
Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 11

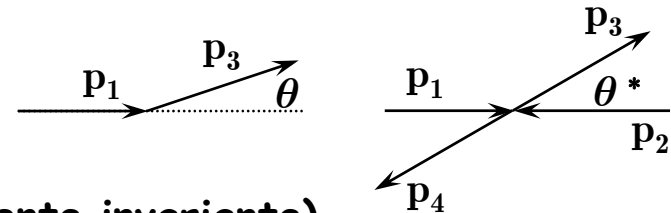
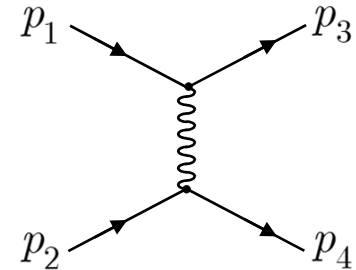
14.11.2022

Sezione d'urto $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$
Propagatore e invarianza di gauge
Teoria di Fermi del decadimento β
Cinematica e spazio delle fasi

anno accademico 2022-2023

Cinematica reazione $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$

- Prima di iniziare il calcolo del flusso e dello spazio delle fasi discutiamo alcuni aspetti della cinematica della reazione
- Analizziamo lo stato finale
 - Abbiamo 2 particelle per un totale di 8 variabili cinematiche
 - La relazione $E^2 = m^2 + p^2$ riduce le variabili a 6
 - Inoltre la conservazione dell'energia-impulso totali (4 relazioni) riduce ulteriormente a 2 le variabili indipendenti
- In assenza di polarizzazione nello stato iniziale una rotazione di un angolo ϕ intorno all'asse definito dal fascio è inessenziale
- Pertanto, per descrivere lo stato finale, è sufficiente una sola variabile
 - Sono possibili diverse scelte; ad esempio
 - Angolo di deflessione θ
 - Energia E di una delle due particelle 3,4
 - Variabile di Mandelstam t (relativisticamente invariante)



$$t = (p_3 - p_1)^2$$

$$t = m^2 + m^2 - 2E_1E_3 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3|\cos\theta$$

- Ricordiamo l'altra variabile di Mandelstam

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$$

Lo spazio delle fasi $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$

- Calcoliamo lo spazio delle fasi per il processo $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ ($p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$)

$$d\Phi_2 = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3\mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4}$$

- Integrando sul 3-momento $\mathbf{p}_4$ della particella 4

$$d\Phi_2 = \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \frac{(2\pi)}{2E_4} \frac{d^3\mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \quad E_4 = \sqrt{\mathbf{p}_4^2 + m_4^2}$$

- Questa formula è valida in tutti i sistemi di riferimento
- Specializziamo la formula nel sistema del centro di massa $\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4 \equiv \mathbf{q}_f$

$$E_3^2 = \mathbf{q}_f^2 + m_3^2 \quad E_4^2 = \mathbf{q}_f^2 + m_4^2$$

- $q_f = |\mathbf{q}_f|$ è la quantità di moto delle due particelle nello stato finale, uguale per le due particelle
- Abbiamo pertanto
- Definiamo infine

$$E_3 dE_3 = q_f dq_f = E_4 dE_4$$

$$\sqrt{s} = W_i = W_f = E_1 + E_2 = E_3 + E_4$$

Lo spazio delle fasi $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$

- Abbiamo pertanto

$$dW_f = dE_3 + dE_4 = \frac{q_f dq_f}{E_3} + \frac{q_f dq_f}{E_4} = \frac{E_3 + E_4}{E_3 E_4} q_f dq_f$$

$$dW_f = \frac{W_f}{E_3 E_4} |\mathbf{q}_f| d|\mathbf{q}_f|$$

- Da cui otteniamo $q_f^2 dq_f = q_f \frac{E_3 E_4}{W_f} dW_f$

- Possiamo pertanto riscrivere lo spazio delle fasi

$$d\Phi_2 = \delta(W_i - W_f) \frac{1}{E_3 E_4} \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{(4\pi)^2} = \frac{1}{(4\pi)^2} \delta(W_i - W_f) \frac{1}{E_3 E_4} q_f^2 dq_f d\Omega$$

$$d\Phi_2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \delta(W_i - W_f) \frac{|\mathbf{q}_f|}{W_f} dW_f d\Omega$$

- Integrando su W_f

$$d\Phi_2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\mathbf{q}_f|}{W_f} d\Omega$$

Il fattore di flusso

- Infine, calcoliamo il fattore di flusso nel sistema del centro di massa
 - Nel centro di massa abbiamo $p_2 = -p_1 \equiv \mathbf{q}_i$

$$\begin{aligned}\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2} &= \sqrt{(E_1 E_2 + \mathbf{q}_i^2)^2 - (m_1 m_2)^2} \\&= \sqrt{E_1^2 E_2^2 + 2\mathbf{q}_i^2 E_1 E_2 + \mathbf{q}_i^4 - (m_1 m_2)^2} \\&= \sqrt{(\mathbf{q}_i^2 + m_1^2)(\mathbf{q}_i^2 + m_2^2) + 2\mathbf{q}_i^2 E_1 E_2 + \mathbf{q}_i^4 - (m_1 m_2)^2} \\&= \sqrt{2\mathbf{q}_i^4 + (m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2)\mathbf{q}_i^2} = |\mathbf{q}_i| \sqrt{2\mathbf{q}_i^2 + (m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2)} \\&= |\mathbf{q}_i| \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2} = |\mathbf{q}_i| \sqrt{(E_1 + E_2)^2} = |\mathbf{q}_i| W_i\end{aligned}$$

- Riassumendo

$$\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2} = |\mathbf{q}_i| W_i$$

Sezione d'urto $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

- Come ultima semplificazione notiamo che nello scattering elastico ($m_1 = m_3$ e $m_2 = m_4$) le quantità di moto nel centro di massa sono uguali $|\mathbf{q}_i| = |\mathbf{q}_f|$

- Inoltre, dato che abbiamo trascurato le masse (m_μ e $m_e \ll E$)

$$E_1 \approx |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{q}_i| \quad E_2 = |\mathbf{p}_2| = |\mathbf{q}_i| \quad s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2, \mathbf{0})^2 = W_i^2$$

$$|\mathbf{q}_i| = |\mathbf{q}_f| = \frac{\sqrt{s}}{2}$$

- Riassumendo gli altri risultati

$$W_i = W_f = \sqrt{s} \quad F = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2)^2} = 4|\mathbf{q}_i| W_i$$

$$d\Phi_2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\mathbf{q}_f|}{W_f} d\Omega \quad \overline{|\mathfrak{M}|^2} = 2e^4 \frac{1 + \cos^4 \frac{\theta^*}{2}}{\sin^4 \frac{\theta^*}{2}}$$

- Possiamo finalmente calcolare la sezione d'urto

$$d\sigma = \frac{1}{F} \overline{|\mathfrak{M}|^2} d\Phi_2 = \frac{1}{4|\mathbf{q}_i| W_i} \overline{|\mathfrak{M}|^2} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\mathbf{q}_f|}{W_f} d\Omega \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{4s} \overline{|\mathfrak{M}|^2}$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{e^4}{2s} \frac{1 + \cos^4 \frac{\theta^*}{2}}{\sin^4 \frac{\theta^*}{2}}}$$

Propagatore e invarianza di gauge

- Abbiamo detto che il propagatore fotonico è la funzione di Green dell'equazione del potenziale A_μ

$$\square D_{\mu\nu}(x_1 - x_2) = g_{\mu\nu} \delta^4(x_1 - x_2)$$

- Siamo interessati alla sua trasformata di Fourier $\tilde{D}_{\mu\nu}(q) = \int D_{\mu\nu}(x) e^{-iq \cdot x} d^4x$
- Nel dominio della variabile q l'equazione diventa

$$-q^2 \tilde{D}_{\mu\nu}(q) = g_{\mu\nu} \quad \longrightarrow \quad \tilde{D}_{\mu\nu}(q) = -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$$

