
Interazioni Elettrodeboli

prof. Francesco Ragusa
Università di Milano

Lezione n. 10

8.11.2022

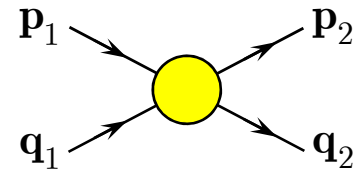
Teoria dello Scattering. Matrice S
Sviluppo perturbativo della matrice S
Scattering di Coulomb
Interazione di due particelle cariche

anno accademico 2022-2023

Teoria dello Scattering

- Vogliamo adesso vedere come si può descrivere un processo di scattering
 - Ad esempio lo scattering di 2 elettroni mediato da interazione elettromagnetica

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$$



- Si comincia assumendo che quando le particelle sono molto distanti l'interazione sia trascurabile e quindi esse possano essere descritte da campi liberi

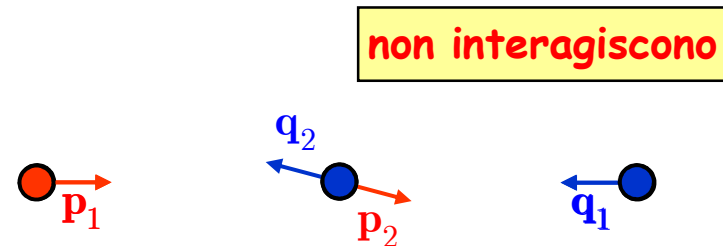
- In particolare, con $a^\dagger(p)$ è l'operatore di creazione degli elettroni, lo stato iniziale è

$$|p_1, q_1\rangle = a^\dagger(p_1) a^\dagger(q_1) |0\rangle$$

- Il punto importante è che lo stato $|p_1, q_1\rangle$ contiene tutta la storia delle due particelle libere incidenti (non interagenti, libere)

- Sia nel passato remoto
- Sia nel futuro lontano

- Lo stato finale $|p_2, q_2\rangle$ non è l'evoluzione libera dello stato $|p_1, q_1\rangle$



è uno stato differente nel passato e nel futuro

Teoria dello Scattering: la Matrice S

- Per i motivi appena illustrati lo stato iniziale è chiamato stato asintotico $|\rangle_{\text{in}}$

$$|p_1, q_1\rangle_{\text{in}} = a_{\text{in}}^\dagger(p_1) a_{\text{in}}^\dagger(q_1) |0\rangle$$

- Gli stati $|\rangle_{\text{in}}$ formano una base completa dello spazio di Hilbert
 - Sono stati di particelle non interagenti
 - Sono "etichettati" indicando i momenti delle particelle nel passato remoto
- Nel passaggio dal passato al futuro le particelle interagiscono e il futuro dello stato che interagisce cambia
 - Nel futuro l'interazione può portare a stati liberi diversi da quello iniziale
- Nel 1943 Heisenberg formulò una teoria dello scattering introducendo un operatore nello spazio di Hilbert: la Matrice S

- La matrice S trasforma lo stato asintotico iniziale nello stato finale

$$S |p_1, q_1\rangle_{\text{in}}$$

- Questo stato rappresenta la sovrapposizione di tutti i possibili stati finali (liberi) in cui lo stato iniziale si può trasformare per effetto dell'interazione
- Lo stato finale, sovrapposizione di tutte le possibilità, deve avere norma 1

$${}_{\text{in}} \langle p_1, q_1 | S^\dagger S | p_1, q_1 \rangle_{\text{in}} = 1$$

$$S^\dagger S = 1$$

La matrice S è unitaria

Teoria dello Scattering

- Noi siamo interessati al seguente problema
 - Dato lo stato iniziale $|i\rangle_{\text{in}} = |p_1, q_1\rangle_{\text{in}}$
 - Calcolare la probabilità di avere uno stato finale $|f\rangle_{\text{in}} = |p_2, q_2\rangle_{\text{in}}$
- Stato finale: sono particelle libere che nel futuro hanno momenti p_2 e q_2
- Nel passato $|p_2, q_2\rangle_{\text{in}}$ rappresenta particelle libere con i momenti indicati
- Lo stato $|p_2, q_2\rangle_{\text{in}}$ nel futuro rappresenterà ancora uno stato di particelle libere con i momenti indicati (evoluzione di particelle libere)
- Osserviamo che:
 - Se facciamo variare $|i\rangle_{\text{in}}$ fra tutti gli stati della base allora gli stati $S|i\rangle_{\text{in}}$ costituiscono un'altra base
 - Ciò è conseguenza della unitarietà della Matrice S
- Anche gli stati $S|i\rangle_{\text{in}}$ sono stati di particelle libere
 - La matrice S collega stati asintotici ottenuti per $t \rightarrow -\infty$ e $t \rightarrow +\infty$
 - Non considera esplicitamente i dettagli dell'interazione posta a $t = 0$
- In conclusione la probabilità cercata è

$$\wp = \left| {}_{\text{in}} \langle p_2, q_2 | S | p_1, q_1 \rangle_{\text{in}} \right|^2$$

$$\wp = \left| {}_{\text{in}} \langle f | S | i \rangle_{\text{in}} \right|^2 = \left| S_{fi} \right|^2$$

Rappresentazione d'Interazione

- Quando si introducono le interazioni non si può più usare la rappresentazione di Heisenberg perché non si conoscono soluzioni esatte delle equazioni di campo
 - In particolare non si sa calcolare l'effetto dell'operatore di evoluzione

$$\exp[-i\hat{H}(t - t_o)]$$

H è l'Hamiltoniano completo

- Consideriamo di nuovo l'equazione di Schrödinger (H_o è l'Hamiltoniano libero)

$$\hat{H}\psi_S(\mathbf{r},t) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi_S(\mathbf{r},t) \quad \hat{H} = \hat{H}_o + \hat{H}'$$

