
Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 14

22.11.2022

Tau-Theta puzzle. Esperimenti allo specchio

Violazione della parità: Esperimento di Wu

Violazione di C - Invarianza CP

Termini P-violating nell'Hamiltoniana

Polarizzazione nel decadimento β

anno accademico 2022-2023

Il “ $\theta - \tau$ puzzle”

- Nel periodo iniziale delle scoperte delle particelle strane succedeva che modi di decadimento diversi venissero confusi per particelle diverse
- Tuttavia, con l'aumento della precisione sulla misura delle masse si comprese di cosa si trattava
- Per qualche tempo rimase un paradosso: il “ $\theta - \tau$ puzzle”
- Due particelle (oggi si sa che è la stessa particella K^+):

- Stessa massa
- Stessa vita media
- Differenti parità intrinseche

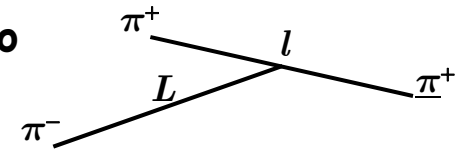
Decadimento	m (MeV)	τ (10^{-8} s)
$\theta^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$	494.0 ± 1.0	1.21 ± 0.02
$\tau^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-$	493.8 ± 1.0	1.19 ± 0.05

- Consideriamo infatti la particella θ (di spin S)
 - Lo stato iniziale è un autostato del momento angolare
 - Anche lo stato finale deve essere un autostato del momento angolare
 - Nello stato finale due particelle di spin 0 $\rightarrow$ deve essere $Y_{lm}(\theta, \phi)$
 - Parità dello stato finale $\xi_\pi \xi_\pi (-1)^l = (-1)^l$
 - Poiché $S = l$ la particella θ può avere solo spin-parità: $\xi_\theta = (-1)^S$

$$(-1)^S \rightarrow S^\xi = 0^+, 1^-, 2^+, 3^-, \dots$$

Il “ $\theta - \tau$ puzzle”

- Consideriamo ora la particella τ che decade in 3 pioni
 - Anche in questo caso un autostato del momento angolare
 - Anche lo stato finale (3 particelle) deve essere autostato
 - Composizione di due momenti angolari



- Chiamiamo l il momento angolare orbitale dei due pioni positivi
 - Chiamiamo L il momento angolare orbitale del pione negativo rispetto agli altri due
- Se lo spin della particella τ fosse $S = 0$ allora

$$|L - l| \leq S \leq L + l \rightarrow L = l$$

$$L = l \rightarrow \xi_{\tau} = (-1)^3 (-1)^{l+L} = -1$$

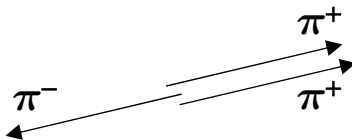
- Quindi se θ e τ avessero spin $S = 0$ avrebbero parità differente ($\xi_{\theta} = (-1)^S$)

Il “ $\theta - \tau$ puzzle”

- Per altri valori dello spin non è detto che $L = l$

$$|L - l| \leq S \leq L + l$$

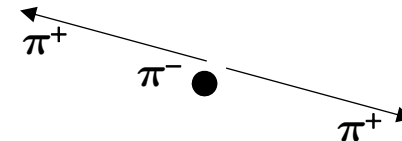
- Selezioniamo 2 configurazioni cinematiche che assicurino che L e l abbiano valori ben definiti anche se lo spin S non è nullo
- π^- ha la massima energia
- π^- ha la minima energia ($E_{\pi^-} = 0$)



- $\pi^+ \pi^+$ relativamente a riposo
- $l = 0 \rightarrow S = L$

$$\xi_\tau = (-1)^3 (-1)^L = -(-1)^S$$

$$\xi_\tau \neq \xi_\theta = (-1)^S$$



- π^+ a riposo rispetto a $\pi^+ \pi^+$
- $L = 0 \rightarrow S = l$

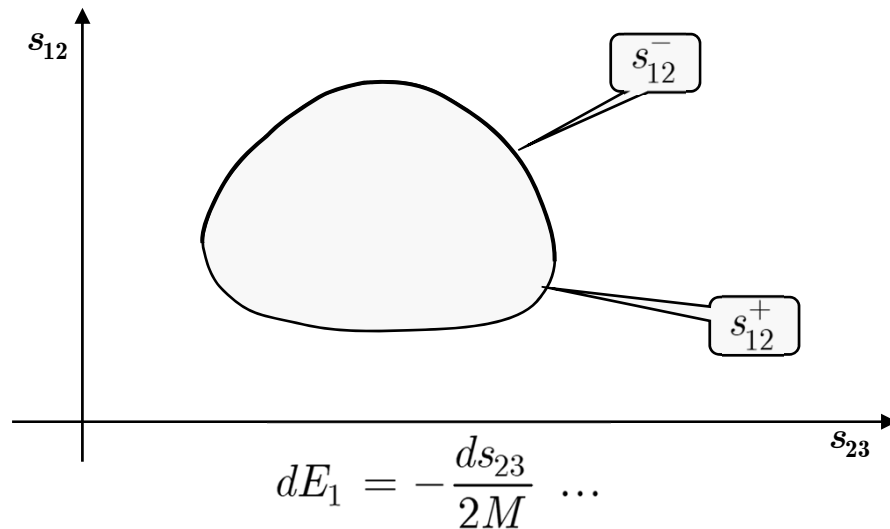
$$\xi_\tau = (-1)^3 (-1)^l = -(-1)^S$$

$$\xi_\tau \neq \xi_\theta = (-1)^S$$

- Sulla base di queste osservazioni Dalitz concluse che
 - Se la particella τ decade in queste regioni cinematiche allora la sua parità è differente da quella della particella θ
- Occorre misurare l'elemento di matrice
 - Dalitz Plot

Il Dalitz Plot

- Abbiamo già studiato la cinematica del decadimento a 3 corpi
 - Abbiamo visto che lo spazio delle fasi espresso in funzione delle energie di due particelle è popolato uniformemente



$$d\Phi = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} dE_1 dE_2$$

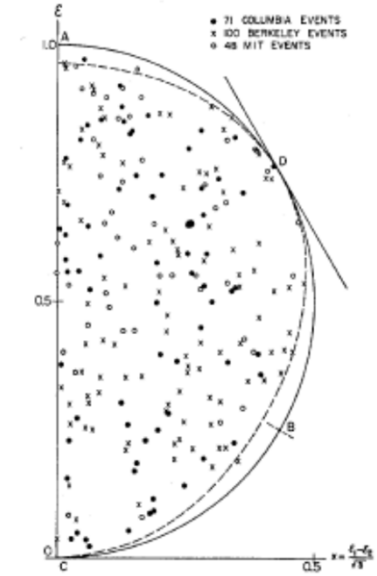
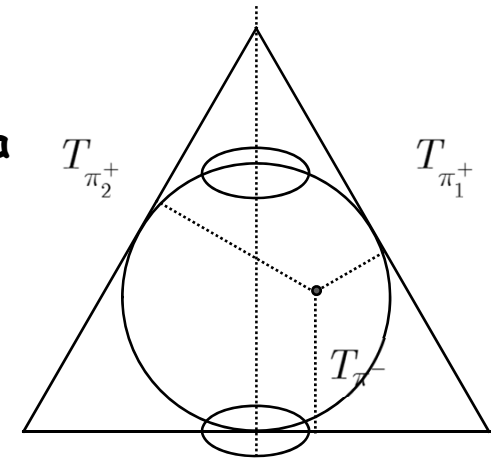
$$\frac{d\Phi}{dE_1 dE_2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{4}$$

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_A} |\mathfrak{M}|^2 d\Phi_n$$

- Pertanto
 - Si misurano le energie dei prodotti di decadimento
 - Si studia la distribuzione di questi decadimenti nel piano $E_1 - E_2$
 - La distribuzione è una misura dell'elemento di matrice
 - Pertanto se la parità fosse conservata l'elemento di matrice dovrebbe essere nullo nelle regioni che abbiamo individuato

