \gamma^0 \not{k}' \gamma^0] + \\ &\quad + 8 \text{Re}[C_S C_V m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) \gamma^5 \not{\epsilon}_R (1 + \alpha_S \gamma^5)(1 - \alpha_V \gamma^5) \not{k}' \gamma^0]] \end{aligned}$$

- Possiamo ancora anticommutare γ^5 con $\not{\epsilon}_R$

$$\gamma^5 (1 + \alpha_{S,V} \gamma^5)^2 = \gamma^5 (1 + 2\alpha_{S,V} \gamma^5 + \alpha_{S,V}^2) = (1 + \alpha_{S,V}^2) \gamma^5 + 2\alpha_{S,V}$$



Polarizzazione nel decadimento β

- Per il terzo termine

$$\begin{aligned}\gamma^5 (1 + \alpha_S \gamma^5) (1 - \alpha_V \gamma^5) &= \gamma^5 (1 - \alpha_V \gamma^5 + \alpha_S \gamma^5 - \alpha_S \alpha_V) \\ &= \gamma^5 (1 - \alpha_S \alpha_V) + \gamma^5 (\alpha_S - \alpha_V) \gamma^5 = (1 - \alpha_S \alpha_V) \gamma^5 + (\alpha_S - \alpha_V)\end{aligned}$$

- Introducendo nell'espressione

$$\begin{aligned}|\overline{\mathfrak{M}_F^R}|^2 - |\overline{\mathfrak{M}_F^L}|^2 &= -4C_S^2 m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) \not{\epsilon}_R ((1 + \alpha_S^2) \gamma^5 + 2\alpha_S) \not{k}'] + \\ &- 4C_V^2 m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) \not{\epsilon}_R ((1 + \alpha_V^2) \gamma^5 + 2\alpha_V) \gamma^0 \not{k}' \gamma^0] + \\ &- 8 \text{Re}[C_S C_V m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) \not{\epsilon}_R ((1 - \alpha_S \alpha_V) \gamma^5 + (\alpha_S - \alpha_V)) \not{k}' \gamma^0]]\end{aligned}$$

- E finalmente

$$\begin{aligned}\not{k} \not{\epsilon}_R \gamma^5 \not{k}' &\rightarrow 0 \\ \not{k} \not{\epsilon}_R \not{k}' &\rightarrow 0 \\ \not{\epsilon}_R \gamma^5 \not{k}' &\rightarrow 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\not{k} \not{\epsilon}_R \gamma^5 \gamma^0 \not{k}' \gamma^0 &\rightarrow 0 \\ \not{k} \not{\epsilon}_R \gamma^0 \not{k}' \gamma^0 &\rightarrow 0 \\ \not{\epsilon}_R \gamma^5 \gamma^0 \not{k}' \gamma^0 &\rightarrow 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\not{\epsilon}_R \gamma^5 \not{k}' \gamma^0 &\rightarrow 0 \\ \not{\epsilon}_R \not{k}' \gamma^0 &\rightarrow 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overline{\mathfrak{M}_F^R}|^2 - |\overline{\mathfrak{M}_F^L}|^2 &= -4C_S^2 m_N^2 \text{Tr}[2\alpha_S m_e \not{\epsilon}_R \not{k}'] - 4C_V^2 m_N^2 \text{Tr}[2\alpha_S m_e \not{\epsilon}_R \gamma^0 \not{k}' \gamma^0] - \\ &- 8 \text{Re}[C_S C_V m_N^2 \text{Tr}[(1 - \alpha_S \alpha_V) \gamma^5 \not{k} \not{\epsilon}_R \not{k}' \gamma^0 + (\alpha_S - \alpha_V) \not{k} \not{\epsilon}_R \not{k}' \gamma^0]]\end{aligned}$$



Polarizzazione nel decadimento β

- Siamo quasi alla fine !!!

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}_F^R}|^2 - |\overline{\mathfrak{M}_F^L}|^2 &= -4C_S^2 m_N^2 \text{Tr}[2\alpha_S m_e \not{s}_R \not{k}'] - 4C_V^2 m_N^2 \text{Tr}[2\alpha_V m_e \not{s}_R \gamma^0 \not{k}' \gamma^0] - \\ &\quad - 8 \text{Re}[C_S C_V m_N^2 \text{Tr}[(1 - \alpha_S \alpha_V) \gamma^5 \not{k} \not{s}_R \not{k}' \gamma^0 + (\alpha_S - \alpha_V) \not{k} \not{s}_R \not{k}' \gamma^0]] \end{aligned}$$

$$\text{Tr}(\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)]$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5) = 4i\varepsilon^{\mu,\nu,\alpha,\beta}$$

$$\text{Re}[4i\varepsilon^{\mu,\nu,\alpha,0} k_\mu (s_R)_\nu k'_\alpha] = 0$$

$$\begin{aligned} &= -8C_S^2 m_N^2 \alpha_S m_e 4(s_R \cdot k') - 8C_V^2 m_N^2 \alpha_V m_e 4(2s_R^0 E_\nu - s_R \cdot k') - \\ &\quad - 8(\alpha_S - \alpha_V) C_S C_V m_N^2 4(s_R \cdot k E_\nu - k \cdot k' s_R^0 + E_e s_R \cdot k') \end{aligned}$$