- Definiamo, tramite l'operatore di evoluzione libero ($t_o = 0$)
 - Sostituendo nell'equazione di Schrödinger

$$\hat{H}e^{-i\hat{H}_o t}\psi_I = i\frac{\partial}{\partial t}(e^{-i\hat{H}_o t}\psi_I) \quad (\hat{H}_o + \hat{H}')e^{-i\hat{H}_o t}\psi_I = \hat{H}_oe^{-i\hat{H}_o t}\psi_I + ie^{-i\hat{H}_o t}\frac{\partial}{\partial t}\psi_I$$

- Moltiplichiamo a sinistra per $\exp[iH_o t]$ e poniamo $\hat{H}'_I = e^{i\hat{H}_o t}\hat{H}'e^{-i\hat{H}_o t}$

$$(\hat{H}_o + \hat{H}'_I)\psi_I = H_o\psi_I + i\frac{\partial}{\partial t}\psi_I$$

$$\hat{H}'_I\psi_I = i\frac{\partial}{\partial t}\psi_I$$

- Pertanto nella rappresentazione d'interazione l'equazione di evoluzione della funzione d'onda è determinata solo da H'_I



Calcolo della Matrice S

- Troviamo una soluzione formale per ψ_I

- Integrando l'equazione
$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_I = \hat{H}'_I \psi_I$$

$$\int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t} \psi_I dt = \psi_I(t) - \psi_I(-\infty) = -i \int_{-\infty}^t \hat{H}'_I \psi_I(t_1) dt_1$$

$$\psi_I(t) = \psi_I(-\infty) - i \int_{-\infty}^t \hat{H}'_I \psi_I(t_1) dt_1$$

- Lo stato $\psi_I(-\infty)$ non è nient'altro che $|i\rangle_{\text{in}}$ introdotto precedentemente

$$\psi_I(t) = |i\rangle_{\text{in}} - i \int_{-\infty}^t \hat{H}'_I \psi_I(t_1) dt_1$$

- L'equazione può essere risolta iterativamente

- Primo ordine, approssimando $\psi_I(t) \approx |i\rangle_{\text{in}}$ nell'integrando

$$\psi_I(t) = |i\rangle_{\text{in}} + \int_{-\infty}^t [-i \hat{H}'_I(t_1)] |i\rangle_{\text{in}} dt_1$$

- Secondo ordine: approssimando nell'integrando $\psi_I(t)$ con la $\psi_I(t)$ del primo ordine

$$\begin{aligned} \psi_I(t) = |i\rangle_{\text{in}} &+ \int_{-\infty}^t [-i \hat{H}'_I(t_1)] |i\rangle_{\text{in}} dt_1 \\ &+ \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} [-i \hat{H}'_I(t_1)] [-i \hat{H}'_I(t_2)] |i\rangle_{\text{in}} dt_2 \end{aligned}$$

Calcolo della Matrice S

- Sommando la serie formalmente

$$\psi_I(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n [H'_I(t_1) H'_I(t_2) \dots H'_I(t_n)] |i\rangle_{\text{in}}$$

- Ricordiamo che per $t \rightarrow +\infty$ abbiamo definito $\psi_I(\infty) = S|i\rangle_{\text{in}}$
- Per confronto troviamo un'espressione per la matrice S

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n [\hat{H}'_I(t_1) \hat{H}'_I(t_2) \dots \hat{H}'_I(t_n)]$$

- Nella formula abbiamo ribadito la natura operatoriale delle grandezze
 - Osserviamo che i tempi sono ordinati: $t_1 > t_2 > \dots > t_n$
 - Definiamo l'operatore di ordinamento cronologico T
- $$T[\hat{A}(t_1) \hat{A}(t_2)] = \begin{cases} \hat{A}(t_1) \hat{A}(t_2) & t_1 > t_2 \\ \hat{A}(t_2) \hat{A}(t_1) & t_2 > t_1 \end{cases}$$
- Si dimostra che si possono estendere tutti gli integrali a $+\infty$ e si ottiene la serie di Dyson

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dt_1 \int dt_2 \dots \int dt_n T[\hat{H}'_I(t_1) \hat{H}'_I(t_2) \dots \hat{H}'_I(t_n)]$$

Sviluppo perturbativo

- Isoliamo il contributo $n = 0$

$$\hat{S} = \hat{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int dt_1 \int dt_2 \dots \int dt_n T \left[\hat{H}'_I(t_1) \hat{H}'_I(t_2) \dots \hat{H}'_I(t_n) \right]$$

- Notiamo che la matrice S contiene un termine 1 che tiene conto del fatto che le particelle possono anche non interagire

- Si dimostra che gli operatori H'_I sono esprimibili in funzione dei campi liberi $\hat{\psi}_I$

- Per il calcolo delle sezioni d'urto o delle larghezze di decadimento occorre calcolare elementi di matrice fra stato iniziale e finale

$$\langle f | \hat{S} | i \rangle \equiv S_{fi} = \delta_{fi} + \mathcal{A}_{fi} = \delta_{fi} + \langle f | \hat{A} | i \rangle$$

- Abbiamo implicitamente definito l'ampiezza di transizione $\mathcal{A}_{fi}$
- Vedremo che l'ampiezza $\mathcal{A}_{fi}$ contiene a sua volta una funzione $\delta(p_i - p_f)$ 4-dimensionale che esprime la conservazione dell'energia e della quantità di moto
- Si preferisce fattorizzare anche questo aspetto con una ulteriore matrice

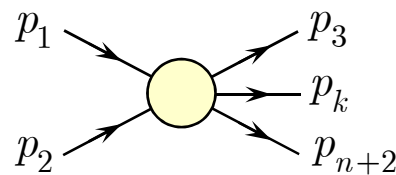
$$\mathcal{A}_{fi} = (2\pi)^4 \delta(p_i - p_f) \mathfrak{M}_{fi}$$