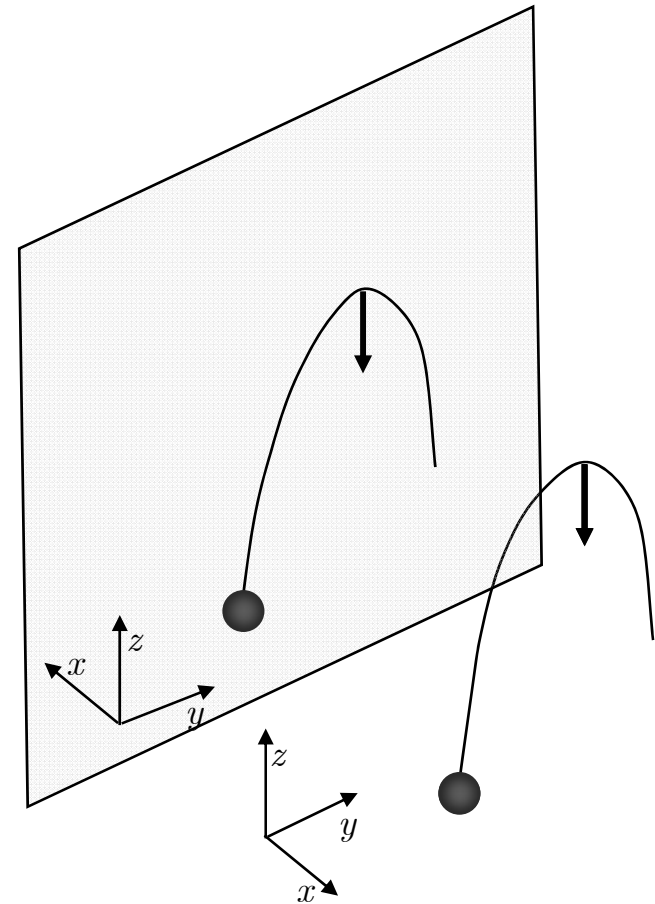
Dalitz Plot

- Spesso il Dalitz Plot viene rappresentato all'interno di un triangolo equilatero
 - Un evento è rappresentato da un punto all'interno del triangolo
 - La distanza dai lati è proporzionale all'energia cinetica
 - Si utilizza la proprietà dei triangoli equilateri per esprimere la conservazione dell'energia $T_1 + T_2 + T_3 = Q$
- In un'approssimazione non relativistica la regione fisica è interna alla circonferenza
- Inoltre dobbiamo avere simmetria fra π_1 e π_2
- Il ragionamento di Dalitz era:
 - Se il decadimento della particella τ popola le regioni cinematiche $T_{\pi^-} \sim 0$ $T_{\pi^-} \sim T_{\max}$ allora la sua parità è differente da quella della particella θ
- L'osservazione sperimentale mostra che le regioni sono popolate
 - Pertanto:
 - O sono particelle diverse
 - O la parità non è conservata



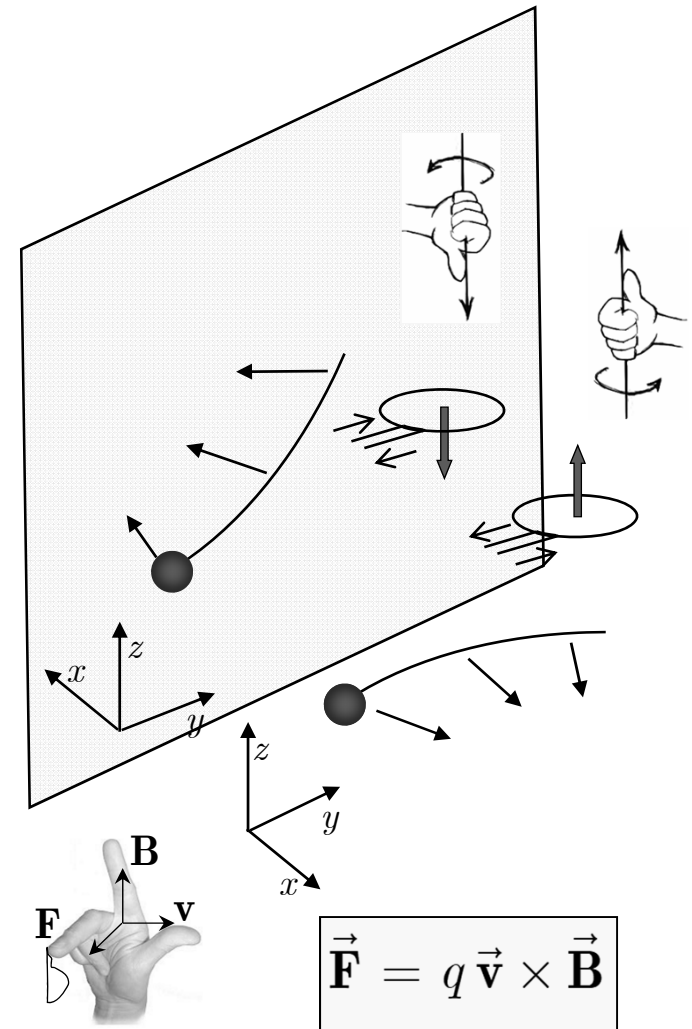
Esperimenti allo Specchio

- Le leggi della fisica classica possiedono una proprietà di invarianza a prima vista ovvia
- Consideriamo un esperimento possibile
 - Ad esempio il moto di un oggetto sotto l'effetto del campo gravitazionale
- Ciò che si ottiene osservando l'esperimento allo specchio è anch'esso un esperimento possibile e realizzabile
 - In tutti e due gli esperimenti la forza di gravità si calcola allo stesso modo:
 - È diretta verso il centro della terra o, approssimativamente, verso il basso
- Il moto di una massa sotto l'effetto del campo gravitazionale è invariante per riflessioni spaziali



Esperimenti allo Specchio

- Un altro esperimento possibile è il moto di una particella carica in presenza di un campo magnetico
 - La spira genera un campo magnetico (regola della mano destra)
 - La Forza di Lorentz sulla carica si calcola con la regola della mano destra
- Se osserviamo lo stesso esperimento allo specchio ...
 - Vediamo un esperimento realizzabile
 - Anche nello specchio la spira genera un campo magnetico (calcolabile con la regola della mano destra)
 - La Forza di Lorentz si calcola con la regola della mano destra
- Si sarebbe potuta usare la mano sinistra
 - Usare la mano destra è una convenzione
- Anche la deflessione di una particella in campo magnetico è invariante per riflessione spaziale



L'esperimento di Wu et al.

- La prima verifica sperimentale della violazione della parità nel decadimento β :
- Si allineano gli spin con un campo magnetico
- Si scopre che il cobalto emette elettroni prevalentemente verso il basso in direzione opposta allo spin
- Nell'esperimento speculare ($x \rightarrow -x$)
 - Il campo magnetico B_z cambia segno;
 - La direzione del momento magnetico μ (allineato al campo B) cambia segno
- Se la legge fosse la stessa ...
- Ci aspetteremmo pertanto che gli elettroni vadano prevalentemente verso l'alto
 - Invece, evidentemente, nell'esperimento riflesso nello specchio vanno verso il basso

- L'esperimento visto allo specchio è impossibile. Ciò è dovuto al fatto che nell'esperimento reale si osserva una asimmetria

PHYSICAL REVIEW VOL 105 PAG. 1413

(1957)