- Tuttavia l'equazione di A_μ non è la più generale
 - La forma che consideriamo presuppone il gauge di Lorentz $\partial^\mu A_\mu = 0$
 - Nel caso generale (senza fissare il gauge)

$$\square A_\mu = 0 \quad \longrightarrow \quad \square A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A^\nu = 0 \quad \left(\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu \right) A^\nu = 0$$

- Verifichiamo che l'operatore $\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu$ non ha un operatore inverso come avviene invece per l'equazione precedente
 - Nello spazio dei momenti $\hat{O} = -q^2 g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu$
 - Cerchiamo l'operatore inverso nella forma $\hat{O}^{-1} = A g_{\mu\nu} + B q_\mu q_\nu$
 - Cerchiamo A e B tali che $\hat{O} \hat{O}^{-1} = 1$

Propagatore e invarianza di gauge

$$\hat{O} = -q^2 g_{\mu\nu} + q_\mu q_\nu$$

$$\hat{O}^{-1} = A g_{\mu\nu} + B q_\mu q_\nu$$

$$\hat{O} \hat{O}^{-1} = 1$$

- Abbiamo

$$\hat{O} \hat{O}^{-1} = (-q^2 g_{\mu\sigma} + q^\mu q^\sigma)(A g_{\sigma\nu} + B q_\sigma q_\nu) = \delta_\nu^\mu$$

- Sviluppando

$$\hat{O} \hat{O}^{-1} = -q^2 A \delta_\nu^\mu - \cancel{B q^2 q^\mu q_\nu} + A q^\mu q_\nu + \cancel{B q^2 q^\mu q_\nu} = -q^2 A \delta_\nu^\mu + A q^\mu q_\nu = \delta_\nu^\mu$$

- Pertanto l'operatore non ha un'inverso

impossibile

- Il problema viene risolto generalizzando l'equazione del potenziale

$$\square A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A^\nu = 0 \quad \longrightarrow \quad \square A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A^\nu + \frac{1}{\xi} \partial_\mu \partial_\nu A^\nu = 0$$

- La generalizzazione equivale ad aggiungere un termine nella Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{L}_\xi = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2$$

- Verifichiamo che con questa generalizzazione l'inverso esiste ed è

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(q) = \frac{1}{q^2} \left[-g_{\mu\nu} + \frac{(1 - \xi) q_\mu q_\nu}{q^2} \right]$$

Propagatore e invarianza di gauge

- Utilizziamo la stessa ipotesi $\hat{O}^{-1} = Ag_{\sigma\nu} + Bq_\sigma q_\nu$

- Abbiamo

$$\hat{O}\hat{O}^{-1} = \left(-q^2 g_{\mu\sigma} + \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) q^\mu q^\sigma \right) (Ag_{\sigma\nu} + Bq_\sigma q_\nu) = \delta_\nu^\mu$$

- Sviluppando

$$\hat{O}\hat{O}^{-1} = -q^2 A \delta_\nu^\mu - Bq^2 q^\mu q_\nu + \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) A q^\mu q_\nu + \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) B q^2 q^\mu q_\nu$$

- Uguagliamo rispettivamente a 1 e a 0 i coefficienti di $\delta_{\mu\nu}$ e $q_\mu q_\nu$

$$Aq^2 = -1 \quad \left(\cancel{-Bq^2} + \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) A \cancel{+ \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) Bq^2} q^\mu q_\nu = 0 \right)$$

- Otteniamo

$$A = -\frac{1}{q^2} \quad \text{inserendo nella seconda equazione} \quad -Bq^2 \frac{1}{\xi} = \frac{1}{q^2} \left(1 - \frac{1}{\xi} \right)$$

- E infine $B = -\frac{1}{q^2} \frac{\xi - 1}{q^2}$

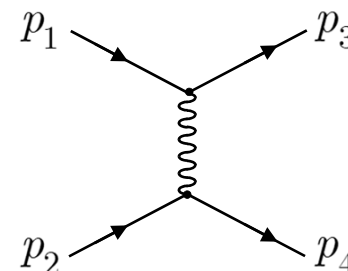
- Pertanto il propagatore è

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(q) = \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{1-\xi}{q^2} q_\mu q_\nu}{q^2}$$

Propagatore e invarianza di gauge

- Il parametro ξ permette di fissare il gauge
 - Il propagatore del fotone dipende dal gauge
 - Fra i valori di ξ più usati
 - Il gauge di Feynman $\xi = 1$ che coincide con il gauge di Lorentz
 - Il gauge di Landau $\xi = 0$
- Naturalmente il risultato fisico non può dipendere dal gauge
 - L'elemento di matrice deve essere indipendente da ξ
- La conservazione della corrente elettromagnetica assicura che l'elemento di matrice sia indipendente dal gauge
 - Ricordiamo il risultato della diapositiva 262

$$\mathfrak{M}_{fi} = -i \frac{e^2}{2} \bar{u}_{p_3} \gamma^\mu u_{p_1} \tilde{D}_{\mu\nu}(q) \bar{u}_{p_4} \gamma^\nu u_{p_2} \quad q = p_4 - p_2 = -(p_3 - p_1)$$



- Gli elementi di matrice delle correnti originavano da termini

$$j^\mu(x) = \langle \mathbf{p}_4 | \hat{j}^\mu(x) | \mathbf{p}_2 \rangle = -e \bar{u}_{\mathbf{p}_4} \gamma^\mu u_{\mathbf{p}_2} e^{-i(p_4 - p_2) \cdot x}$$

- Per l'invarianza di gauge della teoria questa corrente è conservata

$$\partial_\mu j^\mu(x) = -e \bar{u}_{\mathbf{p}_4} \gamma^\mu u_{\mathbf{p}_2} \partial_\mu e^{-i(p_4 - p_2) \cdot x} = ie \bar{u}_{\mathbf{p}_4} \gamma^\mu u_{\mathbf{p}_2} (p_4 - p_2)_\mu = ie \bar{u}_{\mathbf{p}_4} \gamma^\mu u_{\mathbf{p}_2} q_\mu$$

Propagatore e invarianza di gauge

$$\partial_\mu j^\mu(x) = ie\bar{u}_{\mathbf{p}_4} \gamma^\mu u_{\mathbf{p}_2} (p_4 - p_2)_\mu = ie\bar{u}_{\mathbf{p}_4} \gamma^\mu u_{\mathbf{p}_2} q_\mu$$

- Ricordiamo l'equazione di Dirac $\not{p}u_{\mathbf{p}} = mu_{\mathbf{p}}$

$$\partial_\mu j^\mu(x) = ie\bar{u}_{\mathbf{p}_4} \gamma^\mu q_\mu u_{\mathbf{p}_2} = ie\bar{u}_{\mathbf{p}_4} (\not{q}_4 - \not{q}_2) u_{\mathbf{p}_2} = ie\bar{u}_{\mathbf{p}_4} (m - m) u_{\mathbf{p}_2} = 0$$

- Abbiamo pertanto verificato che per una corrente conservata $q_\mu j^\mu(x) = 0$
- Esaminiamo il propagatore nel gauge ξ

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(q) = \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{1-\xi}{q^2} q_\mu q_\nu}{q^2}$$

- Osserviamo che se il propagatore è accoppiato a correnti conservate il termine gauge-dependent, che contiene $q_\mu q_\nu$, dà un contributo nullo

$$\mathfrak{M}_{fi} = -\frac{i}{2} j_{24}^\mu \tilde{D}_{\mu\nu}(q) j_{13}^\nu \quad j_{24}^\mu = e\bar{u}_{\mathbf{p}_4} \gamma^\mu u_{\mathbf{p}_2} \quad j_{13}^\mu = e\bar{u}_{\mathbf{p}_3} \gamma^\mu u_{\mathbf{p}_1}$$

$$\mathfrak{M}_{fi} = \frac{i}{2} j_{24}^\mu \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} j_{13}^\nu - \frac{i}{2} \frac{1-\xi}{q^4} j_{24}^\mu q_\mu q_\nu j_{13}^\nu$$