Sezione d'urto e vita media

- Nella Fisica delle Particelle Elementari si studiano sostanzialmente due fenomeni

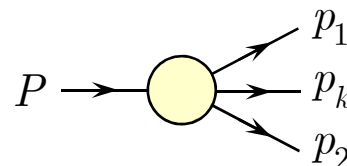
- La diffusione (scattering) di due particelle → sezione d'urto

- Proiettile - Bersaglio → σ
- Fasci in collisione → σ



- Il decadimento di una particella → larghezza di decadimento

- Vita media → τ
- Larghezza di decadimento → $\Gamma = 1/\tau$



- Entrambi i processi vengono descritti per mezzo dell'ampiezza invariante di transizione $\mathfrak{M}$

$$d\sigma = \frac{|\mathfrak{M}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} d\Phi_n(p_1 + p_2; p_3, \dots, p_{n+2})$$

$$\hbar = c = 1$$

Flusso Incidente

$$d\Gamma = \frac{|\mathfrak{M}|^2}{2M} d\Phi_n(P; p_1, \dots, p_n)$$

Spazio delle Fasi

Scattering di Coulomb per particella di spin 0

- Calcoliamo ancora una volta la sezione d'urto per la diffusione Coulombiana
 - Questa volta utilizzando la teoria quantistica dei campi
- La lagrangiana del campo complesso di Klein Gordon è

$$\widehat{\mathcal{L}}_0 = \left(\partial^\mu \widehat{\phi} \right)^\dagger \left(\partial_\mu \widehat{\phi} \right) - m^2 \widehat{\phi}^\dagger \widehat{\phi}$$

- L'introduzione dell'interazione elettromagnetica porta al termine di interazione (confrontare con la slide 93)

$$\widehat{\mathcal{L}}' = -ie \left[\widehat{\phi}^\dagger \left(\partial^\mu \widehat{\phi} \right) - \left(\partial^\mu \widehat{\phi}^\dagger \right) \widehat{\phi} \right] A_\mu + e^2 A^\mu A_\mu \widehat{\phi}^\dagger \widehat{\phi}$$

- Nel seguito faremo un calcolo perturbativo al primo ordine e quindi trascuriamo il termine proporzionale a e^2
- Abbiamo bisogno l'Hamiltoniana di interazione
 - Trascurando il termine e^2 , nonostante $\mathcal{L}'$ contenga derivate di ϕ , si trova¹

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_i \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_0 \widehat{\phi}_i)} \partial_0 \widehat{\phi}_i - \widehat{\mathcal{L}} \quad \widehat{\mathcal{H}}' = ie \left[\widehat{\phi}^\dagger \left(\partial^\mu \widehat{\phi} \right) - \left(\partial^\mu \widehat{\phi}^\dagger \right) \widehat{\phi} \right] A_\mu \quad \widehat{\mathcal{H}}' = -\widehat{\mathcal{L}}'$$

- In definitiva

$$\widehat{\mathcal{H}}' = \widehat{j}^\mu A_\mu \quad \widehat{j}^\mu = ie \left[\widehat{\phi}^\dagger \left(\partial^\mu \widehat{\phi} \right) - \left(\partial^\mu \widehat{\phi}^\dagger \right) \widehat{\phi} \right] \quad \widehat{H}'(t) = \int \widehat{\mathcal{H}}'(x) d^3\mathbf{r}$$

- ¹ Vedi Aitchison vol.1 § 7.4 (sezione dedicata al campo di Klein-Gordon)



L'elemento di Matrice S

- L'elemento di Matrice che vogliamo calcolare è $S_{if} = \langle f | S | i \rangle$

- Ricordiamo lo sviluppo

$$\hat{S} = \hat{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n T[\hat{H}'_I(t_1) \hat{H}'_I(t_2) \dots \hat{H}'_I(t_n)]$$

- Approssimando al primo ordine ($i \neq f$)

potenziale dato
non è quantizzato

$$\begin{aligned} S_{if} &\approx \langle i | \hat{1} | f \rangle - i \langle f | \int \hat{H}'_I(t) dt | i \rangle = \delta_{if} - i \langle f | \int \hat{\mathcal{H}}'_I(x) d^4x | i \rangle \\ &= -i \int \langle f | \hat{j}^\mu(x) A_\mu(x) | i \rangle d^4x = -i \int \langle f | \hat{j}^\mu(x) | i \rangle A_\mu(x) d^4x \end{aligned}$$

- Calcoliamo l'elemento di matrice della corrente

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} (\hat{a}_{\mathbf{k}} e^{-ik \cdot x} + \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ik \cdot x}) \Big|_{k_0=E_{\mathbf{k}}}$$

$$\langle f | \hat{j}^\mu(x) | i \rangle = ie \langle f | [\hat{\phi}^\dagger (\partial^\mu \hat{\phi}) - (\partial^\mu \hat{\phi}^\dagger) \hat{\phi}] | i \rangle$$

$$\langle f | \hat{j}^\mu(x) | i \rangle = ie \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}_1}}} \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}_2}}} \left\langle f \left| \begin{aligned} & \left(\hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger e^{ik_1 \cdot x} + \hat{b}_{\mathbf{k}_1} e^{-ik_1 \cdot x} \right) \left(-ik_2^\mu \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{-ik_2 \cdot x} + ik_2^\mu \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{ik_2 \cdot x} \right) - \right. \\ & \left. - \left(ik_1^\mu \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger e^{ik_1 \cdot x} - ik_1^\mu \hat{b}_{\mathbf{k}_1} e^{-ik_1 \cdot x} \right) \left(\hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{-ik_2 \cdot x} + \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{ik_2 \cdot x} \right) \right. \end{aligned} \right| i \right\rangle$$