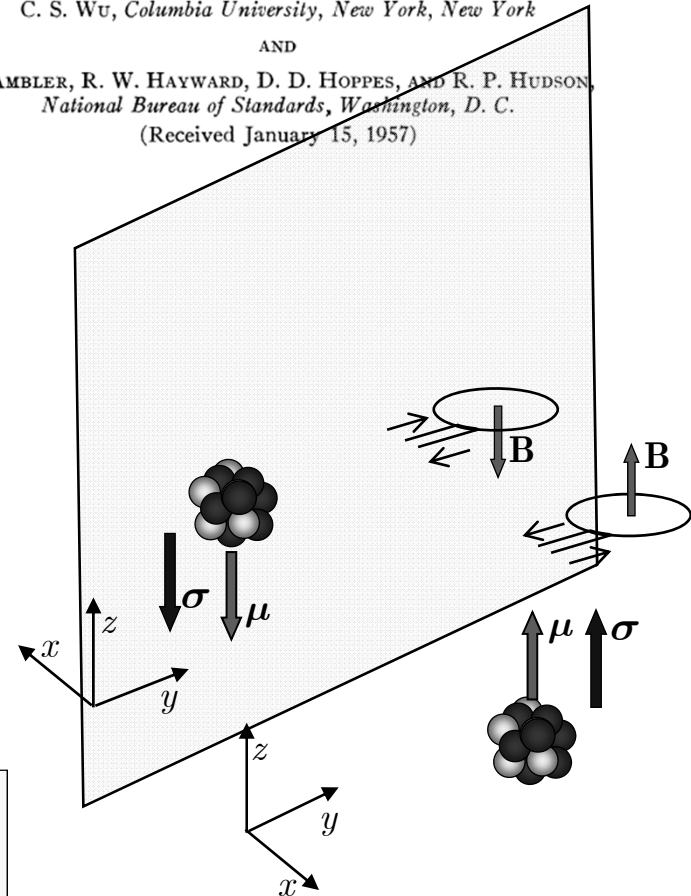
Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay*

C. S. WU, *Columbia University, New York, New York*

AND

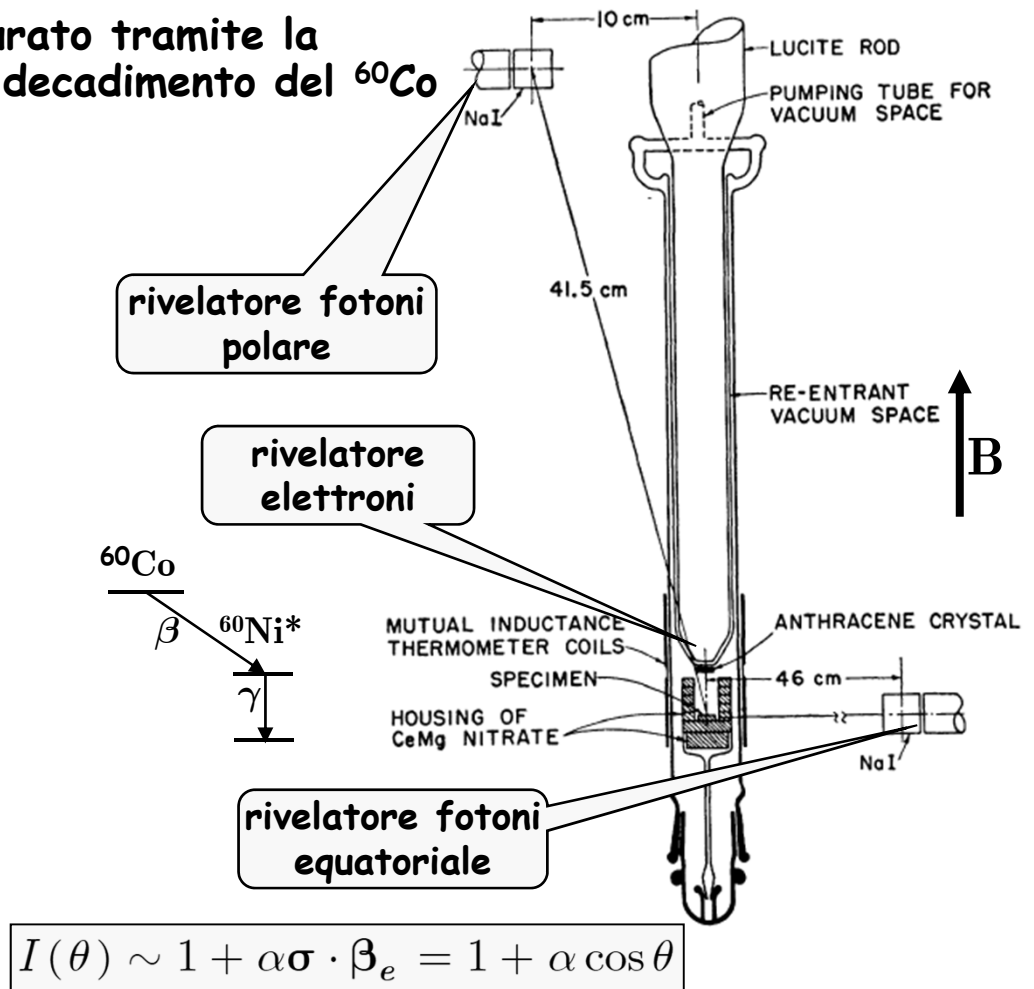
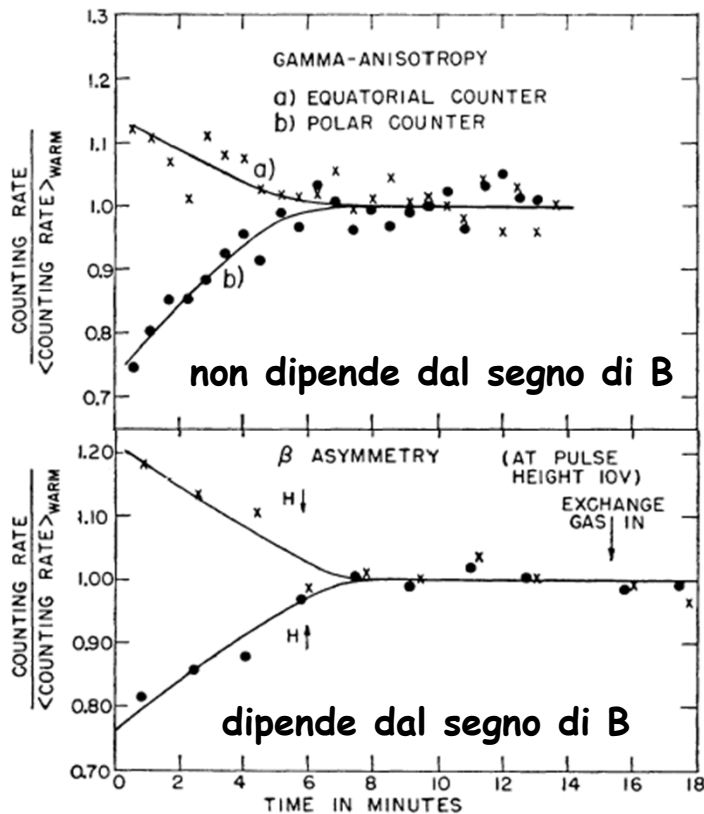
E. AMBLER, R. W. HAYWARD, D. D. HOPPE, AND R. P. HUDSON,
National Bureau of Standards, Washington, D. C.

(Received January 15, 1957)



L'esperimento di Wu et al.