Gauge independent !

$$j_{24}^\mu q_\mu = 0 \quad q_\nu j_{13}^\nu = 0$$

$$\mathfrak{M}_{fi} = \frac{i}{2} j_{24}^\mu \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} j_{13}^\nu$$

Teoria di Fermi del decadimento β

- Nel decadimento β^- un neutrone all'interno del nucleo si trasforma in un protone emettendo un elettrone e un antineutrino
- All'interno del nucleo può avvenire un decadimento β^+ : la trasformazione di un protone in neutrone con l'emissione di un positrone e di un neutrino
- La prima teoria soddisfacente del decadimento β fu formulata da Enrico Fermi nel 1934
 - La storia della radioattività precedente al lavoro di Fermi a partire dalla scoperta di Becquerel è raccontata in un interessante articolo di A. Pais [1]
- Il decadimento β è dovuto ad una forza molto debole, l'Interazione Debole
 - Nonostante sia poco intensa è molto importante e determina aspetti della nostra vita quotidiana
 - Ad esempio la velocità con cui procede la reazione di produzione del deuterio all'interno del sole [2]

$$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$$

$$p \rightarrow n e^+ \nu_e$$

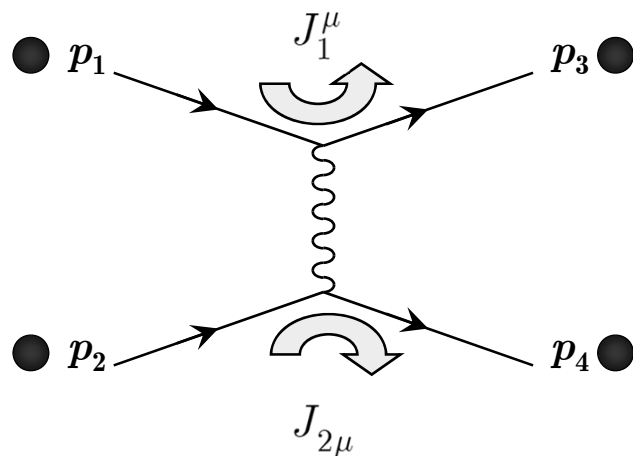
$$p p \rightarrow p n e^+ \nu \rightarrow D \gamma e^+ \nu$$

- [1] - A. Pais - Radioactivity's two early puzzles - Reviews of Modern Physics, Vol. 49, pag. 925 - 1977
- [2] - R. N. Cahn - The eighteen arbitrary parameters of the standard model in your everyday life Review of Modern Physics, Vol. 68, pag. 951 - 1996



Decadimento β del neutrone

- Enrico Fermi propose una teoria per il decadimento β nel 1934
- Fermi si ispirò all'interazione elettromagnetica di due particelle cariche che è interpretata come l'interazione di due correnti



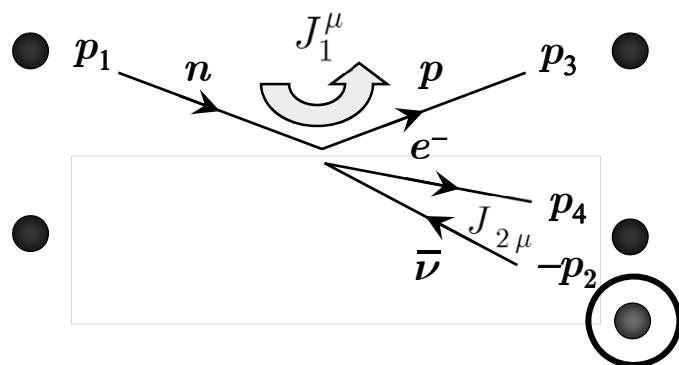
- La corrente J_1
 - Distrugge un elettrone di momento p_1
 - Crea un elettrone di momento p_3
- Analogamente, la corrente J_2
 - Distrugge un elettrone di momento p_2
 - Crea un elettrone di momento p_4

- Le correnti introdotte sono costruite utilizzando gli operatori di campo $\hat{\psi}_e(x)$ per i due elettroni
- Lungo la linea di una corrente ci sono delle grandezze fisiche che si conservano
 - In questo caso
 - La carica elettrica (ψ_i distrugge $-e$, ψ_f crea $-e$)
 - Il numero fermionico

$$J^\mu \sim \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_i$$

Decadimento β del neutrone

- Utilizzando questo modo di vedere anche per il decadimento β le due correnti hanno il seguente ruolo

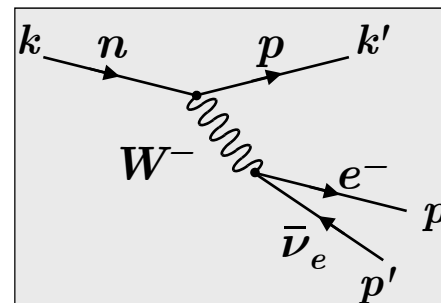


- La prima è la corrente adronica
 - Conserva il numero barionico

$N_n = 1$	$N_p = 1$	$1 = 1$
-----------	-----------	---------
 - Non conserva la carica elettrica
- La seconda è la corrente leptonica
 - Conserva il numero leptonico

$N_{e^-} = 1$	$N_{\bar{\nu}} = -1$	$0 = 1 - 1$
---------------	----------------------	-------------
 - Non conserva la carica elettrica

- La corrente J_1
 - Distrugge un neutrone n di momento p_1
 - Crea un protone p di momento p_3
- La corrente J_2
 - Crea un elettrone e^- di momento p_4
 - Distrugge un neutrino ν di momento p_2
- Ovvero
 - Crea un antineutrino $\bar{\nu}$ di momento $-p_2$
- Cosa sostituisce il fotone ?
 - Fermi suppose una interazione di contatto $\mathcal{H}' = G J_{pn}^\mu(x) g_{\mu\nu} J_{e\bar{\nu}}^\nu(x)$
 - Oggi interpretiamo con lo scambio di un bosone carico e con massa: $W^\pm$



Teoria di Fermi del decadimento β

- Nel linguaggio della Teoria Quantistica dei Campi il decadimento abbiamo descritto come la transizione da uno stato iniziale ad uno finale

$$n \rightarrow p e^- \bar{\nu} \quad |i\rangle = |n\rangle \quad |f\rangle = |p e^- \bar{\nu}\rangle$$

- Sappiamo che la probabilità di transizione si calcola a partire dal corrispondente elemento della matrice S
- L'operatore S deve contenere gli opportuni operatori di campo in modo che l'elemento di matrice sia diverso da zero

$$S_{if} = \langle f | \hat{S} | i \rangle$$

$$\hat{\psi} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \sum_{\lambda} \left(u_{\mathbf{k},\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ik \cdot x} + v_{\mathbf{k},\lambda} \hat{b}_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger} e^{ik \cdot x} \right)$$

crea un antifermione

distrugge un fermione

- Nello stato iniziale viene distrutto:

• Un neutrone $\rightarrow \psi_n$

- Nello stato finale vengono creati

• Un protone $\rightarrow \psi_p^{\dagger}$

• Un elettrone $\rightarrow \psi_e^{\dagger}$

• Un antineutrino $\rightarrow \psi_{\nu}$

- Fermi ipotizzò che l'interazione fosse descritta dalla densità Hamiltoniana

$$\mathcal{H}' = G \left(\bar{\psi}_p \gamma^{\mu} \psi_n \right) \left(\bar{\psi}_e \gamma_{\mu} \psi_{\nu} \right)$$

tutti i campi sono calcolati nel punto x

- La transizione è pertanto dovuta a una interazione di contatto e puntiforme
- Deriva da un termine da aggiungere alla Lagrangiana

$$\mathcal{L}' = -\mathcal{H}'$$



Teoria di Fermi del decadimento β

- La stessa Hamiltoniana con un ulteriore termine (hermitiano coniugato) può descrivere altre interazioni
- Ad esempio

$$\nu n \rightarrow p e^-$$

$$\mathcal{H}' = G(\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n)(\bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu) + h.c.$$