L'elemento di matrice della corrente j^μ

$$\langle f | \hat{j}^\mu(x) | i \rangle = ie \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}_1}}} \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}_2}}} \left\langle f \left| \left[\begin{aligned} & \left(\hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger e^{ik_1 \cdot x} + \hat{b}_{\mathbf{k}_1} e^{-ik_1 \cdot x} \right) \left(-ik_2^\mu \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{-ik_2 \cdot x} + ik_2^\mu \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{ik_2 \cdot x} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(ik_1^\mu \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger e^{ik_1 \cdot x} - ik_1^\mu \hat{b}_{\mathbf{k}_1} e^{-ik_1 \cdot x} \right) \left(\hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{-ik_2 \cdot x} + \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{ik_2 \cdot x} \right) \right] \right| i \right\rangle$$

- Inseriamo gli stati $|i\rangle = | \mathbf{p}_i \rangle$ $|f\rangle = | \mathbf{p}_f \rangle$

$$|i\rangle = | \mathbf{p}_i \rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}} \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger |0\rangle \quad |f\rangle = | \mathbf{p}_f \rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}_f}} \hat{a}_{\mathbf{p}_f}^\dagger |0\rangle$$

- Sviluppiamo i termini nella prima riga (inseriremo alla fine le normalizzazioni)

$$a \quad \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \left(-ik_2^\mu e^{-ik_2 \cdot x} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{ik_1 \cdot x} - \underbrace{ik_2^\mu e^{-ik_2 \cdot x} \hat{b}_{\mathbf{k}_1} \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{-ik_1 \cdot x}}_{\hat{b}_{\mathbf{k}_1} |0\rangle = 0} + \underbrace{ik_2^\mu e^{ik_2 \cdot x} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{ik_1 \cdot x}}_{\langle 0 | \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger = 0} + ik_2^\mu e^{ik_2 \cdot x} \hat{b}_{\mathbf{k}_1} \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{-ik_1 \cdot x} \right) \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger |0\rangle$$

$$\hat{b}_{\mathbf{k}_1} |0\rangle = 0 \quad \langle 0 | \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger = 0$$

$$\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \left(-ik_2^\mu e^{-ik_2 \cdot x} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{ik_1 \cdot x} + ik_2^\mu e^{ik_2 \cdot x} \hat{b}_{\mathbf{k}_1} \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{-ik_1 \cdot x} \right) \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger |0\rangle$$

- Sviluppiamo i termini nella seconda riga

$$b \quad \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \left(ik_1^\mu \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger e^{ik_1 \cdot x} \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{-ik_2 \cdot x} - \underbrace{ik_1^\mu \hat{b}_{\mathbf{k}_1} e^{-ik_1 \cdot x} \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{-ik_2 \cdot x}}_{\hat{b}_{\mathbf{k}_1} |0\rangle = 0} + \underbrace{ik_1^\mu \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger e^{ik_1 \cdot x} \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{ik_2 \cdot x}}_{\langle 0 | \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger = 0} - ik_1^\mu \hat{b}_{\mathbf{k}_1} e^{-ik_1 \cdot x} \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{ik_2 \cdot x} \right) \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger |0\rangle$$

$$\hat{b}_{\mathbf{k}_1} |0\rangle = 0 \quad \langle 0 | \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger = 0$$

$$\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \left(ik_1^\mu \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger e^{ik_1 \cdot x} \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{-ik_2 \cdot x} - ik_1^\mu \hat{b}_{\mathbf{k}_1} e^{-ik_1 \cdot x} \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{ik_2 \cdot x} \right) \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger |0\rangle$$

$\langle f | A | i \rangle$ è la differenza delle due espressioni a e b

$$\langle f | \hat{j}^\mu(x) | i \rangle = ie \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}_1}}} \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}_2}}} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i} 2E_{\mathbf{p}_f}} \langle f | A | i \rangle$$

L'elemento di matrice della corrente j^μ

- Otteniamo pertanto

$$\begin{aligned}
 \langle f | A | i \rangle &= \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \left(-ik_2^\mu e^{-ik_2 \cdot x} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{ik_1 \cdot x} + ik_2^\mu e^{ik_2 \cdot x} \hat{b}_{\mathbf{k}_1} \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{-ik_1 \cdot x} \right) \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger | 0 \rangle - \\
 &\quad \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \left(ik_1^\mu e^{ik_1 \cdot x} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2} e^{-ik_2 \cdot x} - ik_1^\mu e^{-ik_1 \cdot x} \hat{b}_{\mathbf{k}_1} \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger e^{ik_2 \cdot x} \right) \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger | 0 \rangle = \\
 &= -i(k_2^\mu + k_1^\mu) e^{i(k_1 - k_2) \cdot x} \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger | 0 \rangle + i(k_2^\mu + k_1^\mu) e^{i(k_2 - k_1) \cdot x} \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \hat{b}_{\mathbf{k}_1} \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger | 0 \rangle \\
 &= -i(k_2^\mu + k_1^\mu) e^{i(k_1 - k_2) \cdot x} \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger | 0 \rangle
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{p}_i \neq \mathbf{p}_f$$

$$\hat{a}_{\mathbf{p}_f} | 0 \rangle = 0$$

$$\hat{a}_{\mathbf{p}_f} \hat{b}_{\mathbf{k}_1} \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger = \hat{b}_{\mathbf{k}_1} \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_f}$$

- Per finire valutiamo l'ultimo valore di aspettazione

$$\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_i) \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2} | 0 \rangle$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger = \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2} + (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_i)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}_2} | 0 \rangle = 0$$

$$(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_i) \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_i) \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_f} | 0 \rangle + (2\pi)^6 \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_i) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_f)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{p}_f} | 0 \rangle = 0$$

$$\langle f | A | i \rangle = -i(2\pi)^6 (k_2^\mu + k_1^\mu) e^{i(k_1 - k_2) \cdot x} \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_i) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_f)$$