- Per allineare gli spin occorre utilizzare temperature molto basse e un campo magnetico intenso
- Il grado di polarizzazione è misurato tramite la asimmetria delle emissioni γ nel decadimento del ^{60}Co



La violazione di C

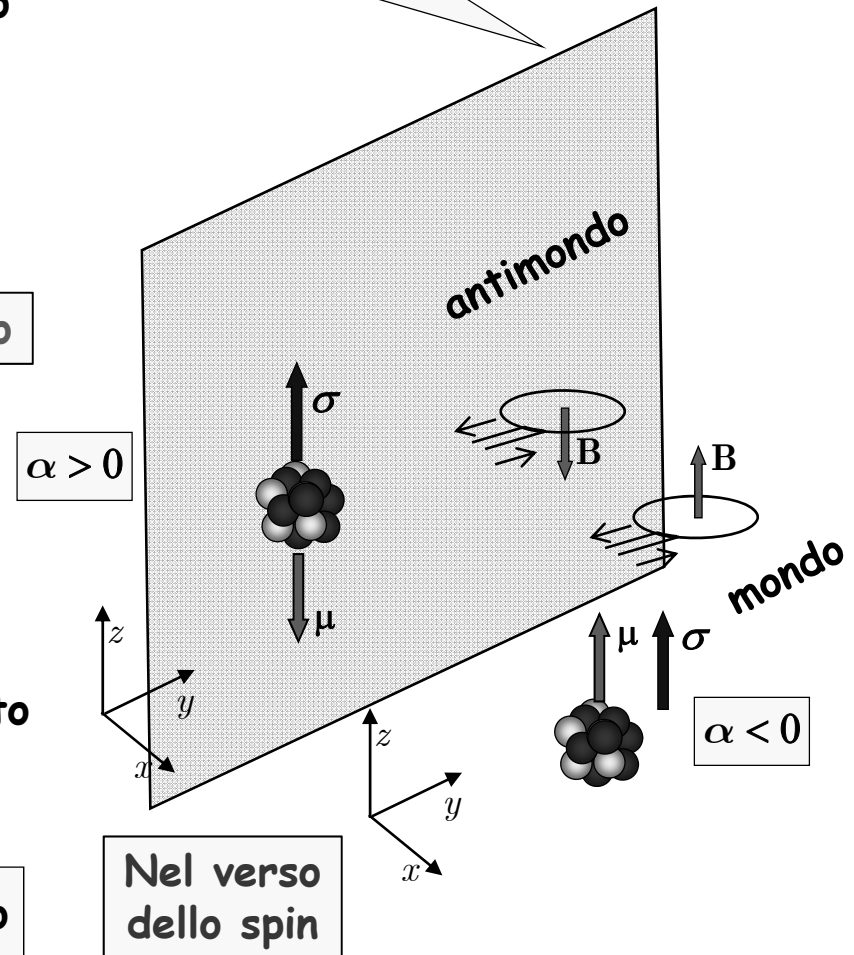
- Il decadimento β viola anche la simmetria fra particelle e antiparticelle
- La distribuzione angolare degli elettroni (o positroni) rispetto allo spin è

$$I(\theta) \sim 1 + \alpha \sigma \cdot \beta_e = 1 + \alpha \cos \theta$$

- Il coefficiente α
 - È negativo per la materia
 - È positivo per l'antimateria
- Se nel nostro esperimento sostituiamo la materia con l'antimateria
 - Il campo magnetico cambia direzione: la corrente è di antielettroni
 - Il momento magnetico si allinea a B
 - Lo spin è in direzione opposta al momento magnetico: è un antinucleo ($Q < 0$)
 - Il coefficiente α diventa positivo
- Nell'anti-mondo i positroni vanno verso l'alto

Lo vedremo

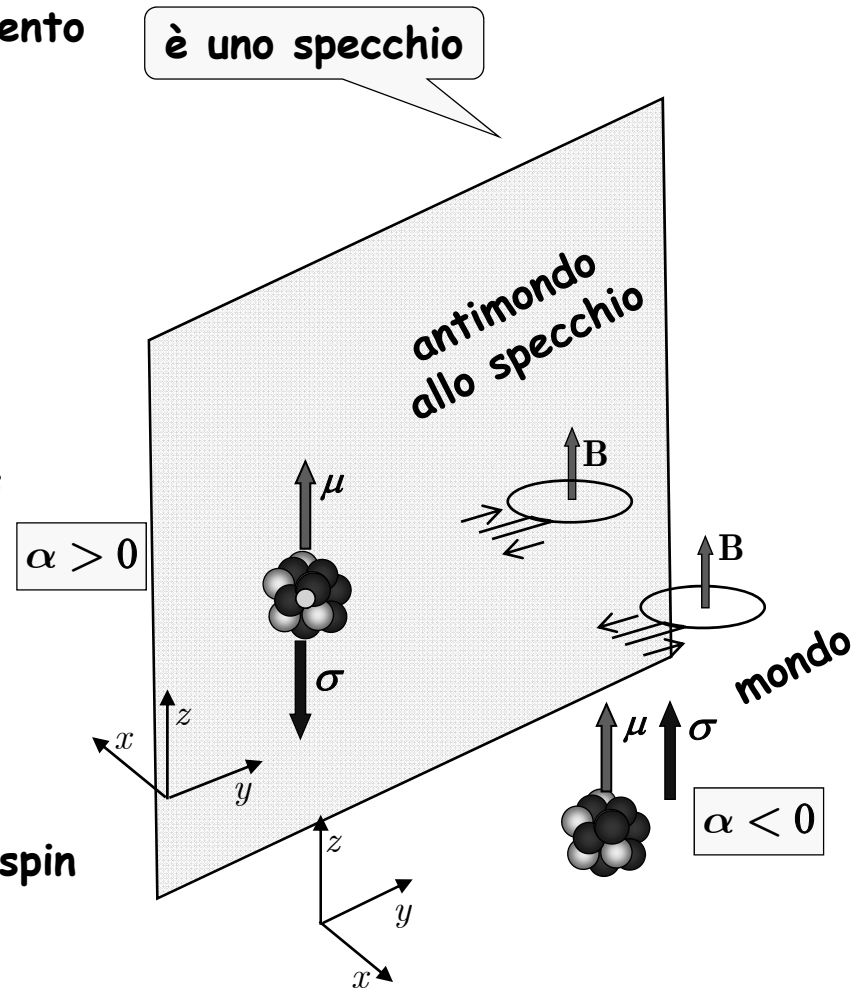
non è uno specchio



Invarianza per trasformazioni CP

- Se si applicano contemporaneamente le due trasformazioni C e P si ottiene un esperimento possibile che produce un risultato identico all'originale
- L'esperimento originale ...
- L'esperimento allo specchio e fatto di antimateria ...
 - Il campo magnetico punta verso l'alto
 - La spira è percorsa in senso inverso
 - La corrente è composta da antielettroni
 - Il momento magnetico punta verso l'alto
 - Si allinea a B
 - Lo spin punta verso il basso
 - È un antinucleo
- Dato che si tratta di un antinucleo $\alpha > 0$
 - Gli elettroni vanno nella direzione dello spin verso il basso

- L'interazione debole è invariante per CP



La violazione della parità

- La scoperta che la parità è violata nei decadimenti β impone una revisione dell'Hamiltoniana

$$\mathcal{H}' = \sum_{i=S,V,A,T} C_i (\bar{\psi}_p \Gamma^i \psi_n) (\bar{\psi}_e \Gamma_i \psi_\nu) + h.c.$$

- In particolare la richiesta che i singoli termini debbano essere scalari non ha più una motivazione fisica
- L'Hamiltoniana più generale non deve necessariamente conservare la parità
- Ogni termine può avere sia una parte scalare sia una parte pseudo-scalare

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' = & C_S (\bar{\psi}_p \psi_n) (\bar{\psi}_e (1 + \alpha_S \gamma^5) \psi_\nu) + C_V (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma_\mu \psi_\nu) + \\ & + C_A (\bar{\psi}_p \gamma^5 \gamma^\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e (1 + \alpha_A \gamma^5) \gamma^5 \gamma_\mu \psi_\nu) + C_T (\bar{\psi}_p \sigma^{\mu\nu} \psi_n) (\bar{\psi}_e (1 + \alpha_T \gamma^5) \sigma_{\mu\nu} \psi_\nu) \end{aligned}$$

- Pertanto l'Hamiltoniana risulta composta da due termini

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H}'^{PC} + \mathcal{H}'^{PV}$$

- La parte PV dell'Hamiltoniana contiene termini pseudoscalari

$$\begin{aligned} \mathcal{H}'^{PV} = & \alpha_S C_S (\bar{\psi}_p \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma^5 \psi_\nu) + \alpha_V C_V (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma^5 \gamma_\mu \psi_\nu) + \\ & + \alpha_A C_A (\bar{\psi}_p \gamma^5 \gamma^\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma^5 \gamma^5 \gamma_\mu \psi_\nu) + \alpha_T C_T (\bar{\psi}_p \sigma^{\mu\nu} \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma^5 \sigma_{\mu\nu} \psi_\nu) \end{aligned}$$