- Distrugge un neutrino
 - Distrugge un neutrone
 - Crea un protone
 - Crea un elettrone
- Quali altre reazioni descrive l'Hamiltoniana ?
- E in particolare, il termine h.c.
-
- Nota curiosa
 - La teoria di Fermi fu pubblicata in Z. Physik, 88, 161 (1934)
 - L'articolo fu prima sottoposto per la pubblicazione a Nature che lo rifiutò con la seguente motivazione
 - "... because it contains speculations too remote from reality to be of interest to the reader"

La costante G

- Notiamo per finire le dimensioni della costante G
 - La densità Hamiltoniana $\mathcal{H}'$ deve avere le dimensioni di una densità di energia: $[\mathcal{H}'] = ML^{-3} = M^4$
 - Alternativamente l'integrale $\int \mathcal{L}' d^4x$ è un'azione e nelle unità di misura naturali deve essere adimensionale: $[\mathcal{L}']L^4 = [\mathcal{L}']M^{-4} \rightarrow [\mathcal{L}'] = M^4$
- Le dimensioni del campo ψ si possono dedurre
 - Dal termine cinetico della lagrangiana $i \bar{\psi} \not{\partial} \psi$: da qui $[\psi]^2 L^{-1} = [\psi]^2 M^1 = M^4$ e infine $[\psi]^2 = M^3$, $[\psi] = M^{3/2}$
 - Dalla rappresentazione integrale
 - E inoltre $[u] = M^{1/2}$ e $[a] = [b] = M^{-3/2}$

$$\hat{\psi} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \sum_{\lambda} \left(u_{\mathbf{k},\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ik \cdot x} + v_{\mathbf{k},\lambda} \hat{b}_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger} e^{ik \cdot x} \right)$$

$$u, v \sim \sqrt{2E} \quad \{a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^{\dagger}\} \sim \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

- Pertanto di nuovo $[\psi] = M^{3/2}$
- La dimensione della costante G risulta quindi $[G][\psi]^4 = M^4 = [G][M]^6$ da cui $[G] = M^{-2}$
 - Notare che nel caso della interazione elettromagnetica la costante di accoppiamento α è adimensionale

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

- Nel caso dell'interazione elettromagnetica la dimensione M^{-2} necessaria per rendere adimensionale l'ampiezza è introdotta dal propagatore

L'elemento di matrice

- L'Hamiltoniana d'interazione si ottiene integrando sul volume tridimensionale:

$$H' = \int \mathcal{H}' d^3x$$

- Per capire le transizioni che possono essere indotte da questa Hamiltoniana occorre fare riferimento allo sviluppo dei campi fermionici in operatori di creazione e annichilazione

$$\widehat{\psi} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \sum_{\lambda} \left(u_{\mathbf{k},\lambda} \widehat{a}_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ik \cdot x} + v_{\mathbf{k},\lambda} \widehat{b}_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger} e^{ik \cdot x} \right)$$

- Notiamo che
 - Gli operatori $a_{\mathbf{k}\lambda}$ distruggono particelle
 - Gli operatori $b_{\mathbf{k}\lambda}$ distruggono antiparticelle
- Analogamente
 - Gli operatori $a_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger}$ creano particelle
 - Gli operatori $b_{\mathbf{k}\lambda}^{\dagger}$ creano antiparticelle
- Il campo ψ distrugge particelle, crea antiparticelle
- Il campo $\psi^{\dagger}$ crea particelle, distrugge antiparticelle
- Notare che in ψ gli operatori $b^{\dagger}$ relativi alle antiparticelle compaiono insieme all'esponenziale di "energia negativa" e agli spinori $v(p) = u(-p)$



L'elemento di matrice

- Impostiamo adesso il calcolo dell'elemento di matrice
 - Abbiamo bisogno di esprimere gli stati dello spazio di Fock utilizzando gli opportuni operatori di creazione

$$|n\rangle = \hat{a}_{pn}^\dagger |0\rangle \quad |pe^- \bar{\nu}\rangle = \hat{a}_{pp}^\dagger \hat{a}_{pe}^\dagger \hat{b}_{p\nu}^\dagger |0\rangle \quad \langle pe^- \bar{\nu}| = \langle 0| \hat{a}_{pp} \hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu}$$

- Per semplificare la notazione abbiamo posto: $pp \equiv p_p$; $pn \equiv p_n$; $pe \equiv p_e$; $p\nu \equiv p_\nu$
 - Inoltre è sottointeso che $a_{pp}^\dagger \equiv \sqrt{2E_{pp}} a_{pp}^\dagger$ (li inseriremo alla fine)
- Al primo ordine dello sviluppo perturbativo l'ampiezza della transizione è data dall'elemento di matrice dell'Hamiltoniana H' fra stato iniziale e stato finale

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int dt \langle pe^- \bar{\nu} | H'_I | n \rangle = -i \int d^4x \langle 0 | \hat{a}_{pp} \hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \mathcal{H}'_I \hat{a}_{pn}^\dagger | 0 \rangle$$

$$H'_I = \int \mathcal{H}'_I d^3x$$

- Per calcolare esplicitamente l'elemento di matrice
 - Si introduce l'espressione della densità Hamiltoniana

$$\mathcal{H}'_I = G(\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n)(\bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu)$$

Rappresentazione
d'interazione

- Si sostituiscono gli operatori di campo nella densità Hamiltoniana con le rappresentazioni integrali

$$\hat{\psi} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \sum_{\lambda} \left(u_{\mathbf{k},\lambda} \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ik \cdot x} + v_{\mathbf{k},\lambda} \hat{b}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{ik \cdot x} \right)$$

L'elemento di matrice

- Otteniamo pertanto

$$\mathcal{A}_{fi} = -iG \int d^4x \langle 0 | \hat{a}_{pp} \hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu) \hat{a}_{pn}^\dagger | 0 \rangle$$

- Ricordiamo che tutti i campi sono calcolati nello stesso punto: $\psi(x)$
- Ricordiamo inoltre che lo spazio di Fock del nostro sistema è un prodotto tensoriale di stati di singola particella

$$|pe^{-}\bar{\nu}\rangle = \hat{a}_{pp}^\dagger \hat{a}_{pe}^\dagger \hat{b}_{p\nu}^\dagger |0\rangle \quad |0\rangle = |0\rangle_p \otimes |0\rangle_n \otimes |0\rangle_e \otimes |0\rangle_\nu \quad |pe^{-}\bar{\nu}\rangle = \hat{a}_{pp}^\dagger |0\rangle \otimes \hat{a}_{pe}^\dagger |0\rangle \otimes \hat{b}_{p\nu}^\dagger |0\rangle \otimes |0\rangle_n$$

- Possiamo pertanto riscrivere l'elemento di matrice come

$$\mathcal{A}_{fi} = -iG \int d^4x \langle 0 | \hat{a}_{pp} \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n \hat{a}_{pn}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | \hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu | 0 \rangle$$