L'elemento di matrice della corrente j^μ

- **Riepilogando**

$$\langle f | \hat{j}^\mu(x) | i \rangle = ie \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}_1}}} \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}_2}}} \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i} 2E_{\mathbf{p}_f}} \langle f | A | i \rangle$$

- **Otteniamo**

$$\langle f | A | i \rangle = -i(2\pi)^6 (k_2^\mu + k_1^\mu) e^{i(k_1 - k_2) \cdot x} \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{p}_i) \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_f)$$

$$\langle f | \hat{j}^\mu(x) | i \rangle = e(p_i^\mu + p_f^\mu) e^{i(p_f - p_i) \cdot x}$$

- **Possiamo calcolare l'elemento della matrice S**

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i \int \langle f | \hat{j}^\mu(x) | i \rangle A_\mu(x) d^4x$$

- **Confrontando con la definizione di $\mathcal{A}_{fi}$** $S_{fi} = \delta_{fi} + \mathcal{A}_{fi}$

- **Otteniamo**

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int \langle f | \hat{j}^\mu(x) | i \rangle A_\mu(x) d^4x = -ie(p_i^\mu + p_f^\mu) \int e^{i(p_f - p_i) \cdot x} A_\mu(x) d^4x$$

- **Abbiamo ritrovato il risultato ottenuto con la meccanica quantistica relativistica (slide 96)**

$$M_{fi} = ie(p_i^\mu + p_f^\mu) \int d^4x e^{-i(p_i - p_f) \cdot x} A_\mu(x)$$

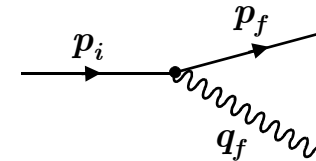
Interazione elettromagnetica: spin $\frac{1}{2}$

- Nel calcolo precedente abbiamo utilizzato l'Hamiltoniana d'interazione

$$\hat{\mathcal{H}}' = \hat{j}^\mu \hat{A}_\mu \quad \hat{H}'(t) = \int \hat{\mathcal{H}}'(x) d^3\mathbf{r}$$

- Nel calcolo abbiamo considerato il potenziale A^μ un campo classico noto
 - Abbiamo trattato il più semplice problema dello scattering da potenziale
- Consideriamo adesso il caso in cui il campo A^μ sia quantizzato
 - In questo caso i processi che possono essere descritti dall'approssimazione al primo ordine devono contenere un fotone nello stato iniziale o nello stato finale

- Ad esempio la particella emette (oppure assorbe) un fotone



- Lo stato iniziale contiene un elettrone
- Lo stato finale contiene un elettrone e un fotone

$$\begin{aligned} |i\rangle &= \hat{a}_{\mathbf{p}_i, s_i}^\dagger |0\rangle \\ |f\rangle &= \hat{a}_{\mathbf{p}_f, s_f}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{q}_f, \lambda}^\dagger |0\rangle \end{aligned}$$

- L'elemento di matrice è

$$\langle i | \hat{\mathcal{H}}' | f \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_i, s_i} \hat{j}^\mu \hat{A}_\mu \hat{a}_{\mathbf{p}_f, s_f}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{q}_f, \lambda}^\dagger | 0 \rangle$$

- Gli operatori j_μ e A_μ contengono gli opportuni operatori di creazione e distruzione tali che l'elemento di matrice sia diverso da zero
 - Senza un fotone nello stato finale l'elemento di matrice sarebbe nullo
 - Analogamente senza gli elettroni negli stati iniziale e finale

Interazione elettromagnetica: spin $\frac{1}{2}$

- Ad esempio senza un fotone nello stato finale (o iniziale) l'elemento di matrice sarebbe

$$\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_f} \hat{j}^\mu \hat{A}_\mu \hat{a}_{\mathbf{p}_i}^\dagger | 0 \rangle$$

- Ricordiamo lo sviluppo di A^μ

$$\hat{A}^\mu(x) = \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2|\mathbf{k}|}} \left(\varepsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu \hat{c}_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ik \cdot x} + \varepsilon_{\mathbf{k},\lambda}^{\mu*} \hat{c}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{ik \cdot x} \right)$$

- Sviluppando l'elemento di matrice come abbiamo fatto per lo scattering da potenziale
 - Gli operatori c possono essere portati a destra e danno contributo nullo
 - Gli operatori $c^\dagger$ possono essere portati a sinistra e danno contributo nullo
- Concludiamo pertanto che se lo stato iniziale o finale non contengono un fotone l'elemento di matrice è nullo

Interazione elettromagnetica: spin $\frac{1}{2}$

- Tuttavia il processo appena descritto non è cinematicamente permesso
 - Infatti, se la particella iniziale e finale coincidono il processo con un fotone reale non è possibile perchè violerebbe la conservazione del 4-momento

$$p_i = p_f \pm q$$

- Il segno $\pm$ si riferisce alla emissione o all'assorbimento di un fotone rispettivamente
- Elevando al quadrato ambo i membri (ricordiamo che per un fotone reale si ha $q^2 = 0$)

$$m^2 = m^2 \pm p \cdot q \quad \longrightarrow \quad p_f \cdot q = 0$$

- Sviluppando il prodotto scalare nel sistema di riposo dell'elettrone finale (p_f) abbiamo pertanto

$$mE_q = 0 \quad E_q = |\mathbf{q}| = 0$$

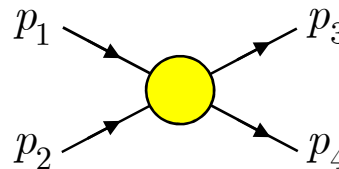
- Vediamo pertanto che la reazione in esame è possibile solo per un fotone reale di energia nulla
 - Notiamo, tuttavia, che sarebbe possibile per un fotone virtuale ($q^2 \neq 0$)