La violazione della parità

- Il termine PC (Parity Conserving) è quello che abbiamo studiato fino ad ora ed è pari per trasformazioni di inversione

$$\mathbb{P}\mathcal{H}'^{PC}\mathbb{P}^{-1} = \mathcal{H}'^{PC}$$

- Il nuovo termine PV (Parity Violating) contiene prodotti di grandezze che cambiano segno (odd) per trasformazioni di inversione

$$\mathbb{P}\mathcal{H}'^{PV}\mathbb{P}^{-1} = -\mathcal{H}'^{PV}$$

- Ricordiamo che l'ampiezza di transizione è costruita con una serie perturbativa in funzione di $\mathcal{H}'$

- In particolare al primo ordine

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int d^4x \langle p e^- \bar{\nu} | \mathcal{H}'_I | n \rangle$$

- Una transizione è permessa se l'elemento di matrice di $\mathcal{H}'$ è non nullo
- Una transizione è proibita se l'elemento di matrice di $\mathcal{H}'$ è nullo
- Consideriamo due autostati di $\mathbb{P}$ $|a\rangle$ e $|b\rangle$ con parità intrinseca differente

$$\mathbb{P}|a\rangle = +|a\rangle$$

$$\mathbb{P}|b\rangle = -|b\rangle$$

- Si può dimostrare che

$$\langle a | \mathcal{H}'^{PC} | b \rangle = 0$$

$$\langle a | \mathcal{H}'^{PV} | b \rangle \neq 0$$

La violazione della parità

- Cominciamo con l'elemento di matrice del termine PC fra due autostati di $\mathbb{P}$ con parità diversa

$$\begin{aligned}\langle a | \mathcal{H}'^{PC} | b \rangle &= \langle a | \mathbb{P}^{-1} \mathbb{P} \mathcal{H}'^{PC} \mathbb{P}^{-1} \mathbb{P} | b \rangle = (\langle a | +) \mathbb{P} \mathcal{H}'^{PC} \mathbb{P}^{-1} (-|b\rangle) \\ &= -\langle a | \mathbb{P} \mathcal{H}'^{PC} \mathbb{P}^{-1} | b \rangle = -\langle a | (+\mathcal{H}'^{PC}) | b \rangle = -\langle a | \mathcal{H}'^{PC} | b \rangle\end{aligned}$$

- Quindi

$$\langle a | \mathcal{H}'^{PC} | b \rangle = 0$$

- Calcoliamo adesso l'elemento di matrice del termine PV fra due autostati di $\mathbb{P}$ con parità diversa

$$\begin{aligned}\langle a | \mathcal{H}'^{PV} | b \rangle &= \langle a | \mathbb{P}^{-1} \mathbb{P} \mathcal{H}'^{PV} \mathbb{P}^{-1} \mathbb{P} | b \rangle = (\langle a | +) \mathbb{P} \mathcal{H}'^{PV} \mathbb{P}^{-1} (-|b\rangle) \\ &= -\langle a | \mathbb{P} \mathcal{H}'^{PV} \mathbb{P}^{-1} | b \rangle = -\langle a | (-\mathcal{H}'^{PV}) | b \rangle = +\langle a | \mathcal{H}'^{PV}_{int} | b \rangle\end{aligned}$$

- Quindi è possibile che

$$\langle a | \mathcal{H}'^{PV} | b \rangle \neq 0$$

- Analogamente si può dimostrare che per due autostati di $\mathbb{P}$ con la stessa parità, ad esempio

$$\mathbb{P}|a\rangle = +|a\rangle$$

$$\mathbb{P}|b\rangle = +|b\rangle$$



$$\langle a | \mathcal{H}'^{PC} | b \rangle \neq 0$$

$$\langle a | \mathcal{H}'^{PV} | b \rangle = 0$$



Conseguenze Fenomenologiche

- Le modifiche introdotte non alterano la parte nucleare e pertanto
 - Si mantiene la classificazione dei vari termini di interazione
 - Transizioni di Fermi e transizioni di Gamov-Teller con le regole di selezione sugli spin nucleari dedotte precedentemente
 - Fino a quando non si studiano processi con polarizzazione del nucleone iniziale non si hanno termini di interferenza SA , ST , VA , VT
- Gli elementi di matrice si calcolano sempre utilizzando la tecnica delle tracce
- In particolare ricordiamo il calcolo dell'elemento di matrice di Fermi

$$|\overline{\mathfrak{M}}_F|^2 = C_S^2 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(\not{k}' - m_\nu)]$$

$$+ C_V^2 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)\gamma^0(\not{k}' - m_\nu)\gamma^0]$$

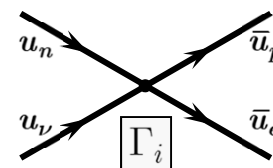
$$+ 2\text{Re}[C_S C_V 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(\not{k}' - m_\nu)\gamma^0]]$$

- Assumendo $m_\nu = 0$ (ipotesi non essenziale) diventa

$$|\overline{\mathfrak{M}}_F|^2 = C_S^2 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(1 + \alpha_S \gamma^5)\not{k}'(1 - \alpha_S \gamma^5)]$$

$$+ C_V^2 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(1 + \alpha_V \gamma^5)\gamma^0\not{k}'(1 + \alpha_V \gamma^5)\gamma^0]$$

$$+ 2\text{Re}[C_S C_V 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(1 + \alpha_S \gamma^5)\not{k}'(1 + \alpha_V \gamma^5)\gamma^0]]$$



$$\boxed{1 + \alpha_S \gamma^5}$$

$$\boxed{\Gamma_S = 1 + \alpha_S \gamma^5}$$

$$\boxed{\Gamma_V = (1 + \alpha_S \gamma^5)\gamma^\mu}$$

Conseguenze Fenomenologiche

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}_F}|^2 = & C_S^2 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(1 + \alpha_S \gamma^5) \not{k}'(1 - \alpha_S \gamma^5)] \\ & + C_V^2 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0 \not{k}'(1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0] \\ & + 2 \text{Re}[C_S C_V 4m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e)(1 + \alpha_S \gamma^5) \not{k}'(1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0]] \end{aligned}$$

- Fare attenzione al segno del secondo operatore di vertice
- Ricordiamo infatti che la somma sugli stati di polarizzazione dava

$$\text{Tr}((\not{k} + m_e) \Gamma^m (\not{k}' - m_\nu) \bar{\Gamma}^l)$$

- Abbiamo allora

$$\bar{\Gamma}^l = \gamma^0 (\Gamma^l)^\dagger \gamma^0$$

$$\overline{(1 + \alpha_S \gamma^5)} = \gamma^0 (1 + \alpha_S \gamma^5)^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 (1 + \alpha_S \gamma^5) \gamma^0 = 1 - \alpha_S \gamma^5$$

- E anche

$$\overline{(1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0} = \gamma^0 [(1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0]^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^0 (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0 = (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0$$

Gli elementi di matrice

- Le tracce possono essere semplicemente sviluppate ricordando le proprietà

$$Tr(I) = 4 \quad Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu,\nu} \quad Tr(\not{a}\not{b}) = 4a \cdot b$$

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4[g^{\mu,\nu}g^{\alpha,\beta} - g^{\mu,\alpha}g^{\nu,\beta} + g^{\mu,\beta}g^{\nu,\alpha}]$$

$$Tr(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)]$$

$$Tr(\gamma^\mu) = Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\delta) = Tr(\text{dispari}) = 0$$

$$Tr(\gamma^5) = Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) = Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\delta \gamma^5) = 0$$

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5) = -4i\varepsilon^{\mu,\nu,\alpha,\beta}$$

$$Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma^5) = +4i\varepsilon_{\mu,\nu,\alpha,\beta}$$