- Consideriamo il termine leptonic

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu | 0 \rangle = \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}_e}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_e}} \frac{d^3\mathbf{k}_\nu}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_\nu}} \langle 0 | \hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} (\bar{u}_{ke} \hat{a}_{ke}^\dagger e^{+ik_e \cdot x} + \bar{v}_{ke} \hat{b}_{ke} e^{-ik_e \cdot x}) \gamma_\mu (u_{k\nu} \hat{a}_{k\nu} e^{-ik_\nu \cdot x} + v_{k\nu} \hat{b}_{k\nu}^\dagger e^{ik_\nu \cdot x}) | 0 \rangle \\ & \equiv \int \frac{d^3\mathbf{k}_e}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_e}} \frac{d^3\mathbf{k}_\nu}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_\nu}} \langle 0 | \hat{\mathcal{O}}_l | 0 \rangle \end{aligned}$$

- L'ultima uguaglianza definisce l'operatore $\hat{\mathcal{O}}_l$

L'elemento di matrice

- Analizziamo l'operatore $\hat{\mathcal{O}}_l$

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{O}}_l &= \hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \left(\bar{u}_{ke} \hat{a}_{ke}^\dagger e^{+ik_e \cdot x} + \bar{v}_{ke} \hat{b}_{ke} e^{-ik_e \cdot x} \right) \gamma_\mu \left(u_{k\nu} \hat{a}_{k\nu} e^{-ik_\nu \cdot x} + v_{k\nu} \hat{b}_{k\nu}^\dagger e^{ik_\nu \cdot x} \right) = \\
 &= \left(\hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \bar{u}_{ke} \hat{a}_{ke}^\dagger e^{+ik_e \cdot x} \gamma_\mu u_{k\nu} \hat{a}_{k\nu} e^{-ik_\nu \cdot x} + \hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \bar{v}_{ke} \hat{b}_{ke} e^{-ik_e \cdot x} \gamma_\mu u_{k\nu} \hat{a}_{k\nu} e^{-ik_\nu \cdot x} + \right. \\
 &\quad \left. \hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \bar{u}_{ke} \hat{a}_{ke}^\dagger e^{+ik_e \cdot x} \gamma_\mu v_{k\nu} \hat{b}_{k\nu}^\dagger e^{ik_\nu \cdot x} + \hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \bar{v}_{ke} \hat{b}_{ke} e^{-ik_e \cdot x} \gamma_\mu v_{k\nu} \hat{b}_{k\nu}^\dagger e^{ik_\nu \cdot x} \right) \\
 &= \left(\hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \hat{a}_{ke}^\dagger \hat{a}_{k\nu} \bar{u}_{ke} \cancel{\gamma_\mu} u_{k\nu} e^{i(k_e - k_\nu) \cdot x} + \hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \hat{a}_{k\nu} \cancel{\bar{v}_{ke}} \gamma_\mu u_{k\nu} e^{-i(k_e + k_\nu) \cdot x} + \right. \\
 &\quad \left. \hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \hat{a}_{ke}^\dagger \hat{b}_{k\nu}^\dagger \bar{u}_{ke} \gamma_\mu v_{k\nu} e^{i(k_e + k_\nu) \cdot x} + \hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \hat{b}_{ke} \cancel{\hat{b}_{k\nu}^\dagger} \bar{v}_{ke} \gamma_\mu v_{k\nu} e^{-i(k_e - k_\nu) \cdot x} \right)
 \end{aligned}$$

- Esaminiamo adesso il risultato dell'applicazione di questo operatore al vuoto $\langle 0 | \hat{\mathcal{O}}_l | 0 \rangle$

$$\begin{array}{ccc}
 \underbrace{\hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \hat{a}_{ke}^\dagger \hat{a}_{k\nu}}_{\boxed{\hat{a}_{k\nu} | 0 \rangle = 0}} | 0 \rangle = 0 & \underbrace{\hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \hat{a}_{k\nu} \hat{b}_{ke}}_{\boxed{\hat{b}_{ke} | 0 \rangle = 0}} | 0 \rangle = 0 & \underbrace{\hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \hat{b}_{ke} \hat{b}_{k\nu}^\dagger}_{\boxed{\hat{b}_{ke} \hat{b}_{k\nu}^\dagger = \hat{b}_{k\nu}^\dagger \hat{b}_{ke}}} | 0 \rangle = \underbrace{\hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \hat{b}_{k\nu}^\dagger \hat{b}_{ke}}_{\boxed{\hat{b}_{ke} | 0 \rangle = 0}} | 0 \rangle = 0
 \end{array}$$

- Pertanto sopravvive solo il termine

$$\boxed{\hat{\mathcal{O}}_l = \hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \hat{a}_{ke}^\dagger \hat{b}_{k\nu}^\dagger \bar{u}_{ke} \gamma_\mu v_{k\nu} e^{i(k_e + k_\nu) \cdot x}}$$

Operatori di particelle
differenti: commutano



L'elemento di matrice

- Per concludere, calcoliamo il valore di aspettazione nel vuoto

$$\langle 0 | \hat{\mathcal{O}}_l | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \hat{a}_{ke}^\dagger \hat{b}_{k\nu}^\dagger | 0 \rangle \bar{u}_{ke} \gamma_\mu v_{k\nu} e^{i(k_e + k_\nu) \cdot x}$$

- Utilizziamo le regole di commutazione per portare a destra gli operatori di distruzione

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{a}_{pe} \underbrace{\hat{b}_{p\nu} \hat{a}_{ke}^\dagger \hat{b}_{k\nu}^\dagger}_{[\hat{b}_{p\nu}, \hat{a}_{ke}^\dagger] = 0} | 0 \rangle &= \langle 0 | \hat{a}_{pe} \hat{a}_{ke}^\dagger \underbrace{\hat{b}_{p\nu} \hat{b}_{k\nu}^\dagger}_{\{\hat{b}_{p\nu}, \hat{b}_{k\nu}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_\nu - \mathbf{k}_\nu)} | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{pe} \hat{a}_{ke}^\dagger \left((2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_\nu - \mathbf{k}_\nu) + \underbrace{\hat{b}_{p\nu}^\dagger \hat{b}_{p\nu}}_{\hat{b}_{p\nu} | 0 \rangle = 0} \right) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \underbrace{\hat{a}_{pe} \hat{a}_{ke}^\dagger}_{\{\hat{a}_{pe}, \hat{a}_{ke}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_e - \mathbf{k}_e)} | 0 \rangle (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_\nu - \mathbf{k}_\nu) = \langle 0 | 0 \rangle (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_\nu - \mathbf{k}_\nu) (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_e - \mathbf{k}_e) \end{aligned}$$

- In conclusione (inseriamo adesso esplicitamente le normalizzazioni degli stati)

$$\langle 0 | \hat{\mathcal{O}}_l | 0 \rangle = \sqrt{2E_{p_e}} \sqrt{2E_{p_\nu}} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_\nu - \mathbf{k}_\nu) (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_e - \mathbf{k}_e) \bar{u}_{ke} \gamma_\mu v_{k\nu} e^{i(k_e + k_\nu) \cdot x}$$

- Inserendo nell'espressione per $\langle 0 | \hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu | 0 \rangle$ e calcolando gli integrali

$$\langle 0 | \hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu | 0 \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{k}_e}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_e}} \frac{d^3 \mathbf{k}_\nu}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_\nu}} \langle 0 | \hat{\mathcal{O}}_l | 0 \rangle = \bar{u}_{p_e} \gamma_\mu v_{p_\nu} e^{i(p_e + p_\nu) \cdot x}$$

momenti (esterni) delle particelle



L'elemento di matrice

- Riepiloghiamo i risultati ottenuti

$$\langle e\bar{\nu} | \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu | 0 \rangle = \bar{u}_{p_e} \gamma_\mu v_{p_\nu} e^{i(p_e + p_\nu) \cdot x}$$

$$\langle p | \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n | n \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{pp} \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n \hat{a}_{pn}^\dagger | 0 \rangle = \bar{u}_{p_p} \gamma^\mu u_{p_n} e^{i(p_p - p_n) \cdot x}$$