Interazione elettromagnetica: spin $\frac{1}{2}$

- Concludiamo che il primo termine non nullo dello sviluppo perturbativo è del secondo ordine

$$\hat{S} = \hat{1} - \frac{1}{2} \iint d^4x_1 d^4x_2 T[\hat{\mathcal{H}}'_I(x_1) \hat{\mathcal{H}}'_I(x_2)] \quad \hat{\mathcal{H}}'_I = \hat{j}^\mu \hat{A}_\mu$$

- Nel calcolo dell'elemento di matrice per un processo



- Abbiamo i seguenti stati iniziale e finale

$$|i\rangle = |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle = \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger |0\rangle \quad |f\rangle = |\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\rangle = \hat{a}_{\mathbf{p}_3}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_4}^\dagger |0\rangle$$

- Dobbiamo pertanto calcolare

$$\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \hat{a}_{\mathbf{p}_4} T[\hat{\mathcal{H}}'_I(x_1) \hat{\mathcal{H}}'_I(x_2)] \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle$$

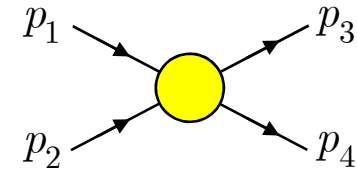
- In forma più estesa

$$\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \hat{a}_{\mathbf{p}_4} T[\hat{j}^\mu(x_1) \hat{A}_\mu(x_1) \hat{j}^\mu(x_2) \hat{A}_\mu(x_2)] \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle$$

Interazione elettromagnetica: spin $\frac{1}{2}$

- Non calcoleremo in dettaglio l'elemento di matrice

$$\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \hat{a}_{\mathbf{p}_4} T[\hat{j}^\mu(x_1) \hat{A}_\mu(x_1) \hat{j}^\nu(x_2) \hat{A}_\nu(x_2)] \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle$$



- Faremo delle considerazioni generali
- Innanzitutto, dal momento che i campi del fotone e dei fermioni commutano $[\hat{A}^\mu, \hat{j}^\nu] = 0$

$$T[\hat{j}^\mu(x_1) \hat{A}_\mu(x_1) \hat{j}^\nu(x_2) \hat{A}_\nu(x_2)] = T[\hat{j}^\mu(x_1) \hat{j}^\nu(x_2)] T[\hat{A}_\mu(x_1) \hat{A}_\nu(x_2)]$$

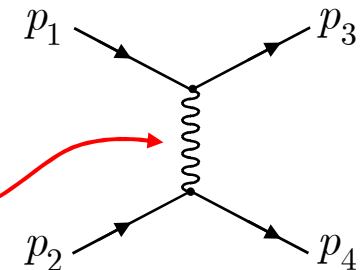
- Nel caso del processo che stiamo esaminando non ci sono fotoni negli stati iniziale e finale
- I campi fotonici agiscono direttamente sugli stati di vuoto
- Possiamo pertanto fattorizzare l'elemento di matrice

$$\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \hat{a}_{\mathbf{p}_4} T[\hat{j}^\mu(x_1) \hat{j}^\nu(x_2)] \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | T[\hat{A}_\mu(x_1) \hat{A}_\nu(x_2)] | 0 \rangle$$

- Si definisce propagatore fotonico l'espressione

$$D_{\mu\nu}(x_1, x_2) = i \langle 0 | T[\hat{A}_\mu(x_1) \hat{A}_\nu(x_2)] | 0 \rangle$$

- Graficamente viene rappresentato come in figura



Interazione elettromagnetica: spin $\frac{1}{2}$

- Si può dimostrare che

- Il propagatore dipende solo dalla differenza delle coordinate x_1 e x_2

$$D_{\mu\nu}(x_1, x_2) = D_{\mu\nu}(x_1 - x_2)$$

- Il propagatore è la funzione di Green dell'equazione del campo elettromagnetico (equazione dell'onda elettromagnetica)

$$\square D_{\mu\nu}(x_1 - x_2) = g_{\mu\nu} \delta^4(x_1 - x_2)$$

- La forma esplicita

$$D_{\mu\nu}(x - x') = \frac{1}{4\pi} \frac{g_{\mu\nu}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta \left[c \left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \right]$$

- La sua trasformata di Fourier è

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(q) = -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$$

- Ritorneremo presto sul propagatore

Interazione elettromagnetica: spin $\frac{1}{2}$

- Consideriamo adesso la parte dell'elemento di matrice relativa ai fermioni

$$\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \hat{a}_{\mathbf{p}_4} T[\hat{j}^\mu(x_1) \hat{j}^\nu(x_2)] \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle$$

- Occorrerebbe trattare attentamente l'eventualità di particelle identiche
- Per questi calcoli sono state messe a punto tecniche molto efficaci
 - In particolare
 - Contrazione di operatori di campo
 - Teorema di Wick
 - Regole di Feynman
 - Ai nostri fini diciamo che per particelle non identiche (esempio scattering elettrone - protone) l'elemento di matrice si fattorizza in due pezzi

$$\langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \hat{j}^\mu(x_1) \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_4} \hat{j}^\nu(x_2) \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle$$

- Infine (faremo il calcolo in seguito)

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_3} \hat{j}^\mu(x_1) \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger | 0 \rangle &= -e \bar{u}_{\mathbf{p}_3, s_3} \gamma^\mu u_{\mathbf{p}_1, s_1} e^{-i(p_1 - p_3) \cdot x_1} \\ \langle 0 | \hat{a}_{\mathbf{p}_4} \hat{j}^\nu(x_2) \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle &= -e \bar{u}_{\mathbf{p}_4, s_4} \gamma^\nu u_{\mathbf{p}_2, s_2} e^{-i(p_2 - p_4) \cdot x_2} \end{aligned}$$

- Notiamo che abbiamo ritrovato la forma delle correnti di transizione dell'equazione di Dirac