- Per gli elementi di matrice si ottiene

$$|\overline{\mathfrak{M}_F}|^2 = 16m_N^2 E_c E_\nu \left[C_S^2 (1 + \alpha_S^2) (1 - \beta_e \cdot \beta_\nu) + C_V^2 (1 + \alpha_V^2) (1 + \beta_e \cdot \beta_\nu) + 2C_S C_V (1 - \alpha_S \alpha_V) \frac{m_c}{E_c} \right]$$

$$|\overline{\mathfrak{M}_{GT}}|^2 = 16m_N^2 E_c E_\nu \cdot \left[3C_A^2 (1 + \alpha_A^2) \left(1 - \frac{1}{3} \beta_e \cdot \beta_\nu\right) + 12C_T^2 (1 + \alpha_T^2) \left(1 + \frac{1}{3} \beta_e \cdot \beta_\nu\right) - 12C_A C_T (1 - \alpha_A \alpha_T) \frac{m_c}{E_c} \right]$$

Conseguenze Fenomenologiche

- Consideriamo ad esempio l'elemento di matrice di Fermi

$$|\mathfrak{M}_F|^2 = 16m_N^2 E_c E_\nu \left[C_S^2 (1 + \alpha_S^2)(1 - \beta_e \cdot \beta_\nu) + C_V^2 (1 + \alpha_V^2)(1 + \beta_e \cdot \beta_\nu) + 2C_S C_V (1 - \alpha_S \alpha_V) \frac{m_e}{E_c} \right]$$

- L'assenza del termine di interferenza, dedotta dallo studio della forma dello spettro, ha conseguenze meno dirette

- $C_S C_V (1 - \alpha_S \alpha_V) = 0$

- Questo può succedere per una delle 3 condizioni

$$C_S = 0$$

$$C_V = 0$$

$$1 - \alpha_S \alpha_V = 0$$

- Pertanto risulta più complicato trarre conclusioni dagli esperimenti già visti

- Per le correlazioni angolari non ci sono sostanziali differenze

- Infatti cambia solo il valore numerico delle due costanti di accoppiamento

$$C_S^2 \rightarrow C_S^2 (1 + \alpha_S^2) \quad C_V^2 \rightarrow C_V^2 (1 + \alpha_V^2)$$

- Occorre inventare nuovi esperimenti per determinare le nuove costanti

- L'esperimento di Wu et al. fornisce le nuove informazioni necessarie

- I calcoli per interpretare gli esperimenti sono però un po' più lunghi

- I nuclei sono polarizzati

- Non si annullano i termini di interferenza Fermi/Gamov-Teller

Elettroni polarizzati

- L'osservazione della direzione privilegiata di emissione degli elettroni nell'esperimento di Wu et al. ha una implicazione molto importante sulla direzione dello spin (polarizzazione) dell'elettrone



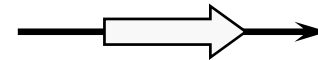
- Per conservare il momento angolare l'elettrone e il neutrino devono portare via una quantità $S = 1 \cdot \hbar$ di momento angolare
 - Il neutrino e l'elettrone devono avere gli spin paralleli
- Dall'esperimento di Wu gli elettroni sono emessi preferibilmente in basso
 - Più precisamente in direzione opposta allo spin del nucleo
- L'elettrone deve quindi essere polarizzato in direzione opposta alla sua direzione di moto: elettrone left-handed
- Verifichiamo se l'Hamiltoniana che abbiamo scritto prevede questo fenomeno
 - Calcoliamo la polarizzazione degli elettroni nel decadimento β

Polarizzazione nel decadimento β

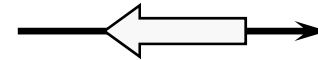
- La polarizzazione degli elettroni è definita come

$$\wp = \frac{N_R - N_L}{N_R + N_L}$$

- Il numero degli elettroni Right-Handed è N_R



- Il numero degli elettroni Left-Handed è N_L



- I numeri N_R e N_L sono proporzionali alle larghezze di decadimento

$$N_{R,L} \sim \int d\Gamma_{R,L}$$

$$d\Gamma_{R,L} = \frac{1}{2m_N} |\overline{\mathfrak{M}^{R,L}}|^2 d\Phi$$

- Come in precedenza l'elemento di matrice contiene interazioni S, V, A, T

$$\mathfrak{M}^{R,L} = \mathfrak{M}_S^{R,L} + \mathfrak{M}_V^{R,L} + \mathfrak{M}_A^{R,L} + \mathfrak{M}_T^{R,L}$$

Polarizzazione nel decadimento β

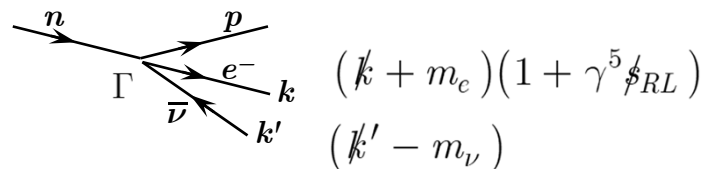
$$\mathfrak{M}^{R,L} = \mathfrak{M}_S^{R,L} + \mathfrak{M}_V^{R,L} + \mathfrak{M}_A^{R,L} + \mathfrak{M}_T^{R,L}$$

- Rivediamo i singoli termini
 - Osserviamo in particolare la polarizzazione degli spinori dell'elettrone

- **Scalare** $\mathfrak{M}_S^{R,L} = C_S \langle 1 \rangle \bar{u}_e(k, s_{R,L}) (1 + \alpha_S \gamma^5) v_\nu(k')$
- **Vettoriale** $\mathfrak{M}_V^{R,L} = C_V \langle 1 \rangle \bar{u}_e(k, s_{R,L}) (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0 v_\nu(k')$
- **Vettoriale assiale** $\mathfrak{M}_A^{R,L} = C_A \langle \sigma_j \rangle \bar{u}_e(k, s_{R,L}) (1 + \alpha_A \gamma^5) \gamma^5 \gamma^j v_\nu(k')$
- **Tensoriale** $\mathfrak{M}_T^{R,L} = 2C_T \langle \sigma_j \rangle \bar{u}_e(k, s_{R,L}) (1 + \alpha_T \gamma^5) \Sigma^j v_\nu(k')$

Polarizzazione nel decadimento β

- Il calcolo del quadrato del modulo procede in maniera analoga a quanto fatto precedentemente sommando su tutti gli stati di polarizzazione non osservati (n, p, ν)
- Dato che sommiamo sulla polarizzazione iniziale (del neutrone) non ci sono termini di interferenza SA, ST, VA, VT
 - Di nuovo abbiamo i due elementi di matrice di Fermi e di Gamov-Teller
- Le somme sugli stati di polarizzazione si fanno con la tecnica delle tracce
 - La polarizzazione degli elettroni si introduce tramite i proiettori di spin
- L'elemento di matrice di Fermi è pertanto



$$\begin{aligned}
 \overline{|\mathfrak{M}_F^{R,L}|^2} &= C_S^2 2m_N^2 \text{Tr} \left[(\not{k} + m_e) (1 + \gamma^5 \not{\epsilon}_{R,L}) (1 + \alpha_S \gamma^5) \not{k}' (1 - \alpha_S \gamma^5) \right] + \\
 &+ C_V^2 2m_N^2 \text{Tr} \left[(\not{k} + m_e) (1 + \gamma^5 \not{\epsilon}_{R,L}) (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0 \not{k}' (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0 \right] + \\
 &+ 2 \text{Re} \left[C_S C_V 2m_N^2 \text{Tr} \left[(\not{k} + m_e) (1 + \gamma^5 \not{\epsilon}_{R,L}) (1 + \alpha_S \gamma^5) \not{k}' (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0 \right] \right]
 \end{aligned}$$