- Ricordiamo inoltre l'espressione per l'ampiezza di transizione

$$\mathcal{A}_{fi} = -iG \int d^4x \langle 0 | \hat{a}_{pp} \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n \hat{a}_{pn}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | \hat{a}_{pe} \hat{b}_{p\nu} \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu | 0 \rangle$$

- Inserendo i risultati trovati si trova

$$\mathcal{A}_{fi} = -iG \bar{u}_{p_p} \gamma^\mu u_{p_n} \bar{u}_{p_e} \gamma_\mu v_{p_\nu} \int d^4x e^{i(p_p - p_n) \cdot x} e^{i(p_e + p_\nu) \cdot x}$$

$$\mathcal{A}_{fi} = -iG \bar{u}_{p_p} \gamma^\mu u_{p_n} \bar{u}_{p_e} \gamma_\mu v_{p_\nu} (2\pi)^4 \delta^4(p_n - p_p - p_\nu - p_e)$$

- L'ampiezza invariante è

$$\mathcal{A}_{fi} = \mathfrak{M}_{fi} (2\pi)^4 \delta^4(p_n - p_p - p_\nu - p_e)$$

$$\mathfrak{M}_{fi} = -iG \bar{u}_{p_p} \gamma^\mu u_{p_n} \bar{u}_{p_e} \gamma_\mu v_{p_\nu}$$

L'elemento di matrice

- Osserviamo che l'ampiezza contiene solo funzioni (spinori, matrici e funzioni ordinarie) e nessun operatore ($\psi, a, b \dots$)
- In futuro le ampiezze potranno essere scritte utilizzando regole e diagrammi di Feynman senza rifare tutto il calcolo con la teoria dei campi
- Le regole di Feynman possono essere dedotte osservando il termine della Lagrangiana relativo alla interazione fra i campi

- Ricordiamo che $\mathcal{H}' = -\mathcal{L}'$

$$\mathcal{L}' = -G (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu) + h.c.$$

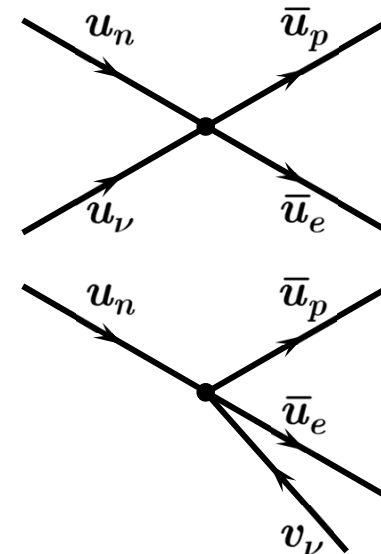
- Al primo ordine corrispondono i diagrammi con un solo vertice

- Le regole sono

- Particella uscente $\rightarrow$ spinore $\bar{u}$
- Particella entrante $\rightarrow$ spinore u
- Anti-particella uscente $\rightarrow$ spinore v
- Anti-particella entrante $\rightarrow$ spinore $\bar{v}$
- Vertice fra due particelle $\rightarrow \sqrt{G} \gamma^\mu$

- L'ampiezza corrispondente è

$$\mathcal{M}_{fi} = -i G \bar{u}_{p_p} \gamma^\mu u_{p_n} \bar{u}_{p_e} \gamma_\mu v_{p_\nu}$$



Osservabili Fisiche

- Nella fisica delle particelle Elementari si studiano sostanzialmente:

- Decadimenti:

- Vite medie
- Natura delle particelle prodotte
- Distribuzioni di energia delle particelle prodotte
- Distribuzioni angolari delle particelle prodotte

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_A} |\mathfrak{M}|^2 d\Phi_n$$

$$\frac{1}{\tau} = \Gamma = \int_{\Phi} \frac{1}{2m_A} |\mathfrak{M}|^2 d\Phi_n$$

- Interazioni di particelle

- Sezioni d'urto
- Distribuzioni di energia delle particelle prodotte
- Distribuzioni angolari delle particelle prodotte

$$d\sigma = \frac{1}{F} |\mathfrak{M}|^2 d\Phi_n$$

- La descrizione teorica di queste osservabili è simile

- Ampiezza Invariante $\mathfrak{M}$
- Flusso (sezione d'urto)
- Spazio delle Fasi $d\Phi_n$

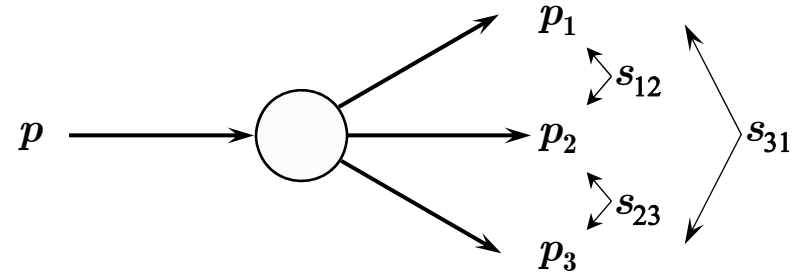
$$d\Phi_n = \prod_{i=1}^n \frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_1 - \dots - p_n)$$



Cinematica decadimento $1 \rightarrow 3$

- Da ora in poi $c = 1$
- Variabili invarianti nel decadimento
- La conservazione del 4-impulso è

$$p = p_1 + p_2 + p_3$$



- Sono convenienti le seguenti variabili invarianti (uguali in tutti i sistemi di riferimento inerziale)

$$s_{12} = (p_1 + p_2)^2 = (p - p_3)^2$$

$$s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (p - p_1)^2$$

$$s_{31} = (p_3 + p_1)^2 = (p - p_2)^2$$

- La variabile s_{ij} è anche detta massa invariante (al quadrato) del sistema composto delle 2 particelle i e j

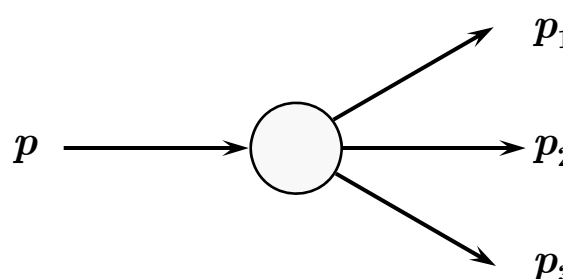
- Inoltre

$$s = p^2 = (p_1 + p_2 + p_3)^2 = m^2$$

- Si verifica facilmente che

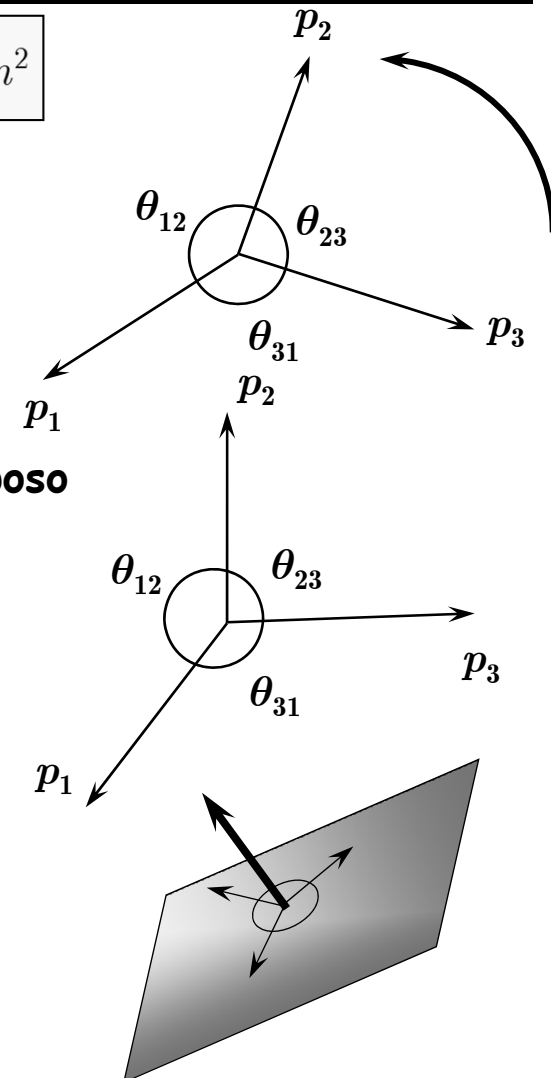
$$s_{12} + s_{23} + s_{31} = m^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$$