- Ricordiamo la proprietà del vettore s^μ : $s_R \cdot k = 0$
- Per finire, ricordiamo che s_R , k , k' sono
- Introduciamoli nel calcolo

$$s_R = \left(\frac{|\mathbf{k}|}{m_e}, \frac{E_e}{m_e} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \right)$$

$$k = (E_e, \mathbf{k})$$

$$k' = (E_\nu, \mathbf{k}_\nu)$$

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}_F^R}|^2 - |\overline{\mathfrak{M}_F^L}|^2 &= -8C_S^2 m_N^2 \alpha_S 4E_\nu E_e (\beta_e - \cos \theta_{e\nu}) - 8C_V^2 m_N^2 \alpha_V 4E_\nu E_e (\beta_e + \cos \theta_{e\nu}) - \\ &\quad + 8(\alpha_S - \alpha_V) C_S C_V m_N^2 4m_e E_\nu \cos \theta_{e\nu} \end{aligned}$$



Polarizzazione nel decadimento β

- Ricordiamo che

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{\int \left(|\mathfrak{M}^R|^2 - |\mathfrak{M}^L|^2 \right) d\Phi}{\int \left(|\mathfrak{M}^R|^2 + |\mathfrak{M}^L|^2 \right) d\Phi}$$

- Il numeratore (risultato del calcolo precedente) è

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}_F^R}|^2 - |\overline{\mathfrak{M}_F^L}|^2 = & -8C_S^2 m_N^2 \alpha_S 4E_\nu E_e (\beta_e - \cos \theta_{e\nu}) - 8C_V^2 m_N^2 \alpha_V 4E_\nu E_e (\beta_e + \cos \theta_{e\nu}) - \\ & + 8(\alpha_S - \alpha_V) C_S C_V m_N^2 4m_e E_\nu \cos \theta_{e\nu} \end{aligned}$$

- L'integrale sulle direzioni dell'elettrone e del neutrino elimina i termini dipendenti da $\cos \theta_{e\nu}$

$$-8C_S^2 m_N^2 \alpha_S 4E_\nu E_e \beta_e - 8C_V^2 m_N^2 \alpha_V 4E_\nu E_e \beta_e$$

- Per quel che riguarda il denominatore notiamo che i termini $\mathfrak{M}^R$ e $\mathfrak{M}^L$ contengono rispettivamente $\frac{1}{2}(1 - \gamma^5 \not{\epsilon}_R)$ e $\frac{1}{2}(1 + \gamma^5 \not{\epsilon}_R)$

- La somma di questi due termini è pertanto 1

- Il denominatore (integrato sulle direzioni) risulta uguale al risultato trovato per la distribuzione dell'energia

$$16m_N^2 E_e E_\nu [C_S^2 (1 + \alpha_S^2) + C_V^2 (1 + \alpha_V^2)]$$

- Abbiamo usato il risultato sperimentale che l'interferenza di Fierz è 0

Polarizzazione nel decadimento β

- La polarizzazione degli elettroni è pertanto

$$\wp = \frac{-8C_S^2 m_N^2 \alpha_S 4E_\nu E_e \beta_e - 8C_V^2 m_N^2 \alpha_V 4E_\nu E_e \beta_e}{16m_N^2 E_e E_\nu [C_S^2 (1 + \alpha_S^2) + C_V^2 (1 + \alpha_V^2)]}$$

$$\wp = -\beta_e \frac{2C_S^2 \alpha_S + 2C_V^2 \alpha_V}{C_S^2 (1 + \alpha_S^2) + C_V^2 (1 + \alpha_V^2)}$$

- Vedremo fra poco che gli studi sperimentali della polarizzazione degli elettroni hanno mostrato che

$$\wp = -\beta_e$$

- Pertanto le misure sperimentali richiedono che

$$\frac{2C_S^2 \alpha_S + 2C_V^2 \alpha_V}{C_S^2 (1 + \alpha_S^2) + C_V^2 (1 + \alpha_V^2)} = 1 \quad 2C_S^2 \alpha_S + 2C_V^2 \alpha_V = C_S^2 (1 + \alpha_S^2) + C_V^2 (1 + \alpha_V^2)$$

$$C_S^2 (1 + \alpha_S^2) - 2C_S^2 \alpha_S + C_V^2 (1 + \alpha_V^2) - 2C_V^2 \alpha_V = 0$$

$$C_S^2 (1 - \alpha_S)^2 + C_V^2 (1 - \alpha_V)^2 = 0$$

Polarizzazione nel decadimento β

- Ricordiamo che dalla misura della distribuzione dell'energia si conclude che il termine di interferenza di Fierz è assente
- L'implicazione di questo risultato sulle costanti di accoppiamento è

$$C_S C_V (1 - \alpha_S \alpha_V) = 0$$

- Abbiamo già notato non possiamo trarre conclusioni solo da questo risultato
- D'altro canto, dalla misura delle correlazioni angolari

$$a_F = \frac{C_V^2 (1 + \alpha_V^2) - C_S^2 (1 + \alpha_S^2)}{C_V^2 (1 + \alpha_V^2) + C_S^2 (1 + \alpha_S^2)} = 1$$

- Questo risultato implica

$$\begin{aligned} C_V^2 \cancel{(1 + \alpha_V^2)} - C_S^2 (1 + \alpha_S^2) &= C_V^2 \cancel{(1 + \alpha_V^2)} + C_S^2 (1 + \alpha_S^2) \\ -C_S^2 (1 + \alpha_S^2) &= +C_S^2 (1 + \alpha_S^2) \end{aligned}$$

- Da cui, come prima dell'introduzione della violazione della parità $C_S = 0$

- Combinando questo risultato con la misura della polarizzazione

$$\cancel{C_S^2 (1 - \alpha_S)^2} + C_V^2 (1 - \alpha_V)^2 = 0 \quad C_V^2 (1 - \alpha_V)^2 = 0 \quad \alpha_V = 1$$