Interazione elettromagnetica: spin $\frac{1}{2}$

- Ricordiamo l'espressione per la matrice S al secondo ordine

$$\hat{S} = 1 - \frac{1}{2} \iint d^4x_1 d^4x_2 T \left[\hat{\mathcal{H}}'_I(x_1) \hat{\mathcal{H}}'_I(x_2) \right]$$

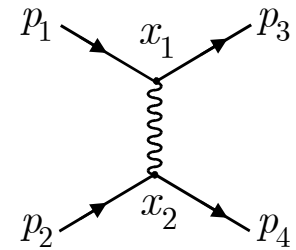
- Occorre integrare su x_1 e x_2

- Inoltre

$$S_{fi} = \delta_{fi} + \mathcal{A}_{fi}$$

- Pertanto $\mathcal{A}_{fi} = -\frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 j_1^\mu(x_1) D_{\mu\nu}(x_1 - x_2) j_2^\nu(x_2)$

- La corrente $j_1(x_1)$ interagisce con A_μ nel punto dello spazio-tempo x_1
- Il propagatore $D_{\mu\nu}(x_1 - x_2)$ propaga l'interazione da x_1 a x_2
- La corrente $j_2(x_2)$ interagisce con A_μ nel punto dello spazio tempo x_2



- Passiamo nello spazio dei momenti

- Facciamo un cambio di variabile $x_1 - x_2 = z$ $x_2 = x_1 - z$ $dx_2 = -dz$

$$x_1 = x \quad \mathcal{A}_{fi} = \frac{1}{2} \int d^4x d^4z j_1^\mu(x) D_{\mu\nu}(z) j_2^\nu(x - z)$$

- Ricordiamo il risultato trovato per gli elementi di matrice delle correnti

$$j_1^\mu(x_1) = -e \bar{u}_{\mathbf{p}_3, s_3} \gamma^\mu u_{\mathbf{p}_1, s_1} e^{-i(p_1 - p_3) \cdot x_1} \quad j_2^\nu(x_2) = -e \bar{u}_{\mathbf{p}_4, s_4} \gamma^\nu u_{\mathbf{p}_2, s_2} e^{-i(p_2 - p_4) \cdot x_2}$$

- Otteniamo ($u_{p\alpha, s\alpha} \rightarrow u_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$)

$$\mathcal{A}_{fi} = \frac{1}{2} e^2 \bar{u}_3 \gamma^\mu u_1 \bar{u}_4 \gamma^\nu u_2 \int d^4x d^4z e^{-i(p_1 - p_3) \cdot x} D_{\mu\nu}(z) e^{-i(p_2 - p_4) \cdot (z - x)}$$

Interazione elettromagnetica: spin $\frac{1}{2}$

$$\mathcal{A}_{fi} = \frac{1}{2} e^2 \bar{u}_3 \gamma^\mu u_1 \bar{u}_4 \gamma^\nu u_2 \int d^4x d^4z e^{-i(p_1-p_3) \cdot x} D_{\mu\nu}(z) e^{-i(p_2-p_4) \cdot (z-x)}$$

- Otteniamo pertanto

$$M_{fi} = \frac{e^2}{2} \bar{u}_3 \gamma^\mu u_1 \bar{u}_4 \gamma^\nu u_2 \int d^4x e^{-i(p_1-p_3+p_2-p_4) \cdot x} \int d^4z D_{\mu\nu}(z) e^{-i(p_4-p_2) \cdot z}$$

- Le parti evidenziate sono rispettivamente

- Una funzione $\delta()$

- La trasformata di Fourier del propagatore (o Funzione di Green)

$$q = p_4 - p_2$$

- Abbiamo in definitiva

$$\mathcal{A}_{fi} = \frac{e^2}{2} \bar{u}_3 \gamma^\mu u_1 \bar{u}_4 \gamma^\nu u_2 (2\pi)^4 \delta(p_1 - p_3 + p_2 - p_4) \tilde{D}_{\mu\nu}(q)$$

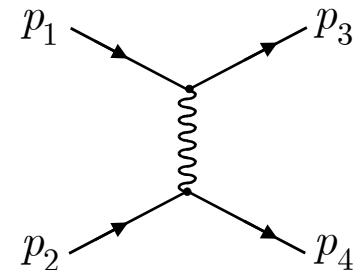
- Abbiamo definito il 4-momento trasferito $q = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$
- Inoltre ricordiamo che

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(q) = -\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$$

$$\mathcal{A}_{fi} = i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 + p_4) \mathfrak{M}_{fi}$$

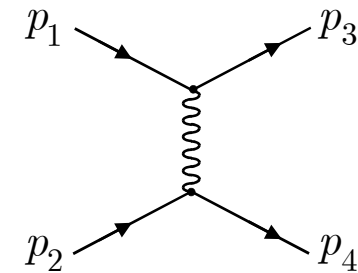
- Per finire

$$\mathfrak{M}_{fi} = -i \frac{e^2}{2} \bar{u}_3 \gamma^\mu u_1 \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}_4 \gamma^\nu u_2$$



Regole di Feynman

- Diamo le regole di Feynman per l'ordine perturbativo più basso
 - Il cosiddetto tree-level (livello d'albero)
 - Non ci sono loop
- In un diagramma ci sono linee esterne e linee interne
 - Le linee esterne corrispondono alle particelle negli stati iniziale e finale (particelle reali)
 - Le linee interne corrispondono a stati virtuali tramite i quali descriviamo l'interazione (particelle virtuali, propagatori)
- Per ogni elemento occorre introdurre un fattore (funzione) nella ampiezza $-i\mathcal{M}$