Cinematica decadimento $1 \rightarrow 3$



$p = (m, \mathbf{0}) \quad s = p^2 = m^2$

- Nel sistema di riferimento in cui la particella p è a riposo
 - Nel sistema di riposo la somma dei momenti dei prodotti di decadimento è nulla
 - I tre momenti giacciono su un piano
- Variabili indipendenti:
 - 3 impulsi $\times$ 3 componenti = 9
 - 4 equazioni
 - 1 angolo inessenziale di rotazione nel piano
 - 2 angoli inessenziali di orientamento del piano
- Variabili indipendenti: $9 - 4 - 1 - 2 = 2$
- Si possono utilizzare una coppia di s_{ij} qualsiasi



$p = p_1 + p_2 + p_3$

L'elemento di matrice

- Un calcolo analogo per il termine adronico

$$\langle 0 | \hat{a}_{pp} \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n \hat{a}_{pn}^\dagger | 0 \rangle$$

$$= \int \frac{d^3 \mathbf{k}_p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{kp}}} \frac{d^3 \mathbf{k}_n}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{kn}}} \langle 0 | \hat{a}_{pp} \left(\bar{u}_{kp} \hat{a}_{kp}^\dagger e^{+ik_p \cdot x} + \bar{v}_{kp} \hat{b}_{kp} e^{-ik_p \cdot x} \right) \gamma^\mu \left(u_{kn} \hat{a}_{kn} e^{-ik_n \cdot x} + v_{kn} \hat{b}_{kn}^\dagger e^{ik_n \cdot x} \right) \hat{a}_{pn}^\dagger | 0 \rangle$$

- Questa volta possiamo individuare subito i termini che annullano il vuoto
 - L'operatore di distruzione del protone commuta con tutti gli operatori alla sua destra $\hat{b}_{kp} | 0 \rangle = 0$
 - L'operatore di creazione dell'antineutrone commuta con tutti gli operatori alla sua sinistra $\langle 0 | \hat{b}_{kn}^\dagger = 0$

- Ci riduciamo a

$$\int \frac{d^3 \mathbf{k}_p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{kp}}} \frac{d^3 \mathbf{k}_n}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{kn}}} \langle 0 | \hat{a}_{pp} \hat{a}_{kp}^\dagger \hat{a}_{kn} \hat{a}_{pn}^\dagger | 0 \rangle \bar{u}_{kp} \gamma^\mu u_{kn} e^{i(k_p - k_n) \cdot x}$$

- L'elemento di matrice si calcola facilmente

$$\langle 0 | \hat{a}_{pp} \hat{a}_{kp}^\dagger \hat{a}_{kn} \hat{a}_{pn}^\dagger | 0 \rangle = \sqrt{2E_{p_p}} \sqrt{2E_{p_n}} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_n - \mathbf{p}_n) (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}_p - \mathbf{p}_p)$$

- Introducendo nell'integrale otteniamo

$$\langle 0 | \hat{a}_{pp} \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n \hat{a}_{pn}^\dagger | 0 \rangle = \bar{u}_{p_p} \gamma^\mu u_{p_n} e^{i(p_p - p_n) \cdot x}$$

Cinematica decadimento $1 \rightarrow 3$

- Si possono definire energie e momenti delle 3 particelle nello stato finale (nel sistema di riposo della particella p) in funzione di variabili invarianti

$$s_{23} = (p - p_1)^2 = m^2 + m_1^2 - 2mE_1$$

$$E_1 = \frac{m^2 + m_1^2 - s_{23}}{2\sqrt{s}}$$

- È la stessa formula di una particella di massa $m = \sqrt{s}$ che decade in una particella di massa m_1 e una di massa $m_{23} = \sqrt{s_{23}}$
- Il momento della particella $|\mathbf{p}_1|^2 = E_1^2 - m_1^2$
- La funzione λ è $\lambda(x, y, z) = (x - y - z)^2 - 4yz$

$$|\mathbf{p}_1| = \frac{\lambda^{1/2}(m^2, m_1^2, s_{23})}{2\sqrt{s}}$$

- Analogamente si trovano le relazioni per le altre particelle:

$$E_1 = \frac{m^2 + m_1^2 - s_{23}}{2\sqrt{s}}$$

$$E_2 = \frac{m^2 + m_2^2 - s_{31}}{2\sqrt{s}}$$

$$E_3 = \frac{m^2 + m_3^2 - s_{12}}{2\sqrt{s}}$$

$$|\mathbf{p}_1| = \frac{\lambda^{1/2}(m^2, m_1^2, s_{23})}{2\sqrt{s}}$$

$$|\mathbf{p}_2| = \frac{\lambda^{1/2}(m^2, m_2^2, s_{31})}{2\sqrt{s}}$$

$$|\mathbf{p}_3| = \frac{\lambda^{1/2}(m^2, m_3^2, s_{12})}{2\sqrt{s}}$$



Cinematica decadimento $1 \rightarrow 3$

- Per il calcolo degli angoli si può procedere in modo analogo

$$s_{23} = (p_2 + p_3)^2$$

$$s_{23} = m_2^2 + m_3^2 + 2E_2E_3 - 2|\mathbf{p}_2||\mathbf{p}_3|\cos\theta_{23}$$

$$\cos\theta_{23} = \frac{-s_{23} + m_2^2 + m_3^2 + 2E_2E_3}{2|\mathbf{p}_2||\mathbf{p}_3|}$$

$$\cos\theta_{23} = \frac{-s_{23} + m_2^2 + m_3^2 + 2E_2E_3}{\lambda^{1/2}(m^2, m_2^2, s_{31})\lambda^{1/2}(m^2, m_3^2, s_{12})}$$

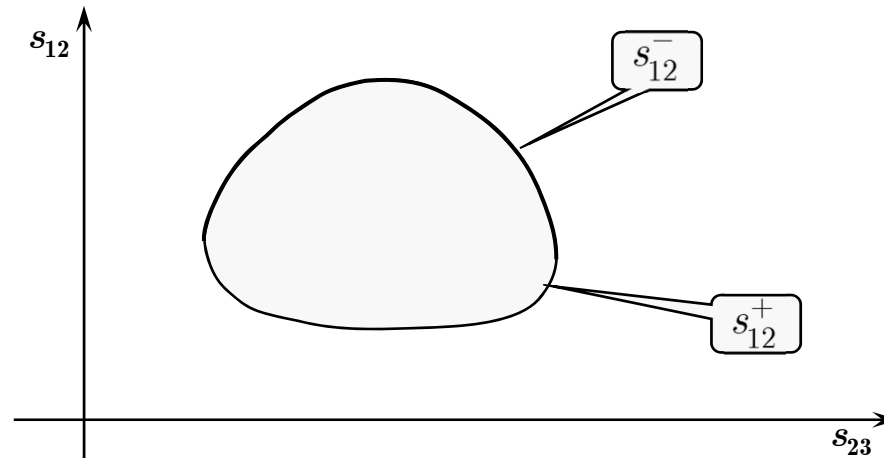
$$\cos\theta_{23} = \frac{2m^2(m_2^2 + m_3^2 - s_{23}) + 4m^2E_2E_3}{\lambda^{1/2}(m^2, m_2^2, s_{31})\lambda^{1/2}(m^2, m_3^2, s_{12})}$$

pertanto, una volta fissate due variabili s_{ij} , tutte le altre grandezze cinematiche sono determinate

$$\cos\theta_{23} = \frac{2m^2(m_2^2 + m_3^2 - s_{23}) + (m^2 + m_2^2 - s_{31})(m^2 + m_3^2 - s_{12})}{\lambda^{1/2}(m^2, m_2^2, s_{31})\lambda^{1/2}(m^2, m_3^2, s_{12})}$$