Polarizzazione nel decadimento β

- Occorre definire i vettori di polarizzazione
 - Il vettore s_R definisce una polarizzazione parallela alla direzione di moto: polarizzazione Right-Handed
 - Il vettore polarizzazione ξ (nel sistema di riposo) è parallelo a p ($|\xi| = 1$)

$$s^0 = \frac{\mathbf{k} \cdot \xi}{m_e}$$

$$s_R^0 = \frac{\mathbf{k} \cdot \xi}{m_e} = \frac{|\mathbf{k}|}{m_e}$$

$$\mathbf{s} = \xi + \frac{(\xi \cdot \mathbf{k}) \mathbf{k}}{m_e (E_e + m_e)}$$

$$\mathbf{s}_R = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} + \frac{|\mathbf{k}| \mathbf{k}}{m_e (E_e + m_e)} = \frac{m_e (E_e + m_e) + |\mathbf{k}|^2}{m_e (E_e + m_e) |\mathbf{k}|} \mathbf{k}$$

$$= \frac{m_e E_e + E_e^2}{m_e (E_e + m_e) |\mathbf{k}|} \mathbf{k} = \frac{E_e \mathbf{k}}{m_e |\mathbf{k}|}$$

$$\boxed{s_R = \left(\frac{|\mathbf{k}|}{m_e}, \frac{E_e}{m_e} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \right)}$$

- Il vettore s_L si ottiene semplicemente cambiando $\xi \rightarrow -\xi$ e quindi

$$\boxed{s_L = -s_R}$$

Polarizzazione nel decadimento β

- Ricordiamo la definizione di polarizzazione

$$\wp = \frac{N_R - N_L}{N_R + N_L}$$

- Il numero di elettroni per le due polarizzazioni è dato da

$$N_{R,L} \sim \int d\Gamma_{R,L} \quad d\Gamma_{R,L} = \frac{1}{2m_N} |\overline{\mathfrak{M}^{R,L}}|^2 d\Phi$$

- Pertanto la polarizzazione è data da

- L'integrale sullo spazio delle fasi è su tutte le variabili cinematiche escluso E_e

- Vedremo che $\wp$ dipende dall'energia

$$\wp = \frac{\int \left(|\overline{\mathfrak{M}^R}|^2 - |\overline{\mathfrak{M}^L}|^2 \right) d\Phi}{\int \left(|\overline{\mathfrak{M}^R}|^2 + |\overline{\mathfrak{M}^L}|^2 \right) d\Phi}$$

- Calcoliamo il numeratore

- Ricordiamo che

$$\not{\epsilon}_L = -\not{\epsilon}_R \quad \dots (\cancel{\not{\epsilon}_L} + \gamma^5 \not{\epsilon}_R) \dots - \dots (\cancel{\not{\epsilon}_R} + \gamma^5 \not{\epsilon}_L) \dots = 2\gamma^5 \not{\epsilon}_R$$

$$\gamma^5 \not{\epsilon}_L = -\gamma^5 \not{\epsilon}_R$$

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}_F^R}|^2 - |\overline{\mathfrak{M}_F^L}|^2 &= C_S^2 2m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) 2\gamma^5 \not{\epsilon}_R (1 + \alpha_S \gamma^5) \not{k}' (1 - \alpha_S \gamma^5)] + \\ &+ C_V^2 2m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) 2\gamma^5 \not{\epsilon}_R (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0 \not{k}' (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0] + \\ &+ 2\text{Re}[C_S C_V 2m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) 2\gamma^5 \not{\epsilon}_R (1 + \alpha_S \gamma^5) \not{k}' (1 + \alpha_V \gamma^5) \gamma^0]] \end{aligned}$$



Polarizzazione nel decadimento β

- Esaminiamo adesso un generico termine

- Ad es. il termine scalare

$$|\overline{\mathfrak{M}_F^R}|^2 - |\overline{\mathfrak{M}_F^L}|^2 = C_S^2 2m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) 2\gamma^5 \not{\epsilon}_R (1 + \alpha_S \gamma^5) \not{k}' (1 - \alpha_S \gamma^5)]$$

commuta con $\not{k}'$

anticommuta con $\not{k}'$

- Possiamo trasportare $(1 - \alpha_S \gamma^5)$ a sinistra trasformandolo in $(1 + \alpha_S \gamma^5)$

- Ricordiamo che $(\gamma^5)^2 = I$

- Otteniamo pertanto $(1 + \alpha_S \gamma^5)^2 = 1 + 2\alpha_S \gamma^5 + \alpha_S^2$

- Introduciamo questi risultati nel calcolo

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}_F^R}|^2 - |\overline{\mathfrak{M}_F^L}|^2 &= 4C_S^2 m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) \gamma^5 \not{\epsilon}_R (1 + \alpha_S \gamma^5)^2 \not{k}'] + \\ &\quad + 4C_V^2 m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) \gamma^5 \not{\epsilon}_R (1 + \alpha_V \gamma^5)^2 \gamma^0 \not{k}' \gamma^0] + \\ &\quad + 8 \text{Re}[C_S C_V m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) \gamma^5 \not{\epsilon}_R (1 + \alpha_S \gamma^5)(1 - \alpha_V \gamma^5) \not{k}' \gamma^0]] \end{aligned}$$

- Possiamo ancora anticommutare γ^5 con $\not{\epsilon}_R$

$$\gamma^5 (1 + \alpha_{S,V} \gamma^5)^2 = \gamma^5 (1 + 2\alpha_{S,V} \gamma^5 + \alpha_{S,V}^2) = (1 + \alpha_{S,V}^2) \gamma^5 + 2\alpha_{S,V}$$

Polarizzazione nel decadimento β

- Per il terzo termine

$$\begin{aligned}\gamma^5 (1 + \alpha_S \gamma^5) (1 - \alpha_V \gamma^5) &= \gamma^5 (1 - \alpha_V \gamma^5 + \alpha_S \gamma^5 - \alpha_S \alpha_V) \\ &= \gamma^5 (1 - \alpha_S \alpha_V) + \gamma^5 (\alpha_S - \alpha_V) \gamma^5 = (1 - \alpha_S \alpha_V) \gamma^5 + (\alpha_S - \alpha_V)\end{aligned}$$

- Introducendo nell'espressione

$$\begin{aligned}\overline{|\mathfrak{M}_F^R|^2} - \overline{|\mathfrak{M}_F^L|^2} &= -4C_S^2 m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) \not{\epsilon}_R ((1 + \alpha_S^2) \gamma^5 + 2\alpha_S) \not{k}'] + \\ &- 4C_V^2 m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) \not{\epsilon}_R ((1 + \alpha_V^2) \gamma^5 + 2\alpha_V) \gamma^0 \not{k}' \gamma^0] + \\ &- 8 \text{Re}[C_S C_V m_N^2 \text{Tr}[(\not{k} + m_e) \not{\epsilon}_R ((1 - \alpha_S \alpha_V) \gamma^5 + (\alpha_S - \alpha_V)) \not{k}' \gamma^0]]\end{aligned}$$

- E finalmente

$$\begin{aligned}\not{k} \not{\epsilon}_R \gamma^5 \not{k}' &\rightarrow 0 \\ \not{k} \not{\epsilon}_R \not{k}' &\rightarrow 0 \\ \not{\epsilon}_R \gamma^5 \not{k}' &\rightarrow 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\not{k} \not{\epsilon}_R \gamma^5 \gamma^0 \not{k}' \gamma^0 &\rightarrow 0 \\ \not{k} \not{\epsilon}_R \gamma^0 \not{k}' \gamma^0 &\rightarrow 0 \\ \not{\epsilon}_R \gamma^5 \gamma^0 \not{k}' \gamma^0 &\rightarrow 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\not{\epsilon}_R \gamma^5 \not{k}' \gamma^0 &\rightarrow 0 \\ \not{\epsilon}_R \not{k}' \gamma^0 &\rightarrow 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{|\mathfrak{M}_F^R|^2} - \overline{|\mathfrak{M}_F^L|^2} &= -4C_S^2 m_N^2 \text{Tr}[2\alpha_S m_e \not{\epsilon}_R \not{k}'] - 4C_V^2 m_N^2 \text{Tr}[2\alpha_S m_e \not{\epsilon}_R \gamma^0 \not{k}' \gamma^0] - \\ &- 8 \text{Re}[C_S C_V m_N^2 \text{Tr}[(1 - \alpha_S \alpha_V) \gamma^5 \not{\epsilon}_R \not{k}' \gamma^0 + (\alpha_S - \alpha_V) \not{\epsilon}_R \not{k}' \gamma^0]]\end{aligned}$$



Polarizzazione nel decadimento β

- Siamo quasi alla fine !!!