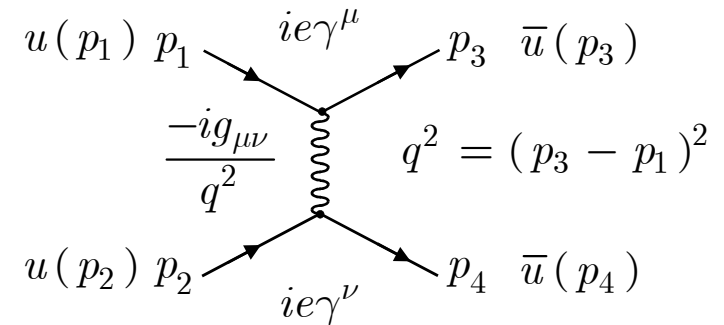
	Particelle esterne			Particelle interne			Vertici
	<i>entranti</i>	<i>uscenti</i>					
<i>fermioni</i>	u	$\bar{u}$					
	$\bar{v}$	v					
<i>spin 0</i>	1	1			$\frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2}$		
<i>fotoni</i>	ε_μ	ε_μ^*			$\frac{i}{q^2 - m^2}$		

Sezione d'urto $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

- Calcoliamo adesso la sezione d'urto del processo $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ utilizzando le regole di Feynman

- Il diagramma di Feynman del processo è

- Abbiamo due fermioni entranti
- Abbiamo due fermioni uscenti
- Ci sono due vertici fermione fotone
- C'è un propagatore fotonico



$$-i\mathfrak{M} = \bar{u}_3 (ie\gamma^\mu) u_1 \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}_4 (ie\gamma^\nu) u_2$$

$$\mathfrak{M} = -e^2 \bar{u}_3 \gamma^\mu u_1 \frac{1}{q^2} \bar{u}_4 \gamma_\nu u_2$$

- Se fosse $e^- e^- \rightarrow e^- e^-$ ci sarebbero 2 diagrammi
 - Con p_3 e p_4 scambiati (e un segno meno relativo)
- Per il calcolo di $|\mathfrak{M}|^2$ si utilizzano le tecniche di tracce delle matrici γ sviluppate precedentemente
- In particolare sappiamo che le due correnti portano ai due tensori

$$L_e^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\not{p}_3 + m_e) \gamma^\alpha (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\beta]$$

$$L_\mu^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \text{Tr}[(\not{p}_4 + m_\mu) \gamma^\alpha (\not{p}_2 + m_\mu) \gamma^\beta]$$

Sezione d'urto $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$

- Il calcolo dei due tensori dà (vedi diapositiva **116**)

$$L_e^{\alpha\beta} = 2[p_3^\alpha p_1^\beta + p_1^\alpha p_3^\beta - (p_1 \cdot p_3 - m_e^2)g^{\alpha\beta}]$$

$$L_\mu^{\alpha\beta} = 2[p_4^\alpha p_2^\beta + p_2^\alpha p_4^\beta - (p_2 \cdot p_4 - m_\mu^2)g^{\alpha\beta}]$$

- Il modulo quadrato dell'ampiezza è

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}}|^2 &= \frac{e^4}{q^4} L_e^{\alpha\beta} L_{\mu,\alpha\beta} \\ &= \frac{8e^4}{q^4} [(p_3 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_2) + (p_3 \cdot p_2)(p_1 \cdot p_4) - m_e^2 p_4 \cdot p_2 - m_\mu^2 p_1 \cdot p_3 + 2m_e^2 m_\mu^2] \end{aligned}$$

- Consideriamo il limite ultra-relativistico (trascuriamo le masse)

$$|\overline{\mathfrak{M}}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} [(p_3 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_2) + (p_3 \cdot p_2)(p_1 \cdot p_4)]$$

- Ricordiamo la formula della sezione d'urto

Flusso Incidente

$$d\sigma = \frac{|\overline{\mathfrak{M}}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} d\Phi_n(p_1 + p_2; p_3, \dots, p_{n+2})$$

Spazio delle Fasi

- Calcoliamo adesso lo spazio delle fasi e il flusso incidente

Variabili di Mandelstam

- Consideriamo lo scattering $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$

- Ricordiamo la conservazione del 4-momento

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4$$

- Definiamo le variabili di Mandelstam

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2 \quad u = (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2 \quad q^2 = (p_3 - p_1)^2 = t$$

- Specializziamo le relazioni nel centro di massa trascurando le masse delle particelle ($p^2 = 0$, $E^2 = \mathbf{p}^2$)

$$s = 2p_1 \cdot p_2 = 2p_3 \cdot p_4 \quad \Rightarrow \quad p_1 \cdot p_2 = p_3 \cdot p_4 = \frac{s}{2} = 2\mathbf{p}^2$$

$$t = -2p_1 \cdot p_3 = -2p_2 \cdot p_4 \quad \Rightarrow \quad p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4 = -\frac{t}{2} = \mathbf{p}^2 (1 - \cos \theta^*)$$

$$u = -2p_1 \cdot p_4 = -2p_2 \cdot p_3 \quad \Rightarrow \quad p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3 = -\frac{u}{2} = \mathbf{p}^2 (1 + \cos \theta^*)$$

- Calcoliamo l'elemento di matrice in funzione di s , t , u

$$\begin{aligned} |\overline{\mathfrak{M}}|^2 &= \frac{8e^4}{q^4} [(p_3 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_2) + (p_3 \cdot p_2)(p_1 \cdot p_4)] = \frac{8e^4}{t^2} \left[\frac{s^2}{4} + \frac{u^2}{4} \right] = 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2} \\ &= 2e^4 \frac{16\mathbf{p}^4 + 4\mathbf{p}^4 (1 + \cos \theta^*)^2}{4\mathbf{p}^4 (1 - \cos \theta^*)^2} = 2e^4 \frac{16 + 16 \cos^4 \frac{\theta^*}{2}}{16 \sin^4 \frac{\theta^*}{2}} = 2e^4 \frac{1 + \cos^4 \frac{\theta^*}{2}}{\sin^4 \frac{\theta^*}{2}} \end{aligned}$$