Regione fisica del decadimento

- Una volta scelte due variabili s_{ij} per descrivere lo stato finale occorre definire la regione fisica che le due variabili possono assumere†



- Scegliamo, ad esempio s_{12} e s_{23} come variabili indipendenti
- L'equazione che definisce la frontiera sul piano $s_{12} - s_{23}$ è definita da

$$s_{12}^{\pm} = m_1^2 + m_2^2 - \frac{1}{2s_{23}} \left[(s_{23} - m^2 + m_1^2)(s_{23} + m_2^2 - m_3^2) \mp \lambda^{1/2}(s_{23}, m^2, m_1^2) \lambda^{1/2}(s_{23}, m_2^2, m_3^2) \right]$$

- La regione di variabilità di s_{23} si può trovare imponendo la realtà delle radici

$$\lambda(s_{23}, m^2, m_1^2) \geq 0 \quad \lambda(s_{23}, m_2^2, m_3^2) \geq 0$$

†E. Byckling, K. Kajantie - Particle Kinematics - Wiley

Regione fisica s_{23}

$$\lambda(s_{23}, m^2, m_1^2) \geq 0$$

$$(s_{23} - m^2 - m_1^2)^2 - 4m^2 m_1^2 \geq 0$$

$$\begin{cases} s_{23} - m^2 - m_1^2 \leq -2m \cdot m_1 \\ m^2 + m_1^2 - s_{23} \geq 2m \cdot m_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_{23} \leq (m - m_1)^2 \\ (m - m_1)^2 \geq s_{23} \end{cases}$$

Due condizioni uguali

- **Combinando le due condizioni in una sola**

- **Analogamente**

$$\lambda(s_{23}, m_2^2, m_3^2) \geq 0$$

$$(s_{23} - m_2^2 - m_3^2)^2 - 4m_2^2 \cdot m_3^2 \geq 0$$

$$\begin{cases} s_{23} - m_2^2 - m_3^2 \geq 2m_2 \cdot m_3 \\ m_2^2 + m_3^2 - s_{23} \leq -2m_2 \cdot m_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_{23} \geq (m_2 + m_3)^2 \\ (m_2 + m_3)^2 \leq s_{23} \end{cases}$$

Due condizioni uguali

$$(m_2 + m_3)^2 \leq s_{23} \leq (m - m_1)^2$$

$$(m_1 + m_2)^2 \leq s_{12} \leq (m - m_3)^2$$

$$(m_3 + m_1)^2 \leq s_{31} \leq (m - m_2)^2$$

Regione fisica s_{23}

- Un metodo alternativo per determinare la regione fisica fa uso dell'invarianza relativistica delle variabili s_{ij}

- Limite superiore di $s_{23} = (p - p_1)^2 = (p_2 + p_3)^2$

- Sistema di riposo della particella che decade $p = (m, 0)$

$$s_{23} = (p - p_1)^2 = m^2 + m_1^2 - 2mE_1$$

- Naturalmente il massimo di s_{23} si ha quando E_1 è minimo cioè $E_1 = m_1$

$$s_{23} \geq m^2 + m_1^2 - 2mm_1 = (m - m_1)^2$$

- Limite inferiore di $s_{23} = (p - p_1)^2 = (p_2 + p_3)^2$

- Sistema del centro di massa delle particelle 2 e 3

- In questo sistema $p_2 = -p_3 = q$ e inoltre $p_2 + p_3 = (E_2 + E_3, 0)$

$$s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (E_2 + E_3)^2 - 0 = (\sqrt{m_2^2 + q^2} + \sqrt{m_3^2 + q^2})^2$$

- Naturalmente il minimo di s_{23} si ha quando $q = 0$ e pertanto

$$s_{23} \geq (m_2 + m_3)^2$$

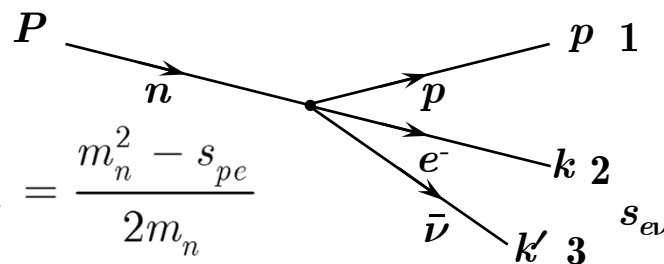
- Calcoli analoghi per la altre variabili

Cinematica decadimento β del neutrone

- Facendo riferimento alla figura

- Le energie sono date da

$$E_p = \frac{m_n^2 + m_p^2 - s_{e\nu}}{2m_n} \quad E_e = \frac{m_n^2 + m_e^2 - s_{\nu p}}{2m_n} \quad E_\nu = \frac{m_n^2 - s_{pe}}{2m_n}$$



- Abbiamo appena visto che $(m_2 + m_3)^2 \leq s_{23} \leq (m_2 - m_1)^2$ $m_e^2 \leq s_{e\nu} \leq (m_n - m_p)^2$

- Dalla equazione per E_p possiamo ricavare

$$s_{e\nu} = m_n^2 + m_p^2 - 2m_n E_p \quad m_n^2 + m_p^2 - 2m_n E_p \geq m_e^2 \quad \frac{m_n^2 + m_p^2 - m_e^2}{2m_n} \geq E_p$$

- L'energia cinetica del protone è

$$T_p = E_p - m_p \quad \frac{m_n^2 + m_p^2 - m_e^2}{2m_n} - m_p \geq T_p$$

$$\boxed{\frac{(m_n - m_p)^2 - m_e^2}{2m_n} \geq T_p}$$

- Analogamente si ottiene

$$\boxed{E_e \leq \frac{m_n^2 - m_p^2 + m_e^2}{2m_n}}$$

Cinematica decadimento β del neutrone

- Utilizzando i valori noti delle masse
 - $m_e = 0.511 \text{ MeV}$
 - $m_n = 939.560 \text{ MeV}$
 - $m_p = 938.270 \text{ MeV}$
 - Si ottiene in definitiva $E_e \leq 1.29 \text{ MeV}$
 - Vediamo che, almeno vicino al limite della regione permessa, l'elettrone può raggiungere velocità relativistiche.
- Analogamente, il limite superiore alla energia cinetica del protone

$$T_p \leq \frac{(m_n - m_p)^2 - m_e^2}{2m_n} = 0.75 \text{ KeV}$$

- Calcoliamo il limite superiore alla velocità del protone

$$\beta_p = \sqrt{\frac{2T_p}{m_p}} \leq \sqrt{\frac{(m_n - m_p)^2 - m_e^2}{m_p m_n}} \approx \frac{\Delta m}{m_p} \approx \frac{1.29}{938} \approx 1.4 \cdot 10^{-3}$$

- Il protone è sempre non relativistico



Cinematica decadimento β del neutrone

- Riassumendo
 - Nel sistema di laboratorio l'elettrone può raggiungere velocità relativistiche
 - Il neutrino, che assumiamo avere massa nulla, ha sempre velocità relativistiche ($\beta_\nu = 1$)
 - Il neutrone è a riposo
 - Il protone ha velocità non relativistiche
- Per i leptoni è pertanto indispensabile utilizzare una teoria relativistica
 - Utilizzeremo gli spinori quadridimensionali
- Per il protone e per il neutrone è sufficiente un'approssimazione non relativistica
 - Utilizzeremo gli spinori bidimensionali di Pauli
- Per un nucleo valgono gli stessi argomenti