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}_F^R}|^2 - |\overline{\mathfrak{M}_F^L}|^2 = & -4C_S^2 m_N^2 \text{Tr}[2\alpha_S m_e \not{s}_R \not{k}'] - 4C_V^2 m_N^2 \text{Tr}[2\alpha_V m_e \not{s}_R \gamma^0 \not{k}' \gamma^0] - \\ & - 8 \text{Re}[C_S C_V m_N^2 \text{Tr}[(1 - \alpha_S \alpha_V) \gamma^5 \not{k} \not{s}_R \not{k}' \gamma^0 + (\alpha_S - \alpha_V) \not{k} \not{s}_R \not{k}' \gamma^0]] \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Tr}(\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)]}$$

$$\boxed{\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^5) = 4i\varepsilon^{\mu,\nu,\alpha,\beta}}$$

$$\boxed{\text{Re}[4i\varepsilon^{\mu,\nu,\alpha,0} k_\mu (s_R)_\nu k'_\alpha] = 0}$$

$$\begin{aligned} = & -8C_S^2 m_N^2 \alpha_S m_e 4(s_R \cdot k') - 8C_V^2 m_N^2 \alpha_V m_e 4(2s_R^0 E_\nu - s_R \cdot k') - \\ & - 8(\alpha_S - \alpha_V) C_S C_V m_N^2 4(s_R \not{k} E_\nu - k \cdot k' s_R^0 + E_e s_R \cdot k') \end{aligned}$$

- Ricordiamo la proprietà del vettore s^μ : $s_R \cdot k = 0$
- Per finire, ricordiamo che s_R , k , k' sono
- Introduciamoli nel calcolo

$$\boxed{s_R = \left(\frac{|\mathbf{k}|}{m_e}, \frac{E_e}{m_e} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \right)}$$

$$\boxed{k = (E_e, \mathbf{k})}$$

$$\boxed{k' = (E_\nu, \mathbf{k}_\nu)}$$

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}_F^R}|^2 - |\overline{\mathfrak{M}_F^L}|^2 = & -8C_S^2 m_N^2 \alpha_S 4E_\nu E_e (\beta_e - \cos \theta_{e\nu}) - 8C_V^2 m_N^2 \alpha_V 4E_\nu E_e (\beta_e + \cos \theta_{e\nu}) - \\ & + 8(\alpha_S - \alpha_V) C_S C_V m_N^2 4m_e E_\nu \cos \theta_{e\nu} \end{aligned}$$



Polarizzazione nel decadimento β

- Ricordiamo che

$$\wp = \frac{\int \left(|\mathfrak{M}^R|^2 - |\mathfrak{M}^L|^2 \right) d\Phi}{\int \left(|\mathfrak{M}^R|^2 + |\mathfrak{M}^L|^2 \right) d\Phi}$$

- Il numeratore (risultato del calcolo precedente) è

$$\overline{|\mathfrak{M}_F^R|^2} - \overline{|\mathfrak{M}_F^L|^2} = -8C_S^2 m_N^2 \alpha_S 4E_\nu E_e (\beta_e - \cos \theta_{e\nu}) - 8C_V^2 m_N^2 \alpha_V 4E_\nu E_e (\beta_e + \cos \theta_{e\nu}) - \\ + 8(\alpha_S - \alpha_V) C_S C_V m_N^2 4m_e E_\nu \cos \theta_{e\nu}$$

- L'integrale sulle direzioni dell'elettrone e del neutrino elimina i termini dipendenti da $\cos \theta_{e\nu}$

$$\boxed{-8C_S^2 m_N^2 \alpha_S 4E_\nu E_e \beta_e - 8C_V^2 m_N^2 \alpha_V 4E_\nu E_e \beta_e}$$

- Per quel che riguarda il denominatore notiamo che i termini $\mathfrak{M}^R$ e $\mathfrak{M}^L$ contengono rispettivamente $\frac{1}{2}(1 - \gamma^5 \not{\epsilon}_R)$ e $\frac{1}{2}(1 + \gamma^5 \not{\epsilon}_R)$

- La somma di questi due termini è pertanto 1

- Il denominatore (integrato sulle direzioni) risulta uguale al risultato trovato per la distribuzione dell'energia

$$\boxed{16m_N^2 E_e E_\nu [C_S^2 (1 + \alpha_S^2) + C_V^2 (1 + \alpha_V^2)]}$$

- Abbiamo usato il risultato sperimentale che l'interferenza di Fierz è 0

Polarizzazione nel decadimento β

- La polarizzazione degli elettroni è pertanto

$$\wp = \frac{-8C_S^2 m_N^2 \alpha_S 4E_\nu E_e \beta_e - 8C_V^2 m_N^2 \alpha_V 4E_\nu E_e \beta_e}{16m_N^2 E_e E_\nu [C_S^2 (1 + \alpha_S^2) + C_V^2 (1 + \alpha_V^2)]}$$

$$\wp = -\beta_e \frac{2C_S^2 \alpha_S + 2C_V^2 \alpha_V}{C_S^2 (1 + \alpha_S^2) + C_V^2 (1 + \alpha_V^2)}$$

- Vedremo fra poco che gli studi sperimentali della polarizzazione degli elettroni hanno mostrato che

$$\wp = -\beta_e$$

- Pertanto le misure sperimentali richiedono che

$$\frac{2C_S^2 \alpha_S + 2C_V^2 \alpha_V}{C_S^2 (1 + \alpha_S^2) + C_V^2 (1 + \alpha_V^2)} = 1 \quad 2C_S^2 \alpha_S + 2C_V^2 \alpha_V = C_S^2 (1 + \alpha_S^2) + C_V^2 (1 + \alpha_V^2)$$

$$C_S^2 (1 + \alpha_S^2) - 2C_S^2 \alpha_S + C_V^2 (1 + \alpha_V^2) - 2C_V^2 \alpha_V = 0$$

$$C_S^2 (1 - \alpha_S)^2 + C_V^2 (1 - \alpha_V)^2 = 0$$

Polarizzazione nel decadimento β

- Ricordiamo che dalla misura della distribuzione dell'energia si conclude che il termine di interferenza di Fierz è assente
- L'implicazione di questo risultato sulle costanti di accoppiamento è

$$C_S C_V (1 - \alpha_S \alpha_V) = 0$$

- Abbiamo già notato non possiamo trarre conclusioni solo da questo risultato
- D'altro canto, dalla misura delle correlazioni angolari

$$a_F = \frac{C_V^2 (1 + \alpha_V^2) - C_S^2 (1 + \alpha_S^2)}{C_V^2 (1 + \alpha_V^2) + C_S^2 (1 + \alpha_S^2)} = 1$$

- Questo risultato implica

$$\begin{aligned} \cancel{C_V^2 (1 + \alpha_V^2)} - C_S^2 (1 + \alpha_S^2) &= \cancel{C_V^2 (1 + \alpha_V^2)} + C_S^2 (1 + \alpha_S^2) \\ -C_S^2 (1 + \alpha_S^2) &= +C_S^2 (1 + \alpha_S^2) \end{aligned}$$

- Da cui, come prima dell'introduzione della violazione della parità $C_S = 0$

- Combinando questo risultato con la misura della polarizzazione

$$\cancel{C_S^2 (1 - \alpha_S)^2} + C_V^2 (1 - \alpha_V)^2 = 0 \quad C_V^2 (1 - \alpha_V)^2 = 0 \quad \alpha_V = 1$$